

УДК 539.3; 539.214

Определение предельного крутящего момента для стержня многосвязного поперечного сечения

Данилов В. Л.¹, Абросимова Е. А.^{1,*}

[*kati21193@icloud.com](mailto:kati21193@icloud.com)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Расчет несущей способности основан на модели идеальной пластичности материала. Хорошо исследована несущая способность стержней при кручении произвольного односвязного поперечного сечения. Многосвязные сечения исследованы в меньшей степени. Данная работа посвящена разработке метода расчета предельного состояния стержня многосвязного поперечного сечения при кручении. Во-первых, рассмотрена задача кручения цилиндрического стержня с нецентральной дыркой. Во-вторых, изучена задача кручения цилиндрического стержня с двумя дырками, в котором центры всех трех окружностей, включая внешний контур, не лежат на одной прямой. В итоге для стержня с одной дыркой были получены зависимости момента от отношения радиусов и от смещения дырки, а также выведена формула для вычисления предельного крутящего момента. Для стержня с двумя дырками рассчитан момент двумя методами: аналитическим и при помощи 3D – моделирования.

Ключевые слова: многосвязное сечение, кручение стержня, функция напряжений, предельный крутящий момент, идеальная пластичность

Введение

Расчет несущей способности является одним из основных этапов при проектировании конструкций. Однако несущая способность стержней многосвязного поперечного сечения при кручении исследована в меньшей степени по сравнению с односвязными сечениями. Это может повлиять на надежность проектируемых конструкций, поэтому задача определения предельного крутящего момента для стержневых конструкций произвольного многосвязного сечения является актуальной.

Постановка задачи

В рамках настоящей работы автором была поставлена задача разработки метода расчета предельного крутящего момента стержня многосвязного поперечного сечения.

1. Общий случай расчета

Рассмотрим цилиндрический стержень из идеального жесткопластического материала с пределом текучести при чистом сдвиге τ_T , нагруженный по торцам постоянным крутящим моментом M . Систему координат x, y, z свяжем с плоскостью поперечного сечения, направив ось z вдоль оси стержня. Напряженное состояние характеризуется следующими компонентами:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{zx} \neq 0; \quad \tau_{zy} \neq 0 \quad (2)$$

Когда весь стержень находится в пластическом состоянии, поперечные сечения поворачиваются вокруг оси z , и компоненты смещения выражаются зависимостями [1]:

$$U_x = -\theta zy; \quad U_y = \theta zx; \quad U_z = w(x, y), \quad (3)$$

где θ – относительный угол закручивания, $w(x, y)$ – функция депланации сечения.

Компоненты напряжения τ_{zx} и τ_{zy} должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

и условию пластичности:

$$\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_T^2 \quad (5)$$

при граничных условиях на боковых поверхностях и торцах [3]:

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \quad (6)$$

$$\iint_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA = M, \quad (7)$$

где n_x, n_y – направляющие косинусы нормали к контуру поперечного сечения; A – площадь сечения.

1.1. Функция напряжений

Уравнение равновесия (4) и условие пластичности (5) удовлетворяются, если ввести следующие две функции напряжений $\Phi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в виде [2]:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\tau_T \sin \varphi; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \tau_T \cos \varphi, \quad (8)$$

Для определения функции $\varphi(x, y)$ подставим выражения (8) в уравнение (4):

$$\cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Уравнению (9) соответствуют дифференциальные уравнения характеристик:

$$\frac{\partial x}{\cos \varphi} = \frac{\partial y}{\sin \varphi} = \frac{\partial \varphi}{0}, \quad (10)$$

проинтегрировав которые, находим:

$$y - x \operatorname{tg} \varphi = f(\varphi); \quad \varphi = \operatorname{const} \quad (11)$$

Подставив выражение (8) в граничное условие (6) и обозначив $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \sin \alpha$, где α – угол между нормалью к контуру сечения и осью x , устанавливаем, что

$$\sin \varphi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \alpha, \quad (12)$$

т.е. с точностью до слагаемого, кратного π , имеем $\alpha = \varphi$. Таким образом, характеристики есть прямые линии, нормальные к контуру. Вектор полного касательного напряжения всюду постоянен по величине и направлен перпендикулярно характеристикам. Если ds элемент гладкой дуги контура, а dn – элемент нормали к нему, то

$$n_x = \frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}; \quad n_y = \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds} \quad (13)$$

и условие (6) для функции Φ дает:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0, \quad (14)$$

т.е. функция напряжений $\Phi(x, y)$ вдоль контура постоянна. Обозначим её значения на контурах $\Phi_j = \tau_T C_j$, где $j = 1, 2, \dots, k$ – номер контура.

Изменение функции Φ вдоль характеристики с учетом выражений (8), (12), (13) следует зависимости:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} = -\tau_T \quad (15)$$

Проинтегрировав (15), находим вид функции напряжений:

$$\Phi = -\tau_T n + \tau_T C_j \quad (16)$$

Здесь n – длина нормали, отсчитываемая от контура с номером j внутрь сечения.

В соответствии с выражением (16) геометрической интерпретацией функции Φ является поверхность постоянного ската [3]. Для определения контурных значений функции напряжений Φ_j принимаем для внешнего контура $C_1 = 0$, а остальные значения C_j найдем, построив поле нормалей последовательно от внешнего до внутренних и затем от ближайшего внутреннего до остальных и т.д. Одновременно перенумеровываем контуры в порядке возрастания C_j (см. рис.1). Требования непрерывности и единственности функции напряжений приводят к следующему выражению:

$$C_j = \inf(C_p + n_{pq}), \quad p = 1, 2, \dots, j-1; \quad q = j, \dots, k. \quad (17)$$

Здесь n_{pq} – кратчайшее расстояние до контура с номером q по нормали, проведенной от контура с номером p .

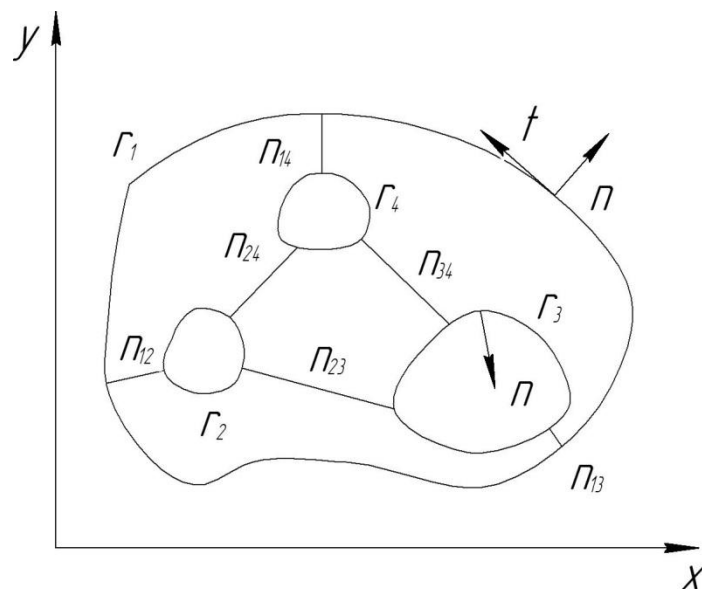


Рис. 1. Поперечное сечение с несколькими контурами

Решение (16) может привести к неоднозначности в точках сечения, в которых пересекаются нормали, идущие от разных контуров или от разных участков одного и того же контура, так как тогда направление вектора полного касательного напряжения становится неопределенным. Эту неоднозначность можно устранить введением линии разрыва напряжений, не нарушающего условия равновесия. Линии разрыва определяются следующими соотношениями [4]:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} [\varphi_p(x, y) + \varphi_q(x, y)] \quad (18)$$

$$-n_p(x, y) + C_p = -n_q(x, y) + C_q \quad (19)$$

Здесь индексы p и q обозначают решения (11) и (16), примыкающие к контурам p и q соответственно.

1.2. Предельный крутящий момент

Выражение для момента (7) с учетом (8) и (16) преобразуется к виду:

$$\frac{M}{2\tau_T} = -\sum_{i=1}^m \int_{F_i} n dF + \sum_{i=1}^m C_i F_i + \sum_{j=1}^k C_j S_j \quad (20)$$

где m – число областей регулярности, F_i – площадь области регулярности, S_j – площадь, ограниченная контуром с номером j , $\tau_T C_j$ – значение функции напряжений на контуре, являющемся частью границы области регулярности.

2. Двухсвязное круговое несимметричное сечение

Рассмотрим применение формулы (20) к расчету сечения в виде эксцентричного кольца (см. рис.2) [5].

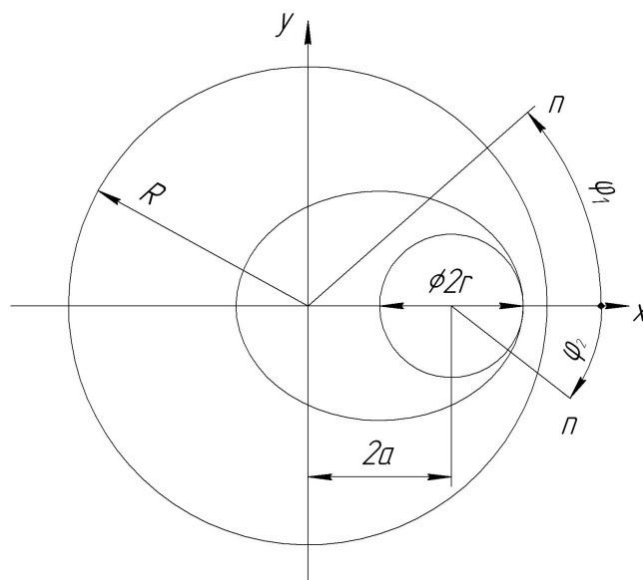


Рис. 2. Поперечное сечение в виде эксцентричного кольца с линией разрыва

В этом случае линией разрыва напряжений является эллипс, фокусы которого совпадают с центрами окружностей, а полуоси равны $a+r$ и $\sqrt{2ar+r^2}$. Формула (20) принимает вид:

$$\frac{M}{2\tau_T} = -\sum_{i=1}^2 \int_{F_i} n dF + C_1(F_1 + S_1) + C_2(F_2 + S_2) \quad (21)$$

Далее $C_1 = 0$; $C_2 = R - 2a - r$;

$$F_{\text{эллипса}} = F_2 + S_2 = \pi(a+r)\sqrt{2ar+r^2} \quad (22)$$

Уравнение эллипса в полярных координатах с началом в фокусе:

$$\rho_3 = \frac{b^2 - a^2}{b \pm a \cos \varphi}; \quad b = r + a \quad (23)$$

Величина момента определяется в результате вычисления следующих интегралов:

$$\frac{M}{2\tau_T} = -\int_0^{2\pi} \int_R^{\rho_3} (R-\rho) \rho d\rho d\varphi_1 - \int_0^{2\pi} \int_r^{\rho_3} (\rho-r) \rho d\rho d\varphi_2 + C_2 F_{\text{эллипса}} \quad (24)$$

При вычислении двойного интеграла по нормали на внешнем контуре сечения угол φ отсчитывается против часовой стрелки, на внутреннем – по часовой. В соответствии с этим $d\varphi_2 = -d\varphi_1$.

Вычислив интегралы, получаем:

$$\frac{M}{2\tau_T} = \frac{1}{3} \pi (R^3 + r^3 + 2r(r+2a)\sqrt{r(r+2a)}) \quad (25)$$

Для симметричного кольца ($a = 0$) и сплошного круга ($r = 0$) из (25) следуют хорошо известные результаты для этих частных простейших сечений [6].

В качестве примера представим зависимость предельного крутящего момента $\frac{M}{2\tau_T R^3}$ от эксцентриситета $\frac{a}{R}$ при отношении радиусов $r = 0.3R$ (см. рис. 3а) и зависимость от отношения радиусов $\frac{r}{R}$ при $a = 0.3R$ (см. рис. 3б) [7].

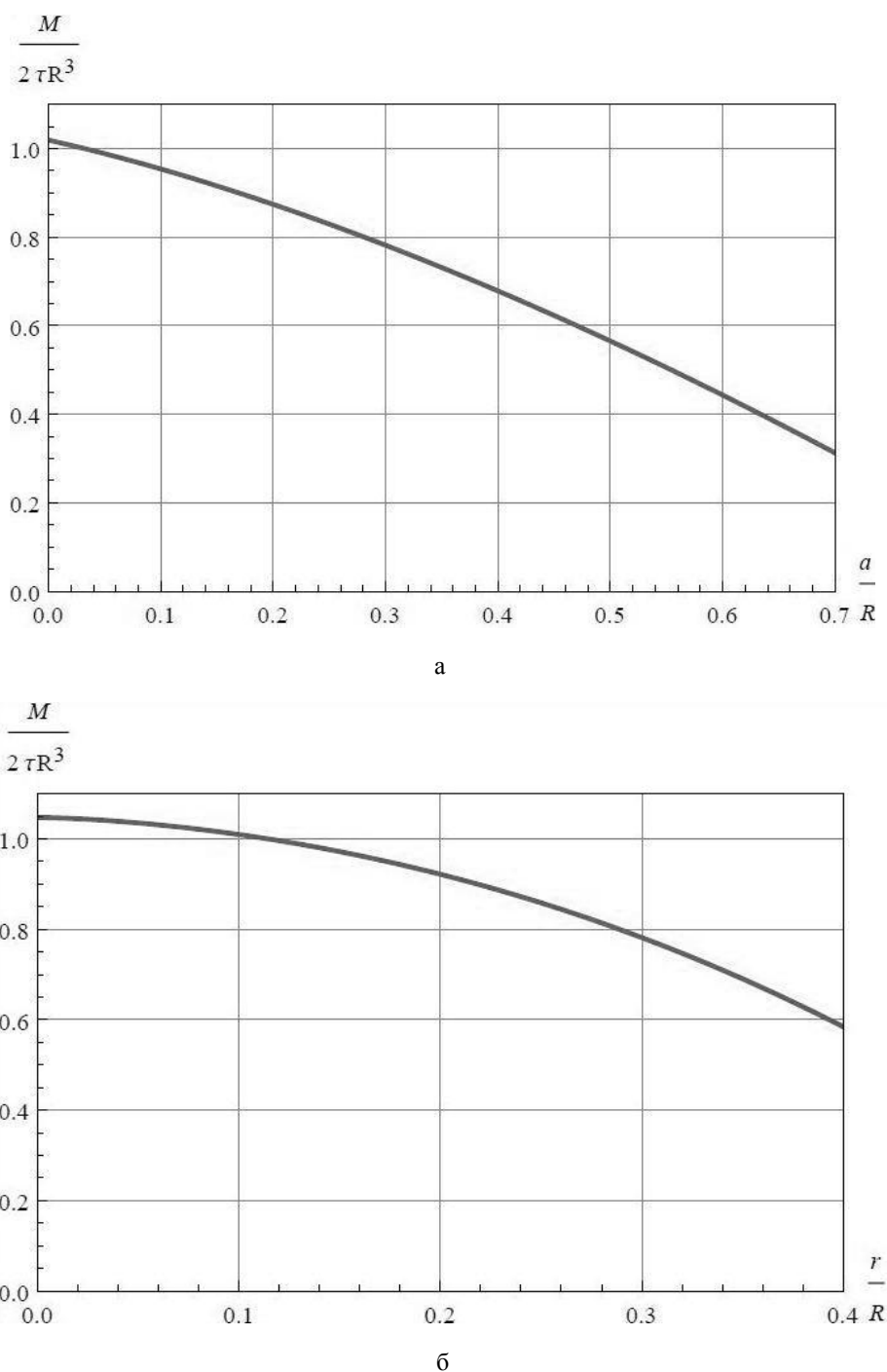


Рис. 3. Зависимость предельного крутящего момента: а – от эксцентриситета; б – от отношения радиусов

Из рис. 3 следует, что величина смещения оказывает больше влияния на значение предельного крутящего момента, чем диаметр отверстия.

3. Трехсвязное сечение

От простого случая перейдем к более сложному случаю многосвязного поперечного сечения. Рассмотрим стержень с двумя отверстиями, у которого центры всех трех окружностей, включая внешний контур, не лежат на одной прямой. В этом случае надо рассмотреть две линии разрыва: эллипс – это линия разрыва между внешним контуром и каждым из внутренних, а гипербола – линия разрыва между двумя внутренними окружностями (см. рис. 4). Фокусы эллипсов совпадают с соответственным центрами окружностей, а фокусом гиперболы является середина линии, соединяющей центры внутренних окружностей. Особенность этого случая заключается в выборе системы координат.

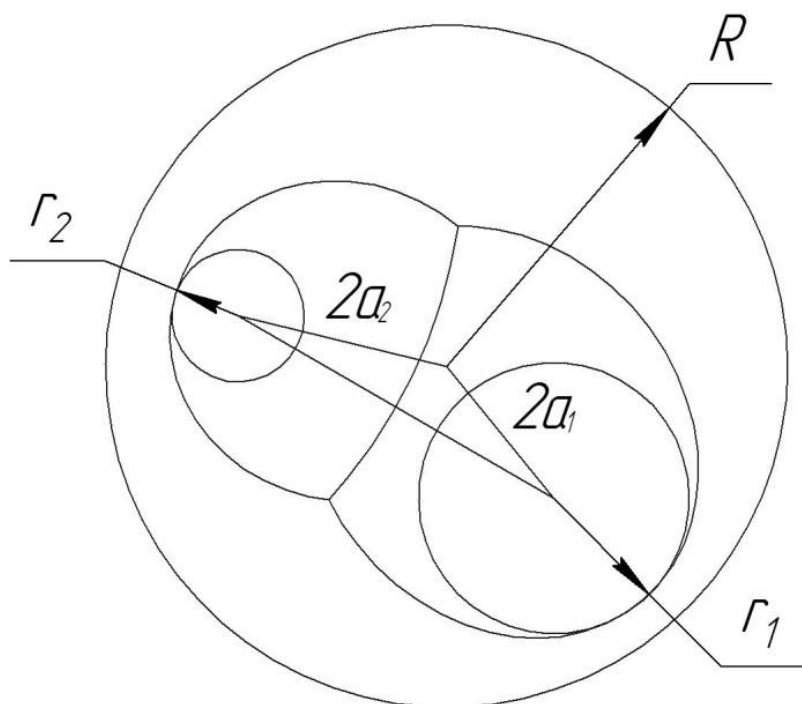


Рис. 4. Поперечное сечение с линиями разрыва

Удобно рассмотреть в отдельности каждую область регулярности, введя две системы координат для каждой пары окружностей, центры которых принадлежат одной оси. Для расчета требуется вычислить интегралы, аналогичные (24), по областям регулярности, представленным на рис. 5.

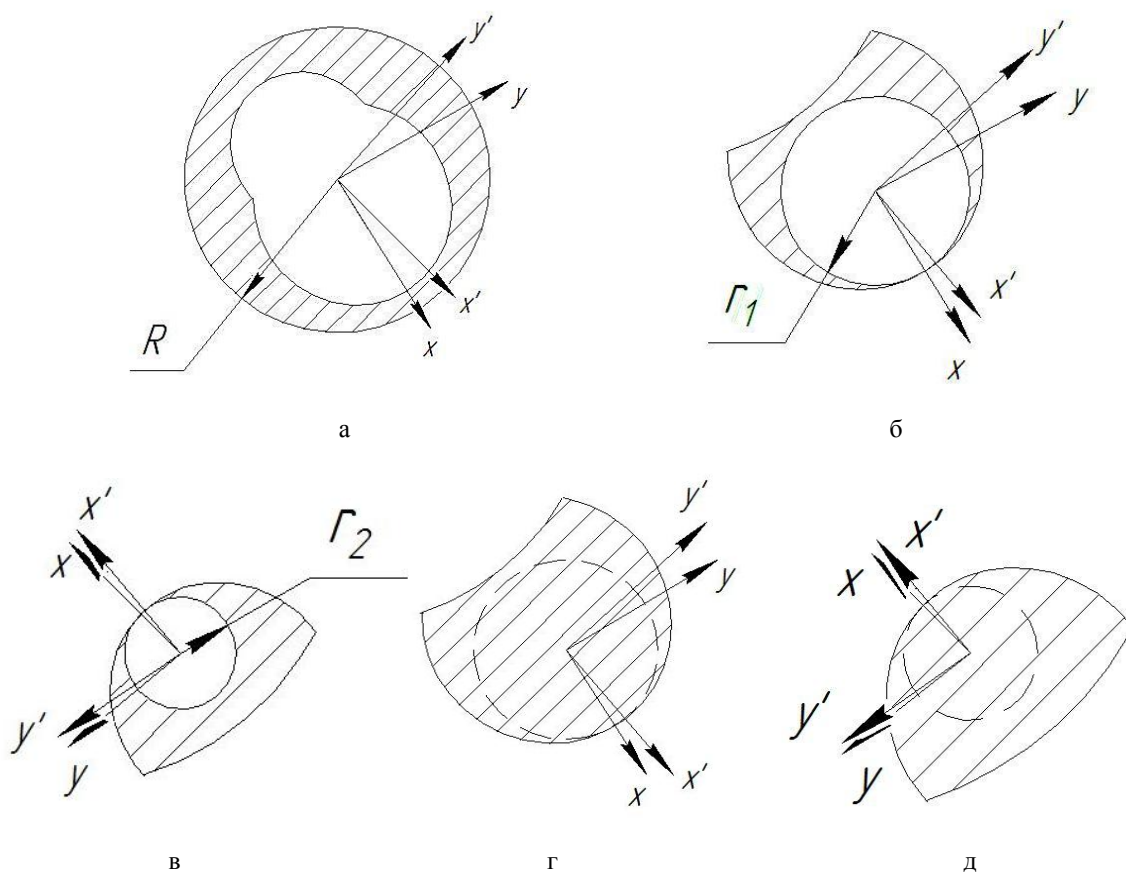


Рис. 5. Области регулярности: а – между внешним контуром и линиями разрыва; б, в – между внутренним контуром и линиями разрыва; г, д – внутри линий разрыва

Расчет существенно упрощается в случае, когда центры всех трех окружностей, включая внешний контур, лежат на одной прямой. В этом случае отсутствует необходимость в двойной системе координат.

В качестве примера использования разработанного метода рассчитан предельный момент для сечения со следующими размерами:

$$R = 25 \text{ мм}, r_1 = 12 \text{ мм}, r_2 = 6 \text{ мм}, 2a_1 = 9.434 \text{ мм}, 2a_2 = 14.142 \text{ мм}$$

$$M_{\text{пр}} = 17332.04 \tau_T \text{ мм}^3$$

Для сравнения был проведен расчет в пакете 3D–моделирования Компас–3D [8]:

$$M_{\text{пр}} = 17303 \tau_T \text{ мм}^3$$

Различие результатов составило 0.17%.

Представленная методика определения предельного пластического момента кручения также позволяет исследовать ползучесть стержней многосвязного поперечного сечения [9].

Заключение

1. Разработан аналитический метод расчета предельного крутящего момента для стержней многосвязного поперечного сечения на примере двухсвязного и трехсвязного сечений.

2. Выведена формула предельного крутящего момента для двухсвязного поперечного сечения.

3. Наглядно продемонстрирована зависимость предельного крутящего момента от смещения отверстия и от отношения радиусов контуров.

4. При помощи 3D – моделирования произведено сравнение с аналитическим расчетом предельного момента для сечения с определенными размерами, погрешность составила 0.17%.

Список литературы

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
2. Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. ст. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.
3. Calladine C.R. Plasticity for engineers: theory and applications. United Kingdom: Woodhead Publ., 2010. 325 p.
4. Данилов В.Л. Пластическое кручение стержней многосвязного поперечного сечения // Расчеты на прочность: сб. ст. Вып. 27. М.: Машиностроение, 1986. С. 147-154.
5. Козлова Л.С. Предельное состояние цилиндрических и призматических стержней с отверстием при кручении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2010. № 2 (66). С. 69-74.
6. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 448 с.
7. Magrab E.B. An Engineer's Guide to Mathematica. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2014. 452 p.
8. Большаков В.П. Твердотельное моделирование деталей в CAD – системах: AutoCAD, КОМПАС – 3D, SolidWorks, Inventor, Creo. СПб.: Питер, 2014. 304 с.
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 с.

Determination of Ultimate Torque for Multiply Connected Cross Section Rod

V.L. Danilov¹, E.A. Abrosimova^{1,*}

[*kati21193@icloud.com](mailto:kati21193@icloud.com)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: multiply connected cross section, rod torsion, stress function, ultimate torque, ideal plasticity

The aim of this work is to determine load-carrying capability of the multiply cross-section rod. This calculation is based on the model of the ideal plasticity of the material, so that the desired ultimate torque is a torque at which the entire cross section goes into a plastic state.

The article discusses the cylindrical multiply cross-section rod. To satisfy the equilibrium equation and the condition of plasticity simultaneously, two stress function Φ and φ are introduced. By mathematical transformations it has been proved that Φ is constant along the path, and a formula to find its values on the contours has been obtained. The paper also presents the rationale of the line of stress discontinuity and obtained relationships, which allow us to derive the equations break lines for simple interaction of neighboring circuits, such as two lines, straight lines and circles, circles and a different sign of the curvature.

After substitution into the boundary condition at the end of the stress function Φ and mathematical transformations a formula is obtained to determine the ultimate torque for the multiply cross-section rod.

Using the doubly connected cross-section and three-connected cross-section rods as an example the application of the formula of ultimate torque is studied.

For doubly connected cross-section rod, the paper offers a formula of the torque versus the radius of the rod, the aperture radius and the distance between their centers. It also clearly demonstrates the torque dependence both on the ratio of the radii and on the displacement of hole. It is shown that the value of the torque is more influenced by the displacement of hole, rather than by the ratio of the radii.

For the three-connected cross-section rod the paper shows the integration feature that consists in selection of a coordinate system. As an example, the ultimate torque is found by two methods: analytical one and 3D modeling. The method of 3D modeling is based on the Nadai's sand analogy, complements and develops it.

The presented technique not only enables us to make calculations of the load-carrying capacity based on the ideal plasticity, but also allows us to investigate complex multiply cross-section rods in the creep.

References

1. Ishlinskiy A.Yu, Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, PHISMATLIT Publ., 2001, 704 p. (in Russian).
2. Bykovcev G.I. *Izbrannyye problemnyye voprosy mehaniki deformiruemykh sred: sbornik statey* [Selected problem questions of mechanics of deformed mediums: collection of articles]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2002. 566 p. (in Russian).
3. Calladine C.R. *Plasticity for engineers: theory and applications*. United Kingdom, Woodhead Publ., 2010. 325 p.
4. Danilov V.L. Plastic torsion of multiply connected cross section rods. *Raschety na prochnost': sb. st. Vyp. 27* [Strength calculations: collected articles. Iss. 27]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1986, pp. 147-154. (in Russian).
5. Kozlova L.S. Ultimate state of torsion cylindrical and prismatic rods with hole. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva = I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin*, 2010, no. 2 (66), pp. 69-74. (in Russian).
6. Ivlev D.D. *Mehanika plasticheskikh sred* [Mechanics of plastic mediums]. Moscow, PHISMATLIT Publ., 2001. 448 p. (in Russian).
7. Magrab E.B. *An Engineer's Guide to Mathematics*. United Kingdom, John Wiley & Sons, 2014. 452 p.
8. Bolshakov V.P. *Tverdotelnoye modelirovaniye detaley v CAD – sistemah: AutoCAD, KOMPAS – 3D, SolidWorks, Inventor, Creo* [Solid modeling of details in CAD – systems: AutoCAD, KOMPAS – 3D, SolidWorks, Inventor, Creo]. St. Petersburg, Piter Publ., 2014. 304 p. (in Russian).
9. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruktsiy* [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 2014. 752 p. (in Russian).