Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Ссылка на статью:
// Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 6. С. 99–111.
DOI: **10.7463/0615.0778049**
Представлена в редакцию: 30.04.2015

УДК 536.21

Эффективная теплопроводность композита с шаровыми включениями

Пугачев О. В.[1,*], **Хан З. Т.**[1]

[*] opugachev@yandex.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается задача оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с включениями из материала другой теплопроводности и теплоемкости. Процесс теплопроводности моделируется при помощи диффузии, т.е. случайных блужданий «частиц тепла». Скорость диффузии этих частиц пропорциональна коэффициенту температуропроводности. При переходе из одного материала в другой, с меньшим коэффициентом теплопроводности, частицы с определенной вероятностью отражаются от поверхности раздела.

Идея метода состоит в том, чтобы выбрать удобно вычисляемый параметр, оценивающий теплопроводность, который аналитически найден для однородного материала, и статистически оценивать этот параметр для композитного материала. Проводится вычислительный эксперимент, моделирующий теплопроводность сквозь слой композита, если к одной стороне слоя приложен источник тепла, а на противоположной стороне тепло поглощается. В качестве примера рассмотрены шаровые включения, расположенные либо упорядоченно, либо хаотично. Результаты сравниваются с полученными аналитическими методами, и хорошо с ними согласуются.

Ключевые слова: композит; доверительный интервал; вычислительный эксперимент; эффективная теплопроводность; диффузионный процесс

Введение

Большинство применяемых в технике материалов, являющихся гетерогенными твердыми телами, представляют собой композиты, состоящие из матрицы и включений материалов с различными свойствами. Исследованию теплопроводности таких тел посвящено значительное количество работ [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В силу электротепловой аналогии [7, 8] математические модели, описывающие процесс теплопроводности в композите, могут быть применены для оценки электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости композита.

В работах [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] были применены новые подходы к задаче оценки эффективного коэффициента теплопроводности материала с включениями определенной формы из другого материала. Использовались методы вариационного исчисления, при этом рассматривалась упрощенная модель окрестности включения. Из современных работ по этой теме отметим также [16, 18, 19].

Возросшая мощность современных компьютеров позволяет применить принципиально другой подход к решению задачи об эффективной теплопроводности. Процесс теплопроводности можно моделировать при помощи диффузионных процессов, т. е. случайных блужданий «частиц тепла». Идея состоит в том, чтобы сформулировать удобно вычисляемую оценку температуропроводности, которая теоретически известна для однородного материала, и статистически оценивать ее для композита.

В предыдущей работе [17] рассматривалась задача оценки эффективного коэффициента теплопроводности материала с включениями из материала с нулевой теплопроводностью. Разработанный там метод нахождения эффективного коэффициента теплопроводности композитов применим для включений произвольного размера и формы. В данной работе этот метод модифицирован таким образом, чтобы рассматривать включения с различными коэффициентами теплопроводности и теплоемкости. Скорость диффузии в каждом материале пропорциональна его коэффициенту температуропроводности. При переходе же из одного материала в другой, с меньшим коэффициентом теплопроводности, частицы с определенной вероятностью отражаются от поверхности раздела.

В данной работе проводится вычислительный эксперимент, моделирующий распространение тепла сквозь слой композита, если к одной стороне слоя приложен источник тепла, а на противоположной стороне тепло поглощается. В качестве примера рассмотрены шаровые включения, расположенные либо упорядоченно, либо хаотично. Результаты сравниваются с полученными аналитическими методами, и хорошо с ними согласуются. Разработанный метод нахождения эффективного коэффициента теплопроводности композитов применим в случае включений произвольного размера и формы, а также в случае включений из нескольких материалов.

1. Решение уравнения теплопроводности при помощи винеровских процессов

Если пространство заполнено изотропным материалом с объемной теплоемкостью C (Дж/м^{3}К) и коэффициентом теплопроводности λ (Вт/м К), то уравнение теплопроводности имеет вид

$$\dot{u} = a\,\nabla^2 u,$$

где $u = u(t, x, y, z)$ — температура (отсчитываемая от некоторого выбранного нуля, не обязательно абсолютного); $a = \lambda/C$ (м^2/с) — коэффициент температуропроводности. Если известно начальное распределение температуры $u_0(x, y, z)$, то можно получить распределение температуры через время t по формуле [20]

$$u(t, x, y, z) = u_0 * p^t(x, y, z), \tag{1}$$

где символом $*$ обозначена свертка функций:

$$f * g(x, y, z) = \iiint f(x-u, y-v, z-w)\, g(u, v, w)\, du dv dw,$$

и функция

$$p^t(x,y,z) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi at}\right)^3} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4at}\right) \tag{2}$$

есть плотность нормального распределения с нулевым средним, дисперсиями $2at$ и нулевыми корреляциями.

Одномерный случайный процесс $\{w_\tau\}_{\tau\geqslant 0}$ называется стандартным винеровским [21], если $w_\tau \sim \mathcal{N}(0,\tau)$, и его приращения

$$w_{\tau_2} - w_{\tau_1}, \quad \ldots, \quad w_{\tau_k} - w_{\tau_{k-1}}, \ quad 0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k,$$

независимы. Параметр τ имеет размерность квадрата расстояния. В связи с задачей теплопроводности нам надо будет рассматривать винеровские процессы с $\tau = 2at$, т. е.

$$\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 2at).$$

Трехмерный случайный процесс $\{(\xi_t, \eta_t, \zeta_t)\}_{t\geqslant 0}$ называется винеровским, если его компоненты ξ_t, η_t, ζ_t — независимые одинаковые винеровские процессы. Плотность распределения случайной величины $\{(\xi_t, \eta_t, \zeta_t)\}$ при заданном $t > 0$ выражается формулой (2). Следовательно, решение уравнения теплопроводности по формуле (1) может быть получено с использованием винеровского процесса: пусть трехмерная случайная величина (X_0, Y_0, Z_0) имеет плотность распределения $u_0(x,y,z)$, тогда трехмерная случайная величина с координатами

$$X_t = X_0 + \xi_t, \quad Y_t = Y_0 + \eta_t, \quad Z_t = Z_0 + \zeta_t \tag{3}$$

будет иметь плотность распределения $u(t,x,y,z)$. В данной математической модели процесс теплопроводности представляется как случайное блуждание «частиц тепловой энергии», хотя сами эти «частицы» не имеют физического смысла. Эти частицы рассматриваются как специальные формальные объекты, используемые при моделировании процесса распространения тепловой энергии. А именно, частицы представляют собой выборку из распределения, плотность которого в каждый момент времени пропорциональна плотности тепловой энергии, т. е. температуре, отсчитываемой от некоторого выбранного нуля, умноженной на объемную теплоемкость.

Если мы рассматриваем ограниченное тело U, и на его поверхности нет теплообмена с окружающей средой путем теплопроводности или излучения, то к уравнению теплопроводности добавляется граничное условие $\nabla u \cdot \vec{n} = 0$, где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Начальное распределение $u_0(x,y,z)$ задается только внутри тела U. Решение уравнения теплопроводности при помощи случайных процессов также можно модифицировать для такой ситуации: траектории случайных точек (X_t, Y_t, Z_t) должны отражаться от теплоизолируемой поверхности. При компьютерном моделировании случайного блуждания это означает, что нужно запрещать частице при выборе очередного шага покидать область U.

Будем рассматривать композит (тело U), состоящее из матрицы (области U_1) — материала с объемной теплоемкостью C_1 и теплопроводностью λ_1 и включений (объединения областей U_2) материала объемной теплоемкости C_2 и теплопроводности λ_2. Тепловой контакт между ними будем считать идеальным. В каждой из областей U_1, U_2 теплопроводность моделируется при помощи винеровских процессов (коэффициенты температуропроводности $a_1 = \lambda_1/C_1$ и $a_2 = \lambda_2/C_2$ могут различаться), выход из тела U запрещен. При переходе через границу U_1 и U_2 должны быть смоделированы такие условия, чтобы установившаяся температура (плотность распределения тепловой энергии, деленная на объемную теплоемкость) была одинаковой. Эта цель достигается, если переход случайной точки из U_i в U_j в случае $\lambda_j \geqslant \lambda_i$ беспрепятственный, а в случае $\lambda_j < \lambda_i$ разрешен с вероятностью $\lambda_j/\lambda_i < 1$.

Нас будет интересовать отношение эффективной теплопроводности $\hat{\lambda}$ композита к теплопроводности λ_1 материала матрицы.

2. Теплопроводность слоя

Перед нами стоит задача: найти эффективную теплопроводность композитного материала. Для этого проводится вычислительный эксперимент, результат которого сопоставляется с теоретически известным результатом для однородного материала.

Будем рассматривать неограниченный слой

$$\{(x, y, z) :\ 0 < x < b\}.$$

В качестве критерия теплопроводности рассмотрим вероятность того, что «частица тепла», стартующая на поверхности $\{x = 0\}$, дойдет за время, меньшее T, до поверхности $\{x = b\}$. Рассчитаем эту вероятность для однородного материала с коэффициентом температуропроводности a.

Пусть $\{w_t\}_{t\geqslant 0}$ — стандартный винеровский случайный процесс. Символом $\Phi(x)$ будем обозначать функцию стандартного нормального распределения. Функция распределения случайного момента

$$T_b = \min\{t > 0\colon\ |w_t| = b\}, \quad b > 0,$$

равна [17] $\mathbf{P}\{T_b < T\} = F_1(T/b^2)$, где функция F_1 задана формулой

$$F_1(t) = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Phi\Big(-\frac{2k+1}{\sqrt{t}}\Big),$$

ее график показан на рис. 1.

Для слоя $\{(x, y, z)\colon\ 0 < x < b\}$ из однородного материала с коэффициентом температуропроводности a, в котором мы рассматриваем движение частицы до первого попадания на поверхность $\{x = b\}$, важно лишь отражение от поверхности $\{x = 0\}$. Поскольку $X_t \sim \mathcal{N}(0, 2at)$, получаем

$$P = \mathbf{P}\Big\{\min\{t\colon\ |X_t| = b\} < T\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\min\Big\{t\colon\ |w_t| = \frac{b}{\sqrt{2a}}\Big\} < T\Big\} = F_1\Big(\frac{2aT}{b^2}\Big).$$

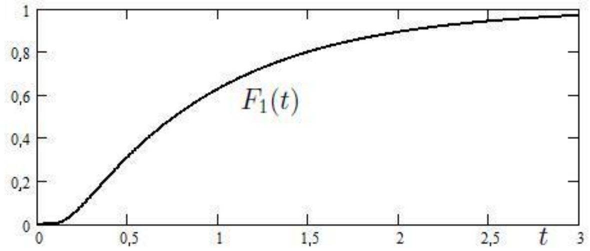

Рис. 1

Пусть теперь имеется слой $\{0 < x < b\}$ из композита, состоящего из двух материалов с коэффициентами теплопроводности λ_1, λ_2 и объемными теплоемкостями C_1 и C_2, эффективную теплопроводность $\hat{a}$ которого мы хотим оценить. Частицы будут стартовать с поверхности $\{x = 0\}$, их начальные координаты y, z распределены равномерно. Проведем n вычислительных экспериментов, и пусть в m из них частица успела за время, меньшее T, дойти до поверхности $\{x = b\}$. Физический смысл такого эксперимента — приложив к поверхности $\{x = 0\}$ равномерный источник тепла, оценить, насколько быстро оно доходит до поверхности $\{x = b\}$. Обозначим $q = m/n$. Согласно центральной предельной теореме [22], при большом n, 95%-доверительный интервал для P имеет вид

$$P_1 = q - 1{,}96\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} < P < q + 1{,}96\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}} = P_2,$$

следовательно, 95%-доверительный интервал для $\hat{a}$ имеет вид

$$\frac{b^2}{2T}F_1^{-1}(P_1) < \hat{a} < \frac{b^2}{2T}F_1^{-1}(P_2).$$

Чтобы отношение верхней и нижней оценок $\hat{a}$ было ближе к единице, нужно минимизировать величину

$$\sqrt{q(1-q)}\Big(\ln F_1^{-1}(q)\Big)'.$$

Для этого желательно подобрать такую продолжительность блуждания частицы T, чтобы получить $0{,}2 < q < 0{,}8$.

Эффективную теплопроводность найдем, умножив эффективную температуропроводность на среднюю объемную теплоемкость:

$$\hat{\lambda} = \hat{a}\Big(C_1(1-\alpha) + C_2\alpha\Big), \tag{4}$$

где α — доля объема композита, занимаемая включениями.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим шаровые включения одинакового размера, расположенные в узлах кубической решетки, и будем оценивать эффективную теплопроводность вдоль одной из осей решетки, которую примем за ось Ox. Искомый безразмерный результат будет зависеть от трех параметров: отношения $r = R/D$ радиуса теплоизолирующего шарика к шагу кубической решетки $(0 < r < 1/2)$ и отношений λ_2/λ_1 и C_2/C_1. От самих значений D, λ_1 и C_1 результат не будет зависеть, так что в вычислениях можем положить $D = 1$ м и $a_1 = \lambda_1/C_1 = 1$ м^2/с.

Смоделируем диффузионный процесс (X_t, Y_t, Z_t), описанный в параграфе 2. Толщина слоя должна быть во много раз больше расстояний между центрами включений. Мы взяли толщину слоя $b = 4D$ (рис. 2).

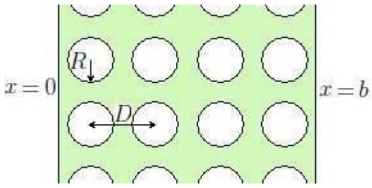

Рис. 2

Выберем время T так, чтобы для однородного материала матрицы (т. е. в случае $r = 0$) вероятность прохождения «частицы тепла» сквозь слой составляла

$$F_1(2a_1T/b^2) = F_1(1) = 0{,}629.$$

Для этого нужно взять $T = b^2/2a_1 = 8$ с.

Пусть при моделировании случайного процесса мы взяли шаг времени Δt. Среднеквадратичные приращения каждой из трех координат при одном шаге составляют $\sqrt{2a\Delta t}$. Чтобы дискретный процесс не сильно отличался от непрерывного, нужно $\sqrt{2a\Delta t} \ll R$ (мы будем рассматривать $R \geqslant 0{,}2D$). Поскольку завышенные требования к малости шага Δt приведут к чрезмерному объему вычислений, не будем действовать наугад, а будем повторять вычислительный эксперимент, постепенно уменьшая Δt, начиная с 10^{-3} : с. Таким образом, в начальном эксперименте каждая частица будет совершать до 8000 шагов, отражаясь от поверхности $\{x = 0\}$ и меняя свое поведение при пересечении поверхностей шариков.

Будем поочередно рассматривать включения четырех материалов со следующими коэффициентами теплопроводности и объемной теплоемкости:

а) $\lambda_2 = 3\lambda_1$, $C_2 = C_1$;

б) $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}\lambda_1$, $C_2 = C_1$;

в) $\lambda_2 = \lambda_1$, $C_2 = 3C_1$;

г) $\lambda_2 = \lambda_1$, $C_2 = \dfrac{1}{3}C_1$.

При сериях из $n = 4300$ блуждающих частиц с шагом времени $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с нами были получены результаты, представленные в табл. 1–4. Здесь для вероятности P того, что «частица» пройдет сквозь слой за время менее T, дан 95%-доверительный интервал; для отношения $\hat{a}/a$ — соответствующий ему доверительный интервал, полученный применением функции F_1^{-1}; наконец, отношение $\hat{\lambda}/\lambda$ получено по формуле (4), в случае включений материалов а) и б) оно совпадает с отношением $\hat{a}/a$.

Таблица 1

r	P	$\hat{a}/a = \hat{\lambda}/\lambda$
0,2	0,641 . . . 0,670	1,03 . . . 1,09
0,3	0,671 . . . 0,699	1,10 . . . 1,17
0,4	0,742 . . . 0,767	1,29 . . . 1,37

Таблица 2

r	P	$\hat{a}/a = \hat{\lambda}/\lambda$
0,2	0,607 . . . 0,636	0,95 . . . 1,01
0,3	0,568 . . . 0,597	0,88 . . . 0,94
0,4	0,509 . . . 0,538	0,77 . . . 0,82

Таблица 3

r	P	$\hat{a}/a$	$\hat{\lambda}/\lambda$
0,2	0,589 . . . 0,619	0,92 . . . 0,98	0,98 . . . 1,04
0,3	0,531 . . . 0,560	0,81 . . . 0,86	0,99 . . . 1,06
0,4	0,427 . . . 0,457	0,65 . . . 0,69	0,99 . . . 1,06

Таблица 4

r	P	$\hat{a}/a$	$\hat{\lambda}/\lambda$
0,2	0,624 . . . 0,653	0,99 . . . 1,05	0,97 . . . 1,03
0,3	0,653 . . . 0,681	1,05 . . . 1,12	0,98 . . . 1,04
0,4	0,714 . . . 0,741	1,21 . . . 1,29	0,99 . . . 1,06

Вычислительные эксперименты с включениями материалов в) и г), имеющих тот же коэффициент теплопроводности, что и матрица, хотя и другую объемную теплоемкость, показали, что эффективный коэффициент теплопроводности композита практически не отличается от коэффициента теплопроводности матрицы.

Теперь рассмотрим шаровые включения радиусом $R < 0{,}5D$, расположенные с плотностью $1/D^3$ хаотически (рис. 3).

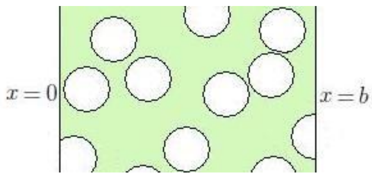

Рис. 3

Все частицы будут стартовать из начала координат. Для каждой частицы будем заново задавать случайное расположение шариков (не допуская наложения одного на другой) во фрагменте слоя

$$\{0 < x < 4,\ |y| < 3,\ |z| < 3\}. \tag{5}$$

Чтобы не терять частицы, уходящие через боковые грани $\{y = \pm 3\}$ и $\{z = \pm 3\}$, будем считать расположение шариков периодичным со сдвигом на 6 по осям y и z.

Результаты вычислительных экспериментов для такой модели представлены в табл. 5, 6.

Таблица 5

r	P	$\hat{a}/a = \hat{\lambda}/\lambda$
0,2	0,632 . . . 0,661	1,01 . . . 1,07
0,3	0,662 . . . 0,690	1,07 . . . 1,14
0,4	0,752 . . . 0,777	1,33 . . . 1,41

Таблица 6

r	P	$\hat{a}/a = \hat{\lambda}/\lambda$
0,2	0,614 . . . 0,644	0,97 . . . 1,03
0,3	0,578 . . . 0,607	0,90 . . . 0,95
0,4	0,518 . . . 0,548	0,79 . . . 0,84

Сравним полученные нами результаты с результатами работы [10], где была выведена формула

$$\frac{\hat{\lambda}}{\lambda_1} = \frac{1 - 2b\alpha}{1 + b\alpha}, \quad b = \frac{1 - \lambda_2/\lambda_1}{2 + \lambda_2/\lambda_1}, \tag{6}$$

(здесь через α обозначена объемная концентрация включений). В табл. 7, 8 величины $\hat{\lambda}/\lambda$, представленные в табл. 1 для упорядоченных и в 2 для хаотических включений, сопоставлены с найденными по формуле (6).

Т а б л и ц а 7

r	упоряд.	хаотич.	(6)
0,2	1,03 . . . 1,09	1,01 . . . 1,07	1,04
0,3	1,10 . . . 1,17	1,07 . . . 1,14	1,14
0,4	1,29 . . . 1,37	1,33 . . . 1,41	1,36

Т а б л и ц а 8

r	упоряд.	хаотич.	(6)
0,2	0,95 . . . 1,01	0,97 . . . 1,03	0,97
0,3	0,88 . . . 0,94	0,90 . . . 0,95	0,91
0,4	0,77 . . . 0,82	0,79 . . . 0,84	0,79

Мы видим, что разность между полученными нами эффективными коэффициентами теплопроводности и рассчитанными по формуле (6) не превышает статистическую погрешность во всех рассмотренных случаях.

Заключение

Разработанный нами метод позволяет находить эффективные коэффициенты теплопроводности для композитов с включениями произвольного размера и формы. В случае шаровых включений результаты согласуются с полученными другими методами. Данный метод можно применить также в случае включений из нескольких материалов. Получающиеся результаты достоверны, и их точность ограничивается лишь вычислительной мощностью компьютера.

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки Российской федерации, номер темы 1.2640.2014.

Список литературы

1. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
2. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций: пер. с франц. М.: Мир, 1968. 464 с.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
5. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наукова думка, 1984. 111 с.
6. Исаев С.И., Кожинов И.А., Кофанов В.И. и др. Теория тепломассообмена / под ред. Леонтьева А.И. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 684 с.
7. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 496 с.

8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
9. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита, модифицированного фуллеренами // Композиты и наноструктуры. 2012. №4. С. 15–22.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. №10. С. 470–474.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2013. №5. С. 75–81.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. №3. С. 76–85.
13. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. №7. С. 299–318. DOI: 10.7463/0713.0569319
14. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования. Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. №9. С. 435–444. DOI: 10.7463/0913.0601512
15. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита при непрерывном изменении теплопроводности промежуточного слоя между шаровыми включениями и матрицей // Инженерный журнал: наука и инноваци. 2012. №4. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/145.html (дата обращения 01.05.2015).
16. Янковский А.П. Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3, №11. С. 500–516.
17. Пугачев О.В., Хан З.Т. Теплопроводность композита с нетеплопроводными шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №5. С. 205–217. DOI: 10.7463/0515.0776224
18. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40, no. 3. P. 359–362. DOI: 10.1016/S0008-6223(01)00112-9
19. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance // Journal of Applied Physics. 1997. Vol. 81,

no. 10. P. 6692–6699. DOI: 10.1063/1.365209

20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.

21. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 320 с.

22. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Бочаров Б.П., Козлов Н.Е. Теория вероятностей / под ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П.. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Т. 16.).

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2015, no. 6, pp. 99–111.
DOI: **10.7463/0615.0778049**
Received: 30.04.2015

Effective Heat Conductivity of Composite Materials with Ball Inclusions

Pugachev O. V.[1,*], Han Z. T.[1]
[*]opugachev@yandex.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: composite, confidence interval, computer simulation, effective thermal conductivity, diffusion process

The process of heat conduction can be modeled via random motion of particles of heat energy, although these particles do not physically exist: they are considered as special formal objects. The speed of diffusion of heat particles in each material is proportional to its temperature conductivity coefficient. This mathematical model underlying the method of obtaining the effective heat conductivity coefficient of a composite material described in the previous paper “Heat conductivity of composite materials with included balls of zero heat conductivity” now is being modified in order to deal with materials with various nonzero heat conductivity and capacity coefficients. Namely, when a particle passes from one material to another one, having smaller heat conductivity, it is reflected from the frontier with a certain probability.

As a criterion of heat conductivity, we consider the probability that a heat particle starting on one surface of a composite layer, goes to its other surface in a time shorter than T. For a homogeneous material, this probability is calculated theoretically.

For a layer of a composite, we perform a multiple computational experiment modeling heat conduction, and for the desired probability we find the confidence interval, wherefrom we obtain the confidence interval for the effective temperature conductivity coefficient, and, finally, calculate the effective heat conductivity coefficient.

We have considered inclusions of materials with heat conductivity and volume heat capacity coefficients differing from those of the matrix in 3 times up or down. Ball inclusions of equal size were situated in a cubic order or chaotically. The ratio of the ball radius to the size of cubes was 0.2, 0.3, or 0.4.

In series of 4300 randomly moving particles, in all cases considered, the difference between the effective heat conductivity coefficients and those calculated by other methods does not exceed a statistical error.

The developed method makes it possible to obtain effective heat conductivity coefficients for composites with inclusions of any size and shape; it can be applied also in a case of inclusions from several materials. The results obtained are reliable and only the computer capability restricts their exactness.

References

1. Dul'nev G.N., Zarichniak Iu.P. *Teploprovodnost' smesei i kompozitsionnykh materialov* [Heat conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiia Publ., 1974. 264 p. (in Russian).
2. Missenard A. *Conductivite thermique des solides, liquides, gaz et de leurs melanges*. Paris, Editions Eyrolles, 1965. (In French). (Russ. ed.: Missenard A. *Teploprovodnost' tverdykh tel, zhidkostey, gazov i ikh kompozitsiy*. Moscow, Mir Publ., 1968. 464 p.).
3. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micro-heterogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p. (in Russian).
4. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniia zadach teploprovodnosti* [Engineering methods of solving problems of heat conductivity]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p. (in Russian).
5. Khoroshun L.P., Soltanov N.S. *Termouprugost' dvukhkomponentnykh smesei* [Thermo-elasticity of two-component mixtures]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 109 p. (in Russian).
6. Isaev S.I., Kozhinov I.A., Kofanov V.I., Leont'ev A.I., et al. *Teoriya teplomassoobmena* [Heatmass exchange theory]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 684 p. (in Russian).
7. Zarubin V.S. *Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike* [Mathematical modeling in engineering]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 496 p. (in Russian).
8. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
9. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Estimation of effective heat conductivity coefficient of fullerene-modified composite material. *Kompozity i nanostruktury = Composites and Nanostructures*, 2012, no. 4, pp. 15–22. (in Russian).
10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. The Effective Coefficients of Thermal Conductivity of Composites with Spherical Inclusions. *Teplovye protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*, 2012, no. 10, pp. 470–474. (in Russian).
11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Thermal Conductivity of Composite Reinforced with Fibers. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie = Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2013, no. 5, pp. 75–81. (in Russian).

12. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effective Coefficients of Thermal Conductivity of a Composite with Ellipsoidal Inclusions. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2012, no. 3, pp. 76–85. (in Russian).
13. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Comparative analysis of estimations of heat conduction of a composite with ball inclusions. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 7, pp. 299–318. DOI: 10.7463/0713.0569319 (in Russian).
14. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Evaluation of effective thermal conductivity of composites with ball inclusions by the method of self-consistency. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 9, pp. 435–444. DOI: 10.7463/0913.0601512 (in Russian).
15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Effective Thermal Conductivity Coefficient of the Composite with Continuous Change in Heat Conduction of the Intermediate Layer between Spherical Inclusions and Matrix. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, no. 4. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/145.html, accessed 01.05.2015. (in Russian).
16. Yankovskii A.P. Numerically-Analytical Modelling of Processes of Thermal Conductivity in Spatially Reinforced Composites at Intensive Thermal Action. *Teplovye protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*, 2011, no. 11, pp. 500–516. (in Russian).
17. Pugachev O.V., Han Z.T. Heat Conductivity of Composite Materials with Included Balls of Zero Heat Conductivity. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 5, pp. 205–217. DOI: 10.7463/0515.0776224 (in Russian).
18. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, no. 3, pp. 359–362. DOI: 10.1016/S0008-6223(01)00112-9
19. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance. *Journal of Applied Physics*, 1997, vol. 81, no. 10, pp. 6692–6699. DOI: 10.1063/1.365209
20. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, MSU Publ., 1999. 799 p. (in Russian).
21. Venttsel' A.D. *Kurs teorii sluchainykh protsessov* [Course of the theory of random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 320 p. (in Russian).
22. Pechinkin A.V., Teskin O.I., Tsvetkova G.M., Bocharov P.P., Kozlov N.E. *Teoriia veroiatnostei* [Probability theory]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 456 p. (Ser. *Matematika v tekhnicheskom universitete* [Mathematics in Technical University], vol. 16). (in Russian) .