

УДК 519.71, 62-50

Задача терминального управления для системы второго порядка при наличии ограничений

Велищанский М. А.^{1,*}, Крищенко А. П.¹

[*mathmod@bmstu.ru](mailto:mathmod@bmstu.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается задача терминального управления с заданным временем для системы второго порядка при наличии ограничений на переменные состояния. Синтез программной траектории осуществляется путем построения фазовой траектории, удовлетворяющей наложенным ограничениям на фазовые переменные. Реализующее ее программное управление строится на основе концепции обратных задач динамики. Построение фазовой траектории осуществляется в некотором классе функций. Предложен оптимизационный подход к выбору фазовой траектории. Предложены варианты расширения множества траекторий, в котором ищутся фазовые траектории. Для решения поставленной задачи используются методы численной оптимизации. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: фазовая траектория; терминальное управление; ограничения на состояния

Введение

Решение терминальных задач, и без того трудных, зачастую осложняется наложенными на переменные состояния и управления ограничениями. Большинство разработанных к настоящему моменту методов решения терминальных задач [1, 2, 3, 4, 5] не дают возможности учета ограничений, наложенные на состояние системы. Для решения подобных задач широко используются методы, основанные на концепции обратных задач динамики [6, 7, 8, 9, 10], которая включает два этапа: задание кинематической траектории движения объекта и определение управлений, реализующих данную траекторию. Поэтому синтез программной траектории, удовлетворяющей заданным ограничениям, представляет собой отдельную задачу, представляющую достаточно большой интерес. В некоторых методах процесс поиска требуемой программной траектории может быть итеративным [11].

Данная работа базируется на результатах, представленных в [12], которые позволяют строить фазовую траекторию удовлетворяющую наложенным ограничениям на фазовые переменные в некотором классе функций. В настоящей работе предлагается использовать оптимизационный подход к выбору траектории, а так же предложены варианты расширения множества, в котором ищутся фазовые траектории. Приведены результаты численного

моделирования, предложенного в [12] алгоритма, а так же результаты численного решения поставленной оптимизационной задачи.

1. Построение фазовой траектории

Для динамической системы

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = g(y, \dot{y})u, \quad (1)$$

рассмотрим задачу терминального управления при наличии ограничений на переменные состояния

$$Y = \{(y, \dot{y}) \in R^2: y \in [y_0, y_*], 0 < \psi_-(y) < \dot{y} < \psi_+(y), \psi_{\pm}(y) \in C^1[y_0, y_*]\} \quad (2)$$

и граничных условий

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad y(t_*) = y_*, \quad \dot{y}(t_*) = \dot{y}_*, \quad (3)$$

считая, что $g(y, \dot{y}) \neq 0$ при $(y, \dot{y}) \in Y$ и управление является непрерывной функцией времени.

Решению задачи (1)–(3) на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ соответствует t -параметрическая кривая $y = y(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, $t \in [0, t_*]$. Так как $\dot{y}(t) > 0$, то уравнение этой кривой можно записать в виде $\dot{y} = \psi(y)$, где $\psi(y) \in C^1[y_0, y_*]$.

Рассматривая равенство $\dot{y} = \psi(y)$ как дифференциальное уравнение первого порядка и интегрируя его на $[0, t_*]$, находим, что для функции ψ выполнены следующие условия:

$$\int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi(y)} = t_*, \quad (4)$$

$$0 < \psi_-(y) < \psi(y) < \psi_+(y), \quad y \in [y_0, y_*], \quad (5)$$

$$\psi(y_0) = \psi_0 = \dot{y}_0, \quad \psi(y_*) = \psi_* = \dot{y}_*. \quad (6)$$

Если для функции ψ выполнены условия (4)–(6), то ей соответствует решение задачи (1)–(3). Действительно, полагая $\dot{y} = \psi(y)$, находим

$$\ddot{y} = \psi'(y)\dot{y} = \psi'(y)\psi(y)$$

и в результате имеем решение задачи (1)–(3) в виде

$$u(y) = \frac{\psi'(y)\psi(y) + f(y, \psi(y))}{g(y, \psi(y))}. \quad (7)$$

Поскольку $y(t)$ есть решение задачи Коши с начальными условиями $\dot{y} = \psi(y)$, $y(0) = y_0$, то управление (7) можно записать в виде

$$u(y(t)) = \frac{\psi'(y(t))\psi(y(t)) + f(y(t), \psi(y(t)))}{g(y(t), \psi(y(t)))}. \quad (8)$$

Соответствующее стабилизирующее управление может быть найдено по формуле

$$u(y, t) = \frac{\ddot{y}(t) + f(y, \dot{y}) - k_1(\dot{y} - \dot{y}(t)) - k_2(y - y(t))}{g(y, \dot{y})},$$

где $k_1, k_2 > 0$ – некоторые константы, задающие динамику убывания ошибки $e = y - y(t)$.

Таким образом, для решения задачи (1)–(3) необходимо и достаточно найти функцию $\psi(y) \in C^1[y_0, y_*]$, удовлетворяющую условиям (4)–(6). Несложно заметить, что для существования решения задачи (4)–(6) ее исходные данные должны удовлетворять условиям

$$\psi_-(y_0) < \psi_0 < \psi_+(y_0), \quad \psi_-(y_*) < \psi_* < \psi_+(y_*), \quad t_{\inf} < t_* < t_{\sup}, \quad (9)$$

где

$$t_{\inf} = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_+(y)}, \quad t_{\sup} = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_-(y)}.$$

Построение функции ψ будем проводить согласно методике изложенной в [12].

Сначала построим $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)$ — специальные аппроксимации на функции $\psi_-(y)$ и $\psi_+(y)$, а искомую функцию $\psi(y)$ будем строить как линейную комбинацию полученных функций. Функции $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)$ выбираются в классе $C^1[y_0, y_*]$ так, чтобы были выполнены граничные условия (6), ограничения (5) и

$$t_-(\hat{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)} < t_* < t_+(\bar{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)}.$$

Согласно [12], в качестве таких функций можно взять

$$\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y) = \begin{cases} (\psi_+(y) - \varepsilon_+) \lambda_1(y) + \psi_-(y)(1 - \lambda_1(y)), & y \in [y_0, y_0 + \varepsilon_0]; \\ \psi_+(y) - \varepsilon_+, & y \in [y_0 + \varepsilon_0, y_* - \varepsilon_*]; \\ (\psi_+(y) - \varepsilon_+) \lambda_2(y) + \psi_-(y)(1 - \lambda_2(y)), & y \in [y_* - \varepsilon_*, y_*], \end{cases}$$

$$\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) = \begin{cases} (\psi_-(y) + \varepsilon_-) \lambda_3(y) + \psi_+(y)(1 - \lambda_3(y)), & y \in [y_0, y_0 + \varepsilon_0]; \\ \psi_-(y) + \varepsilon_-, & y \in [y_0 + \varepsilon_0, y_* - \varepsilon_*]; \\ (\psi_-(y) + \varepsilon_-) \lambda_4(y) + \psi_+(y)(1 - \lambda_4(y)), & y \in [y_* - \varepsilon_*, y_*], \end{cases}$$

где

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*), \quad \hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*);$$

$$\lambda_1(y) = 1 - (1 - \xi_+)(1 - \tau)^2, \quad \tau = \frac{y - y_0}{\varepsilon_0}, \quad \xi_+ = \frac{\psi_0 - \psi_-(y_0)}{\psi_+(y_0) - \psi_-(y_0) - \varepsilon_+},$$

$$\lambda_2(y) = 1 - (1 - \eta_+)\tau^2, \quad \nu = \frac{y - y_* + \varepsilon_*}{\varepsilon_*}, \quad \eta_+ = \frac{\psi_* - \psi_-(y_*)}{\psi_+(y_*) - \psi_-(y_*) - \varepsilon_+},$$

$$\lambda_3(y) = 1 - (1 - \xi_-)(1 - \tau)^2, \quad \tau = \frac{y - y_0}{\varepsilon_0}, \quad \xi_- = \frac{\psi_0 - \psi_+(y_0)}{\psi_-(y_0) - \psi_+(y_0) + \varepsilon_-},$$

$$\lambda_4(y) = 1 - (1 - \eta_-)\tau^2, \quad \nu = \frac{y - y_* + \varepsilon_*}{\varepsilon_*}, \quad \eta_- = \frac{\psi_* - \psi_+(y_*)}{\psi_-(y_*) - \psi_+(y_*) + \varepsilon_-}.$$

При определении функций $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)$ использовались следующие обозначения

$$\begin{aligned} m_- &= \min_{y \in [y_0, y_*]} \psi_-(y), & m_+ &= \min_{y \in [y_0, y_*]} \psi_+(y), \\ M_- &= \max_{y \in [y_0, y_*]} \psi_-(y), & M_+ &= \max_{y \in [y_0, y_*]} \psi_+(y), \\ m_{+-} &= \min_{y \in [y_0, y_*]} (\psi_+(y) - \psi_-(y)), \end{aligned}$$

Для $\varepsilon = t_* - t_{\inf}$ и $\varepsilon = t_{\sup} - t_*$ фиксируются любые $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*) > 0$ и $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*) > 0$ соответственно, удовлетворяющее неравенствам

$$\varepsilon_+ < \min \left\{ \frac{m_{+-}}{3}, \psi_+(y_0) - \psi_0, \psi_+(y_*) - \psi_*, \frac{\varepsilon m_+^2}{3(y_* - y_0) + \varepsilon m_+} \right\}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_- < \min \left\{ \frac{m_{+-}}{3}, \psi_0 - \psi_-(y_0), \psi_* - \psi_-(y_*), \frac{\varepsilon m_-^2}{3(y_* - y_0)} \right\}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_0 < \min \left\{ \frac{y_* - y_0}{3}, \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+ - m_-)} \right\}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_* < \min \left\{ \frac{y_* - y_0}{3}, \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+ - m_-)} \right\}. \quad (13)$$

Для нахождения функции $\psi(y)$ рассмотрим

$$\alpha(c) = \int_{y_0}^{y_*} \left(\frac{c}{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)} + \frac{1-c}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)} \right) dy = ct_+(\bar{\varepsilon}) + (1-c)t_-(\hat{\varepsilon}),$$

где

$$t_-(\hat{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}, \quad t_+(\bar{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)}.$$

При

$$c = c_* = \frac{t_* - t_-(\hat{\varepsilon})}{t_+(\bar{\varepsilon}) - t_-(\hat{\varepsilon})} \in (0, 1)$$

выполнено равенство $\alpha(c) = t_*$ и функция

$$\psi(y) = \frac{1}{\frac{c_*}{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)} + \frac{1-c_*}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}} = \frac{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}{c_*\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) + (1-c_*)\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)}. \quad (14)$$

является решением задачи (4)–(6).

З а м е ч а н и е . Подобный подход применим и в случае, когда фазовая траектория находится в нижней полуплоскости. Соответствующая область ограничений имеет вид

$$Y = \left\{ (y, \dot{y}) \in R^2: y \in [y_0, y_*], 0 > \psi_-(y) > \dot{y} > \psi_+(y), \psi_{\pm}(y) \in C^1[y_*, y_0] \right\}.$$

Для нахождения фазовой траектории $\psi(y)$ получаем условия, аналогичные (4)–(6):

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi(y)} &= t_*; \\ 0 &> \psi_-(y) > \psi(y) > \psi_+(y), \quad y \in [y_*, y_0]: \\ \psi(y_0) &= \psi_0 = \dot{y}_0, \quad \psi(y_*) = \psi_* = \dot{y}_*. \end{aligned}$$

Функции $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y)$ зададим следующим образом:

$$\psi_{+\bar{\varepsilon}}(y) = \begin{cases} (\psi_+(y) + \varepsilon_+) \lambda_1(y) + \psi_-(y)(1 - \lambda_1(y)), & y \in [y_*, y_* + \varepsilon_0]; \\ \psi_+(y) + \varepsilon_+, & y \in [y_* + \varepsilon_0, y_0 - \varepsilon_*]; \\ (\psi_+(y) + \varepsilon_+) \lambda_2(y) + \psi_-(y)(1 - \lambda_2(y)), & y \in [y_0 - \varepsilon_*, y_0]; \end{cases}$$

$$\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) = \begin{cases} (\psi_-(y) - \varepsilon_-) \lambda_3(y) + \psi_+(y)(1 - \lambda_3(y)), & y \in [y_*, y_* + \varepsilon_0]; \\ \psi_-(y) - \varepsilon_-, & y \in [y_* + \varepsilon_0, y_0 - \varepsilon_*]; \\ (\psi_-(y) - \varepsilon_-) \lambda_4(y) + \psi_+(y)(1 - \lambda_4(y)), & y \in [y_0 - \varepsilon_*, y_0]. \end{cases}$$

Вспомогательные функции $\lambda_1(y), \dots, \lambda_4(y)$, определяются следующим образом:

$$\lambda_1(y) = 1 - (1 - \xi_+)(1 - \tau)^2, \quad \tau = \frac{y - y_*}{\varepsilon_0}, \quad \xi_+ = \frac{\psi_* - \psi_-(y_*)}{\psi_+(y_*) - \psi_-(y_*) + \varepsilon_+};$$

$$\lambda_2(y) = 1 - (1 - \eta_+)\tau^2, \quad \nu = \frac{y - y_0 + \varepsilon_*}{\varepsilon_*}, \quad \eta_+ = \frac{\psi_0 - \psi_-(y_0)}{\psi_+(y_0) - \psi_-(y_0) + \varepsilon_+};$$

$$\lambda_3(y) = 1 - (1 - \xi_-)(1 - \tau)^2, \quad \tau = \frac{y - y_*}{\varepsilon_0}, \quad \xi_- = \frac{\psi_* - \psi_+(y_*)}{\psi_-(y_*) - \psi_+(y_*) - \varepsilon_-};$$

$$\lambda_4(y) = 1 - (1 - \eta_-)\tau^2, \quad \nu = \frac{y - y_0 + \varepsilon_*}{\varepsilon_*}, \quad \eta_- = \frac{\psi_0 - \psi_+(y_0)}{\psi_-(y_0) - \psi_+(y_0) - \varepsilon_-}.$$

Условия (10)–(13) запишутся в следующем виде:

$$\varepsilon_+ < \min \left\{ \frac{m_{+-}}{3}, \psi_0 - \psi_+(y_0), \psi_* - \psi_+(y_*), \frac{\varepsilon m_+^2}{3(y_0 - y_*) + \varepsilon m_+} \right\}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_- < \min \left\{ \frac{m_{+-}}{3}, \psi_-(y_0) - \psi_0, \psi_-(y_*) - \psi_*, \frac{\varepsilon m_-^2}{3(y_0 - y_*)} \right\}, \quad (16)$$

$$\varepsilon_0 < \min \left\{ \frac{y_0 - y_*}{3}, \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+ - m_-)} \right\}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_* < \min \left\{ \frac{y_0 - y_*}{3}, \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+ - m_-)} \right\}, \quad (18)$$

где

$$m_- = \min_{y \in [y_0, y_*]} (-\psi_-(y)), \quad m_+ = \min_{y \in [y_0, y_*]} (-\psi_+(y)),$$

$$M_- = \max_{y \in [y_0, y_*]} (-\psi_-(y)), \quad M_+ = \max_{y \in [y_0, y_*]} (-\psi_+(y)),$$

$$m_{+-} = \min_{y \in [y_0, y_*]} (\psi_-(y) - \psi_+(y)).$$

Выбор $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*) > 0$ и $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*) > 0$ в случае нижней полуплоскости осуществляется аналогично рассмотренному выше. Для $\varepsilon = t_* - t_{\inf}$ и $\varepsilon = t_{\sup} - t_*$ фиксируются любые значения $\bar{\varepsilon}$ и $\hat{\varepsilon}$, удовлетворяющие условиям (15)–(18).

Искомая функция $\psi(y)$ вычисляется согласно (14).

2. Оптимизационный подход к выбору фазовой траектории

Построенная в предыдущем разделе функция $\psi(y)$ зависит в общем случае от шести параметров, поскольку параметры ε_0 и ε_* могут быть различными для функций $\psi_{+\tilde{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{-\tilde{\varepsilon}}(y)$. Обозначим через $(\varepsilon_0^+, \varepsilon_*^+)$ значения параметров ε_0 и ε_* для функции $\psi_{+\tilde{\varepsilon}}(y)$ и через $(\varepsilon_0^-, \varepsilon_*^-)$ — для функции $\psi_{-\tilde{\varepsilon}}(y)$. При фиксировании всех шести параметров $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_-, \varepsilon_0^+, \varepsilon_*^+, \varepsilon_0^-, \varepsilon_*^-)$, удовлетворяющих (10)–(13), мы получаем единственную фазовую траекторию $\psi(y)$ вида (14), являющуюся решением задачи (4)–(6). Изменяя указанные параметры, получаем, в общем случае, другую фазовую траекторию, являющуюся решением задачи (4)–(6). Таким образом, мы имеем параметрическое семейство функций $\psi_{\tilde{\varepsilon}}(y)$, являющееся решением терминальной задачи (1)–(3). Наличие подобного множества решений позволяет строить искомую фазовую траекторию как решение некоторой оптимизационной задачи, где в качестве оптимизируемых параметров выступают значения $\tilde{\varepsilon}$:

$$J(\tilde{\varepsilon})|_{\tilde{\varepsilon} \in \Omega} \rightarrow \min, \quad (19)$$

где Ω — множество допустимых значений $\tilde{\varepsilon}$. В частности, Ω может задаваться условиями (10)–(13), что соответствует оптимизационной задаче при наличии линейных ограничений в виде неравенств. В качестве критерия оптимизации может выступать абсолютная величина максимального значения программного управления, среднее значение программного управления и т.д. Если в дополнение к ограничениям (2) имеются ограничения, к примеру, на значение программного управления, то оптимизационную задачу (19) следует дополнить соответствующим ограничением:

$$J(\tilde{\varepsilon})|_{\tilde{\varepsilon} \in \Omega, u \in U} \rightarrow \min, \quad (20)$$

где U — множество допустимых значений программного управления. К сожалению, зависимость программного управления от параметров $\tilde{\varepsilon}$ достаточно сложна, что приводит к оптимизационной задаче при наличии нелинейных ограничений в виде неравенств.

Выполнение условий (10)–(13) гарантирует, что построенная траектория является решением задачи (4)–(6), однако эти условия достаточно грубы. Численное моделирование показало, что в большинстве случаев предложенный алгоритм находит решение терминальной задачи (1)–(3), даже если параметры ε_0 и ε_* не удовлетворяют условиям (10)–(13). При этом увеличение значения параметров ε_0 и ε_* зачастую приводит к значительному уменьшению, например, абсолютной величины максимального значения программного управления. Отказ от выполнения условий (10)–(13) для указанных параметров ведет к дополнительной проверке на принадлежность полученного решения множеству допустимых решений. В работе предлагается расширить множество Ω , задаваемое неравенствами (10)–(13), и использовать

множество допустимых значений, которое задается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \varepsilon_+ < \min \left\{ \frac{m_{+-}}{3}, \psi_+(y_0) - \psi_0, \psi_+(y_*) - \psi_*, \frac{\varepsilon m_+^2}{3(y_* - y_0) + \varepsilon m_+} \right\}, \\ \varepsilon_- < \min \left\{ \frac{m_{+-}}{3}, \psi_0 - \psi_-(y_0), \psi_* - \psi_-(y_*), \frac{\varepsilon m_-^2}{3(y_* - y_0)} \right\}, \\ 0 < \varepsilon_0^+ < \gamma(y_* - y_0), \quad 0 < \varepsilon_*^+ < \gamma(y_* - y_0), \\ 0 < \varepsilon_0^- < \gamma(y_* - y_0), \quad 0 < \varepsilon_*^- < \gamma(y_* - y_0), \\ \varepsilon_0^+ + \varepsilon_*^+ < y_* - y_0, \quad \varepsilon_0^- + \varepsilon_*^- < y_* - y_0, \\ (t_* - t_{inf}(\tilde{\varepsilon}))(t_* - t_{sup}(\tilde{\varepsilon})) \leq 0, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$t_{inf}(\tilde{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{+\tilde{\varepsilon}}(y)}, \quad t_{sup}(\tilde{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{-\tilde{\varepsilon}}(y)}, \quad \gamma \in (0, 1).$$

Последнее условие в (21) предназначено для проверки принадлежности получаемой траектории множеству допустимых решений.

3. Моделирование

Моделирование осуществлялось в среде Matlab. В качестве оптимизационного критерия рассматривалась абсолютная величина максимального значения программного управления

$$J(\tilde{\varepsilon}) = \max(|u(t)|) \Big|_{\tilde{\varepsilon} \in \Omega, t \in [0, t_*]} \rightarrow \min, \quad (22)$$

где множество Ω , задается неравенствами (21). Для решения оптимизационной задачи при наличии ограничений использовалась стандартная функция среды `fmincon`. В качестве алгоритма численного решения задачи использовался алгоритм «Interior Point» [13, 14, 15].

Пример 1. Рассмотрим следующую терминальную задачу:

$$\ddot{y} + y \cos(\dot{y}) = (0.5y + 0.1\dot{y})u; \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 3.5, \quad y(t_*) = 10, \quad \dot{y}(t_*) = 2.5, \quad t_* = 6,$$

при наличии ограничений на переменные состояния

$$\psi_-(y) = \cos(y) + 1.5, \quad \psi_+(y) = 2 \sin(y) + 4.5.$$

В качестве параметров $\tilde{\varepsilon}$ взяты следующие значения, удовлетворяющие условиям (10)–(13):

$$\varepsilon_0^+ = \varepsilon_*^+ = \varepsilon_0^- = \varepsilon_*^- = 0.565, \quad \varepsilon_+ = 0.242, \quad \varepsilon_- = 0.026.$$

На рис. 1 представлены графики ограничений $\psi_-(y)$ и $\psi_+(y)$ и аппроксимации ограничений $\psi_{+\tilde{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{-\tilde{\varepsilon}}(y)$, а также график искомой функции $\psi(y)$, вычисленный согласно (14). На рис. 2 представлен график программного управления $u(y(t))$. Значение критерия (22) без оптимизации составило $J = 7.81$.

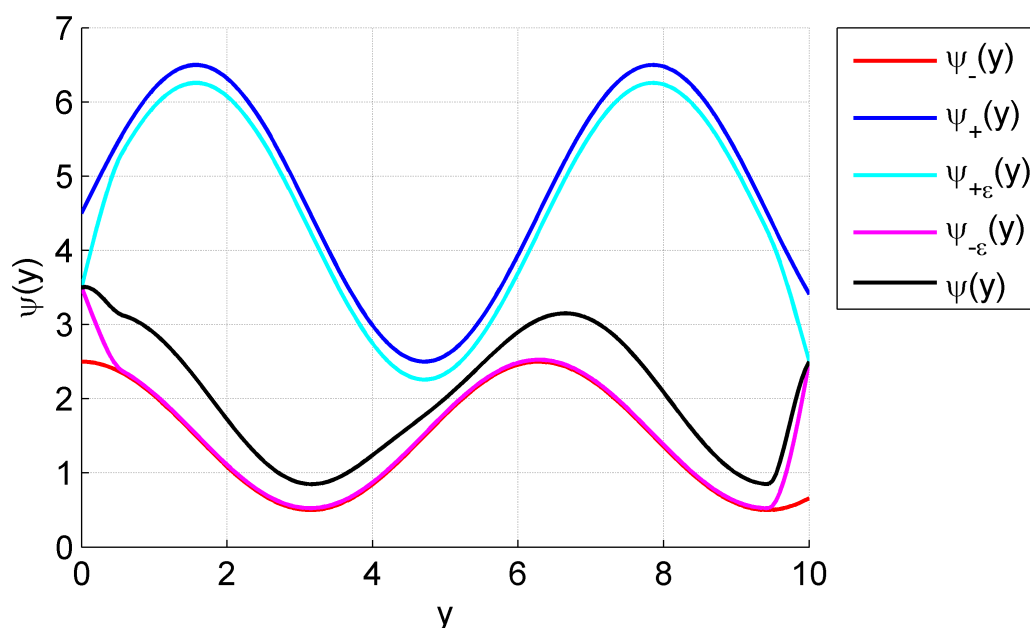


Рис. 1. Графики ограничений, их оценки и фазовая траектория в примере 1



Рис. 2. Программное управление в примере 1

После численного решения оптимизационной задачи были получены следующие значения оптимизируемых параметров:

$$\varepsilon_0^+ = 3.853, \quad \varepsilon_*^+ = 1.129, \quad \varepsilon_0^- = 1.303, \quad \varepsilon_*^- = 0.743.$$

Значение критерия составило $J = 6.5$, что соответствует уменьшению значения критерия на 17%. Соответствующие графики представлены на рис. 3–4.

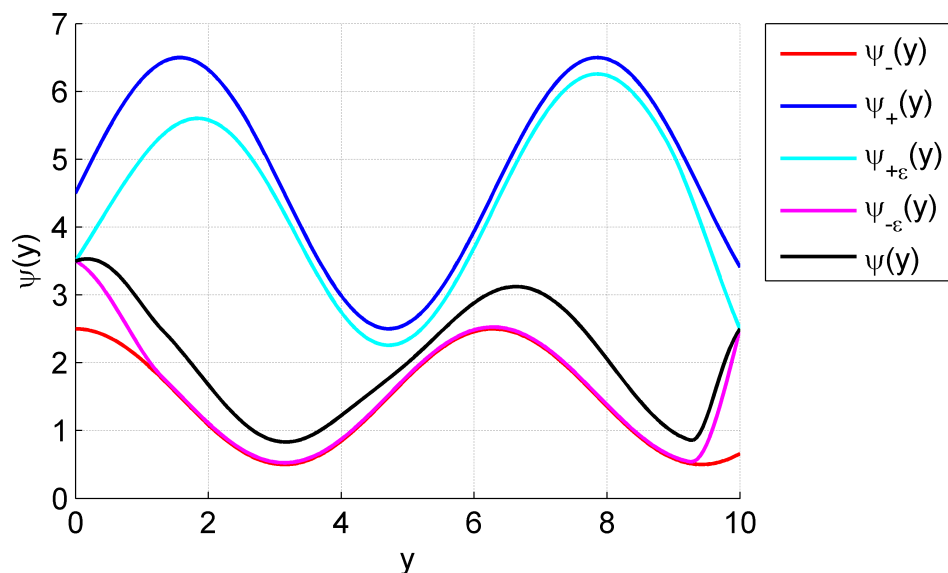


Рис. 3. Графики ограничений, их оценки и фазовая траектория в примере 1 (оптимизация)

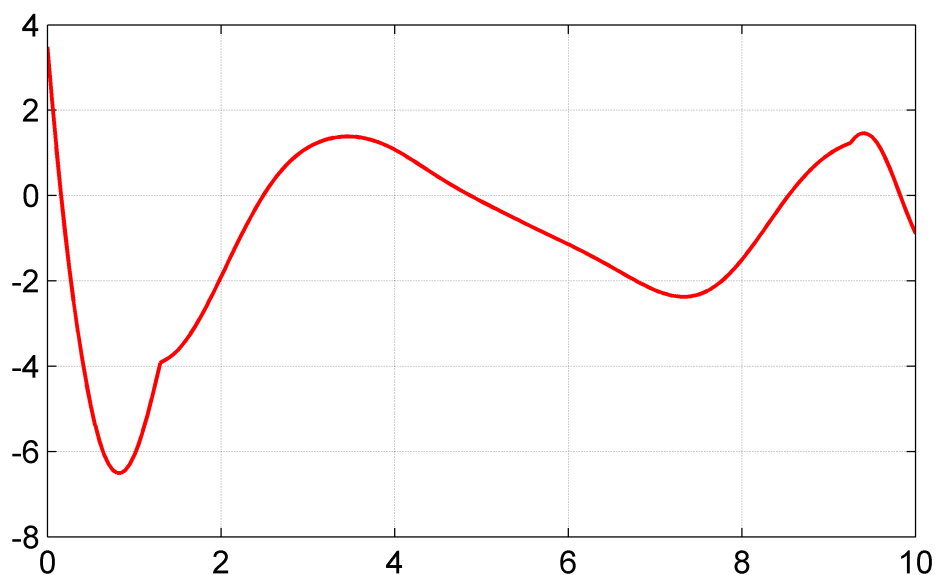


Рис. 4. Программное управление в примере 1 (оптимизация)

Пример 2. Рассмотрим ту же терминальную задачу, что и в примере 1, но с другими ограничениями на переменные состояния:

$$\psi_{-}(y) = 0.5, \quad \psi_{+}(y) = 5.0.$$

В качестве параметров $\tilde{\varepsilon}$ взяты следующие значения, удовлетворяющие условиям (10)–(13):

$$\varepsilon_0^{+} = 0.667, \quad \varepsilon_{*}^{+} = 0.667, \quad \varepsilon_0^{-} = 2.333, \quad \varepsilon_{*}^{-} = 2.333, \quad \varepsilon_{+} = 0.030, \quad \varepsilon_{-} = 0.105.$$

На рис. 5 представлены графики ограничений $\psi_{-}(y)$ и $\psi_{+}(y)$, графики аппроксимации ограничений $\psi_{+\varepsilon}(y)$ и $\psi_{-\varepsilon}(y)$, а также график искомой функции $\psi(y)$, вычисленный согласно (14).

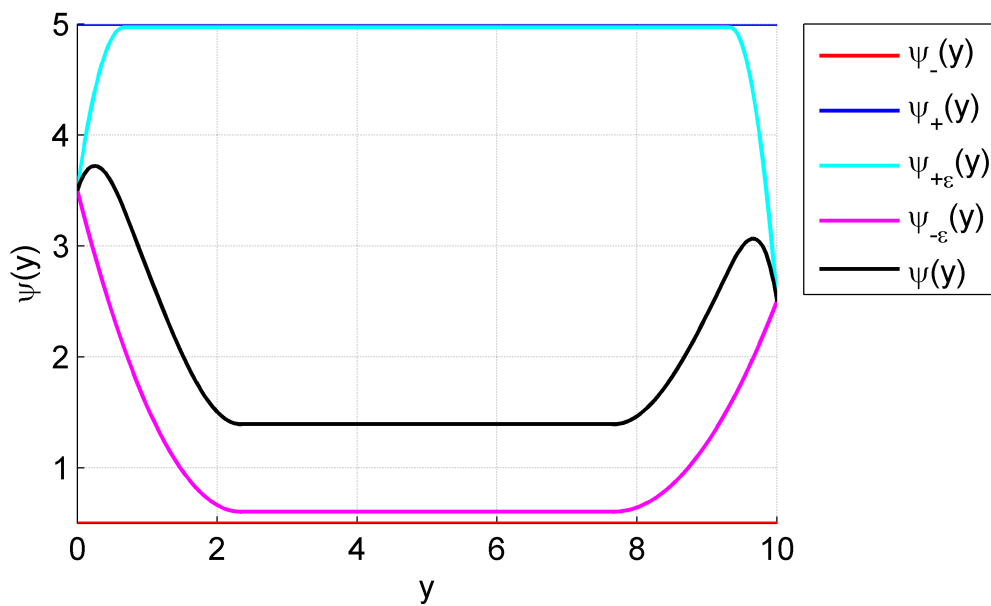


Рис. 5. Графики ограничений, их оценки и фазовая траектория в примере 2

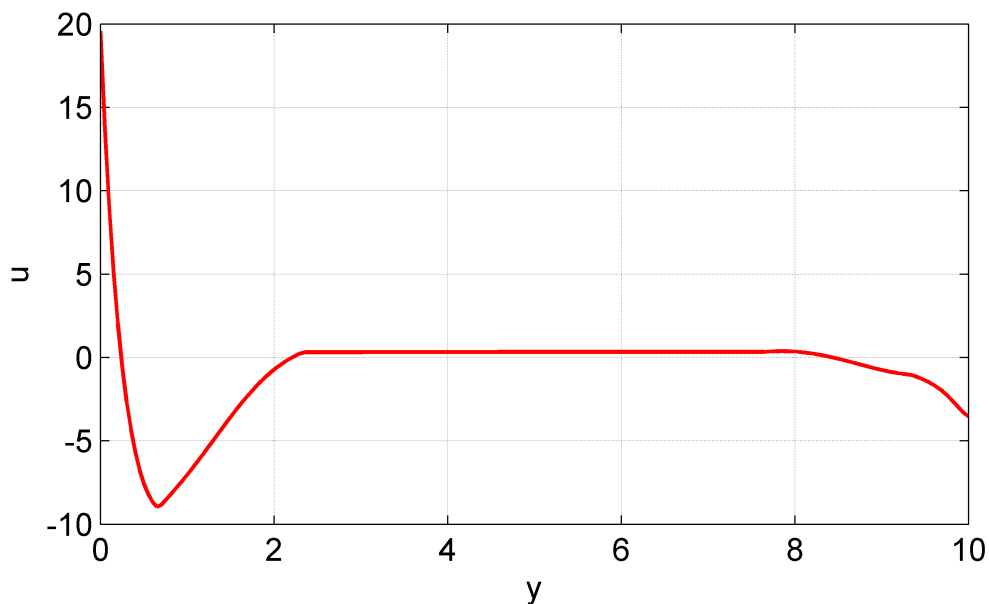


Рис. 6. Программное управление в примере 2

На рис. 6 представлен график программного управления. Значение критерия (22) без оптимизации составило $J = 19.6$.

Численное решение оптимизационной задачи дало следующие значения оптимизируемых параметров:

$$\varepsilon_0^+ = 5.191, \quad \varepsilon_*^+ = 1.981, \quad \varepsilon_0^- = 8.278, \quad \varepsilon_*^- = 0.245.$$

Значение критерия составило $J = 2.41$, что соответствует уменьшению значения критерия более чем в 8 раз. Соответствующие графики представлены на рис. 7–8.

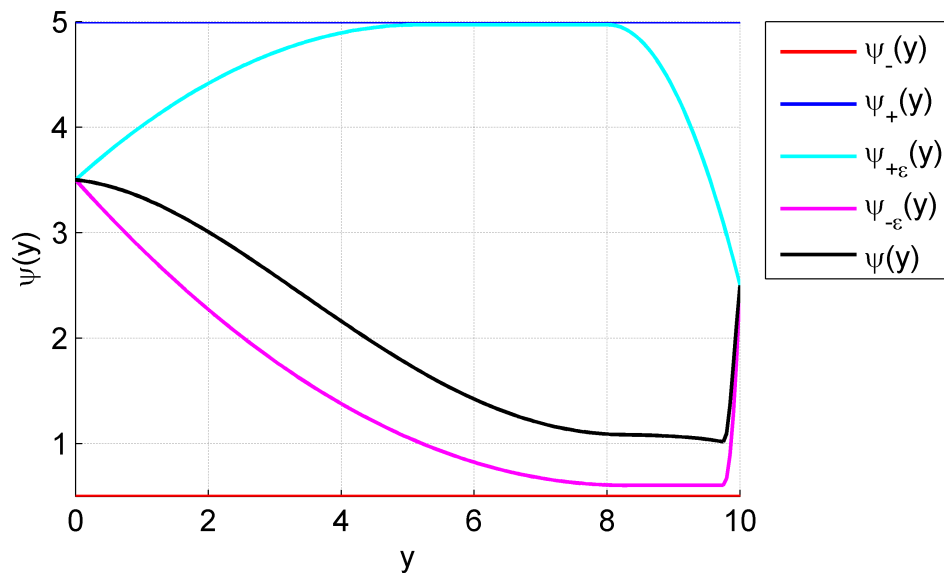


Рис. 7. Графики ограничений, их оценки и фазовая траектория в примере 2 (оптимизация)

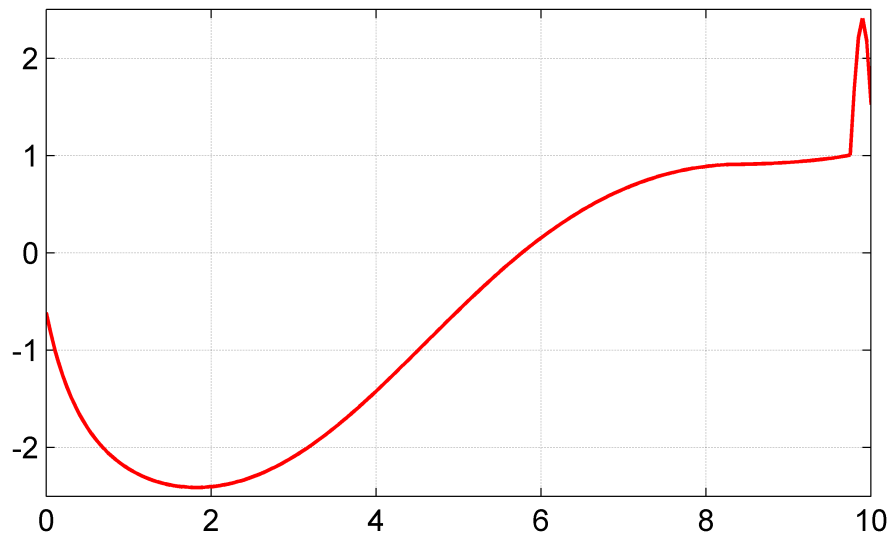


Рис. 8. Программное управление в примере 2 (оптимизация)

Пример 3. Рассмотрим следующую терминальную задачу:

$$\ddot{y} - y \cos(\dot{y}) = u; \quad y(0) = 10, \quad \dot{y}(0) = 3.5, \quad y(t_*) = 0, \quad \dot{y}(t_*) = 2.5, \quad t_* = 6$$

при наличии ограничений на переменные состояния

$$\psi_-(y) = -\cos(y) - 1.5, \quad \psi_+(y) = -2 \sin(y + \pi/4) - 4.5.$$

На фазовой плоскости данные условия соответствуют нижней полуплоскости. В качестве параметров $\tilde{\varepsilon}$ взяты следующие значения, удовлетворяющие условиям (10)–(13):

$$\varepsilon_0^+ = 0.565, \quad \varepsilon_*^+ = 0.565, \quad \varepsilon_0^- = 0.565, \quad \varepsilon_*^- = 0.565, \quad \varepsilon_+ = 0.042, \quad \varepsilon_- = 0.026.$$

На рис. 9 представлены графики ограничений $\psi_-(y)$ и $\psi_+(y)$, их аппроксимаций $\psi_{+\varepsilon}(y)$ и $\psi_{-\varepsilon}(y)$, а также график искомой функции $\psi(y)$, вычисленной согласно (14). На рис. 10 представлен график программного управления. Значение критерия (22) без оптимизации составило $J = 16.05$.

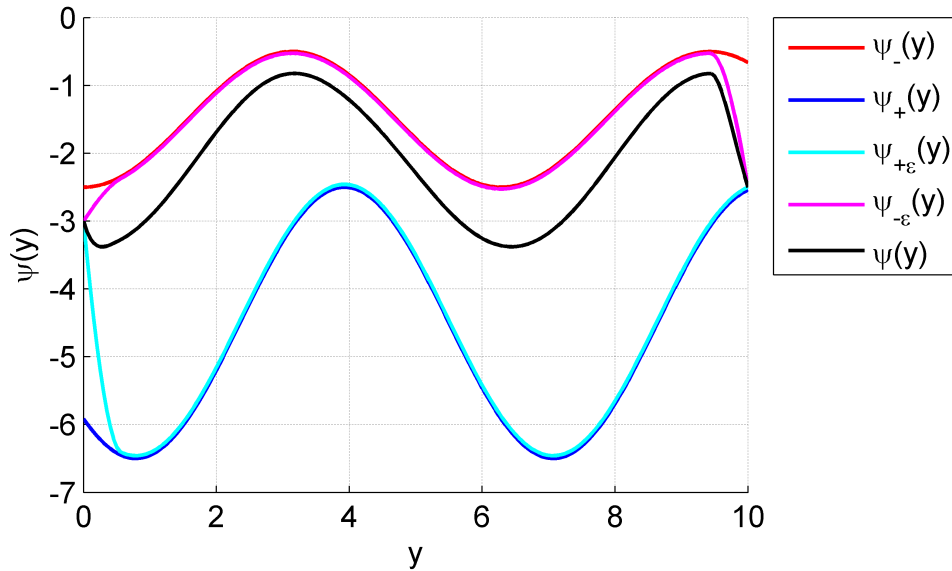


Рис. 9. Графики ограничений, их оценки и фазовая траектория в примере 3

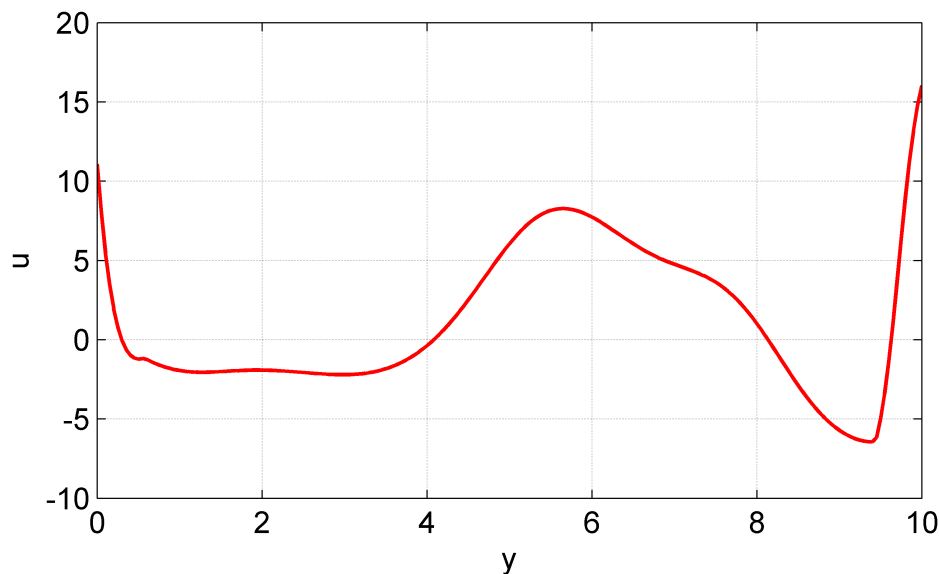


Рис. 10. Программное управление в примере 3

Найденные значения оптимизируемых параметров:

$$\varepsilon_0^+ = 2.932, \quad \varepsilon_*^+ = 2.940, \quad \varepsilon_0^- = 2.731, \quad \varepsilon_*^- = 5.815.$$

Значение критерия составило $J = 8.36$, что соответствует почти двукратному уменьшению значения критерия. Соответствующие графики представлены на рис. 11–12.

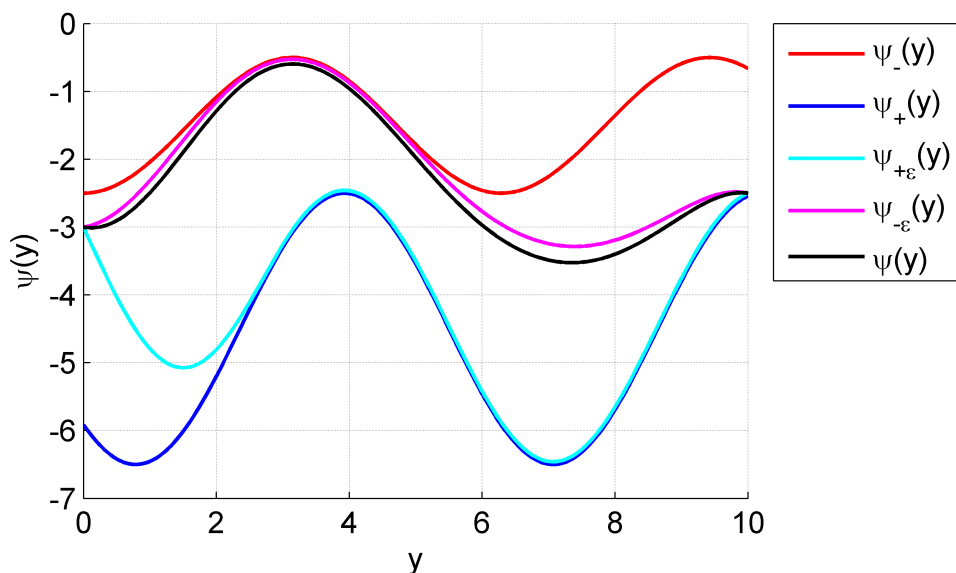


Рис. 11. Графики ограничений, их оценки и фазовая траектория в примере 3 (оптимизация)

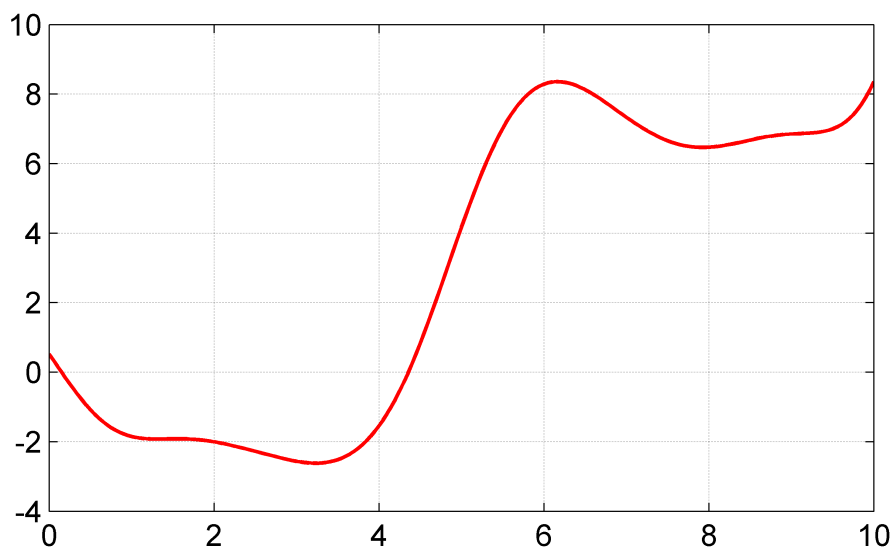


Рис. 12. Программное управление в примере 3 (оптимизация)

Данный пример иллюстрирует применимость, как уже отмечалось ранее, используемого подхода в случае, когда фазовая траектория находится в нижней полуплоскости, т.е. отвечает условию $\dot{y} = \psi(y) < 0$.

Заключение

Рассмотрена задача построения фазовой траектории при наличии ограничений. Метод основан на параметрических множествах решений интегральных уравнений, рассмотренных в [12]. Приведены расчетные формулы для вычисления программного и стабилизирующего

управлений. Предложены способы улучшения данной траектории с точки зрения тех или иных оптимизационных критериев.

Результаты численного моделирования показали, что предложенный в работе алгоритм позволяет улучшить, а в ряде случаев – значительно улучшить, оптимизируемые показатели получаемой фазовой траектории. Подобные результаты по-видимому связаны относительной грубостью полученных в [12] оценок (10)–(13), что ведет к значительному уменьшению вычисляемого согласно им множества допустимых значений Ω , по сравнению с реальным множеством допустимых значений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-01-00424 и 15-07-06484) и Минобрнауки РФ (проект 1.644.2014/К и проект 736 программы «Организация проведения научных исследований»).

Список литературы

1. Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flat systems. Mini-Course // ECC'97 European Control Conference, Brussels, July 1–4, 1997. 54 p.
2. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.
3. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1410–1420.
4. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Терминальная задача для многомерных аффинных систем // Докл. Академии наук. 2013. Т. 452, № 2. С. 144–149.
5. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1660–1668.
6. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Квазиоптимальная переориентация космического аппарата // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С. 144–153.
8. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 5. С. 156–163.
9. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон журн. 2012. № 3. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/367724.html> (дата обращения: 06.06.2015).

10. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Планирование пространственного разворота беспилотного летательного аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Энергетическое и транспортное машиностроение. Специальный выпуск. 2011. С. 151-163.
11. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Метод вариаций решения терминальных задач для двумерных систем канонического вида при наличии ограничений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 5. С. 266-280. DOI: [10.7463/0515.076623](https://doi.org/10.7463/0515.076623)
12. Крищенко А.П. Параметрические множества решений интегральных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 3–10.
13. Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming // Mathematical Programming. 2000. Vol. 89, no. 1. P. 149–185.
14. Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J. An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming // SIAM Journal on Optimization. 1999. Vol. 9, no. 4. P. 877–900.
15. Waltz R.A., Morales J.L., Nocedal J., Orban D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps // Mathematical Programming. 2006. Vol. 107, no. 3. P. 391–408.

A Terminal Control Problem for the Second Order System with Restrictions

Velishchanskiy M. A.^{1,*}, Krishchenko A. P.¹

^{*}mathmod@bmstu.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: phase trajectory, terminal control, state constraints

The paper considers a problem of the time-specified control terminal for the second order system with restrictions on the state variables.

Most developed methods for solving problems of the terminal [1, 2, 3, 4, 5] do not allow us to take into account the restrictions on the system condition. To solve such problems are widely used methods based on the concept of inverse dynamics problems [6, 7, 8, 9, 10], with one step of which being to specify a kinematic object trajectory. Some methods use an iterative [11] process of finding a desired program trajectory.

This work is based on the results presented in [12]. It is shown that the solution of the original problem is equivalent to finding the terminal phase of the trajectory that satisfies the restrictions imposed on the state variables, as well as the certain additional conditions. It is assumed that the restrictions imposed on the state variables can be represented as functions for which, in a certain class of functions, special approximations are built. A desired phase trajectory is built as a linear combination of obtained functions-approximations. Thus constructed phase trajectory is a solution to the original terminal problem. The presented formulas are true for both the upper and lower half-plane of the phase space. The paper proposes an optimization approach to a choice of the trajectory as well as the options to extend the set in which the phase trajectories are sought. It gives the numerical simulation results, a presented in [12] algorithm, and also the results of numerical solution to the optimization problem.

This approach can be used to solve the terminal problems of vector-controlled mechanical systems with restrictions on the state variables.

References

1. Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flat systems. Mini-Course. In: *ECC'97 European Control Conference*, Brussels, 1–4 July, 1997.

2. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Transformation of Affine Systems and Solving of Terminal Control Problems. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2013, no. 2, pp. 3–16. (in Russian).
3. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal control problem for affine systems. *Differentsial'nye uravneniya*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1410–1420. (English version of journal: *Differential Equations*, 2013, vol. 49, iss. 11, pp. 1378–1388. DOI: [10.1134/S0012266113110062](https://doi.org/10.1134/S0012266113110062)).
4. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal problem for multidimensional affine systems. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 452, no. 2, pp. 144–149. (English version of journal: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 608–612. DOI: [10.1134/S1064562413020026](https://doi.org/10.1134/S1064562413020026)).
5. Fetisov D.A. Solution of terminal problems for affine systems in quasicanonical form on the basis of orbital linearization. *Differentsial'nye uravneniya*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1660–1668. (English version of journal: *Differential Equations*, 2014, vol. 50, iss. 12, pp. 1664–1672. DOI: [10.1134/S0012266114120106](https://doi.org/10.1134/S0012266114120106)).
6. Krut'ko P.D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemyh sistem: nelinejnye modeli* [Inverse Problems of Dynamics of Controlled Systems. Nonlinear Models]. Moscow, Nauka Publ., 1987. (in Russian).
7. Velishchanskii M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Quasioptimal reorientation of a spacecraft. *Mehanika tverdogo tela = Rigid body mechanics*, 2002, iss. 32, pp. 144–153. (in Russian)
8. Velishchanskii M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Teorija i sistemy upravlenija*, 2003, no. 5, pp. 156–163. (English version of journal: *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, no. 5, pp. 811–818).
9. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Admissible Spatial Trajectories of the Unmanned Aerial Vehicle in the Vertical Plane *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 3. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/367724.html>, accessed: 06.06.2015. (in Russian).
10. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Planning of the Spatial Turn of the Unmanned Aerial Vehicle. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Spetsial'nyj vypusk. Energeticheskoe i transportnoe mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Special Issue. Power and Transport Engineering*, 2011, pp. 151–163. (in Russian).
11. Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Variations Method to Solve Terminal Problems for the Second Order Systems of Canonical Form with State Constraints. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 5, pp. 266–280. DOI: [10.7463/0515.076623](https://doi.org/10.7463/0515.076623) (in Russian).

12. Krishchenko A.P. Parametric Sets of Integral Equations Solutions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2014, no. 3, pp. 3–10. (in Russian)
13. Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*, 2000, vol. 89, no. 1, pp. 149–185. DOI: [10.1007/PL00011391](https://doi.org/10.1007/PL00011391)
14. Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J. An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming, *SIAM Journal on Optimization*, 1999, vol. 9, no. 4, pp. 877–900. [10.1137/S1052623497325107](https://doi.org/10.1137/S1052623497325107)
15. Waltz R.A., Morales J.L., Nocedal J., Orban D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*. 2006, vol. 107, no. 3, pp. 391–408. DOI: [10.1007/s10107-004-0560-5](https://doi.org/10.1007/s10107-004-0560-5)