Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 06. С. 267–287.

DOI: **10.7463/0615.0780334**

Представлена в редакцию: 14.05.2015
Исправлена: 28.05.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 532.5-1

Методы выбора весовых коэффициентов локальных критериев

Постников В. М.[1], Спиридонов С. Б.[1,*]

*spirid@bmstu.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассмотрены методы индивидуального подхода к расчету весовых коэффициентов локальных критериев, входящих в состав интегральных критериев, используемых для сравнительной оценки альтернативных вариантов, их ранжирования, и выбора наилучшего варианта. Исследованы подходы к расчету весовых коэффициентов локальных критериев, включающие методы парного сравнения критериев, с учетом относительной важности и уровня предпочтения этих критериев, методы пропорциональной взаимосвязи критериев, использующие арифметическую и геометрическую прогрессии, а также формальные методы. На основе анализа рассмотренных методов разработаны и предложены к использованию методы настраиваемой оценки предпочтения критериев для расчета весовых коэффициентов критериев, позволяющие устранить недостатки существующих методов и имеющие практическую направленность.

Ключевые слова: весовые коэффициенты критериев, локальные критерии, парное сравнение критериев, оценка предпочтения критериев, важность критериев

Введение

В процессе промышленной эксплуатации систем обработки информации (СОИ), из-за бурного развития средств вычислительной техники, обслуживающему персоналу постоянно приходится решать задачи, касающиеся выбора варианта модернизации аппаратных и программных средств, а также организационной структуры системы для удовлетворения постоянно растущих потребностей пользователей. [1] .

Для сравнения альтернативных вариантов модернизации СОИ и выбора среди них наилучшего, лицо принимающее решение (ЛПР), как правило, использует интегральные критерии в виде аддитивной, мультипликативной, минимаксной, нелинейной или комбинированной свертки локальных критериев [1-3] . При этом в состав интегрального критерия локальные критерии входят с их весовыми коэффициентами, учитывающими важность этих локальных критериев. В настоящее время существует достаточно большое число подходов и методов к расчету весовых коэффициентов локальных критериев, при этом все эти методы постоянно развиваются и совершенствуются для удовлетворения

требований ЛПР [1-3]. При этом количество локальных критериев, учитываемых ЛПР, согласно [4], рекомендуется брать не более 10, поскольку взаимный анализ большего числа критериев ограничивается психологическими возможностями человека, в данном случае ЛПР, и при дальнейшем увеличении числа критериев у ЛПР могут возникнуть затруднения и ошибки при их сравнении и ранжировании.

Постановка задачи

Необходимо провести обзор методов используемых ЛПР для расчета весовых коэффициентов локальных критериев, используемых в составе интегральных, рассмотреть вопросы их классификации и дать рекомендации по дальнейшему развитию, совершенствованию и применению этих методов.

Решение задачи

На основе анализа работ [5-15] следует выделить следующие методы, используемые ЛПР, для расчета весовых коэффициентов локальных критериев в составе интегральных:

1) Методы, использующие парное сравнение критериев:

- классический метод парного сравнения критериев [5];
- метод парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения [6];
- метод парного сравнения критериев на основе плавающего предпочтения, составляющий основу метода анализа иерархий [7-9];
- метод парного сравнения критериев на основе экспоненциального плавающего предпочтения, составляющий основу мультипликативного метода анализа иерархий [10].

2) Методы, использующие аналитические зависимости взаимосвязи показателей важности критериев

- метод арифметической прогрессии [11];
- метод геометрической прогрессии [12-13];

3) Формальные методы

- метод последовательного сравнения критериев, известный как метод Черчмена – Акоффа. [14];
- метод базового критерия [15].

Рассмотрим особенности использования описанных методов более подробно.

При использовании методов парного сравнения критериев сначала следует составить квадратную матрицу $\|k_{ij}\|$ парного сравнения критериев размерностью n, где n - число критериев, $i = 1,...n$ и $j = 1,...n$. Заполнение матрицы коэффициентами k_{ij}, которые показывают предпочтение критерия i по отношению к критерию j, производят различными способами, в зависимости от используемого метода парного сравнения критериев.

При использовании классического метода парного сравнения критериев, все диагональные элементы матрицы должны быть равны единице, а остальным элементам матрицы следует присвоить значения k_{ij} следующим образом [5]:

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{если критерий } i \textit{ более важен чем критерий } j \\ 0 & \textit{если критерий } i \textit{ менее важен чем критерий } j \\ 0,5 & \textit{если критерии } i \textit{ и } j \textit{ имеют одинаковую важность} \end{cases} \quad (1)$$

При этом обязательно должно быть выполнено условие $k_{ij} + k_{ji} = 1$

После заполнения матрицы подсчитывают уровень важности каждого критерия k_i, где $i = 1,...n$, по следующей формуле:

$$k_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \quad (2)$$

Затем определяют суммарный уровень важности всех критериев k_c по формуле

$$k_c = \sum_{i=1}^{n} k_i \quad (3)$$

После этого определяют весовые коэффициенты критериев α_i по формуле:

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_c} \text{ где } i = 1, 2.....n \quad (4)$$

При строгом ранжировании критериев $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, ...\mathrm{K}_n$, когда отсутствуют одинаковые по важности критерии, имеем $\mathrm{K}_1 \succ \mathrm{K}_2 ..... \succ \mathrm{K}_n$, что соответствует следующей взаимосвязи уровней важности критериев:

$$k_1 > k_2 ..... > k_n . (5)$$

Поскольку в данном случае согласно матрицы парного сравнения критериев имеем $k_1 = n$, $k_2 = n-1$, $....k_n = 1$, то уровни важности критериев являются членами убывающей арифметической прогрессии со знаменателем прогрессии равным единице.

Тогда сумма уровней важности всех критериев определяется по следующей формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{(n+1)}{2} \cdot n \quad (6)$$

Поэтому при строгом линейном ранжировании критериев выражения (3) и (4) имеют соответственно следующий вид:

$$k_i = (n+1) - i \quad (7)$$

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_c} = \frac{2\left[(n+1)-i\right]}{n(n+1)} \qquad (8)$$

При использовании классического метода парного сравнения критериев уровень важности наиболее важного и наименее важного критериев, а следовательно и их весовые коэффициенты, при строгом ранжировании критериев, отличаются друг от друга в (γ) раз и эту величину, после подстановки значений k_1 и k_n согласно выражения (7), определяют по следующей формуле:

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{k_1}{k_n} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)-n} = n \qquad (9)$$

Согласно (9) получаем, что величина (γ) равна числу критериев, линейно зависит от числа критериев, и не может изменена ЛПР в процессе проведения расчетов. Поэтому при большом числе критериев, применение классического метода парного сравнения критериев для расчета весовых коэффициентов критериев не всегда может быть приемлемо для ЛПР.

Для уменьшения влияния числа критериев на величину (γ) в [6] предложено использовать метод парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения. При применении этого метода все диагональные элементы матрицы парного сравнения критериев также должны быть равны единице, а остальным элементам матрицы следует присвоить значения k_{ij}, соответствующие предпочтению критерия i по отношению к критерию j, следующим образом [6]:

$$k_{ij} = \begin{cases} 1+0,5=1,5 & \textit{если критерий } i \textit{ более важен чем критерий } j \\ 1-0,5=0,5 & \textit{если критерий } i \textit{ менее важен чем критерий } j \\ 1 & \textit{если критерии } i \textit{ и } j \textit{ имеют одинаковую важность} \end{cases} \qquad (10)$$

При этом обязательно должно быть выполнено условие $k_{ij} + k_{ji} = 2$ при $i \neq j$

Далее, аналогично предыдущему методу, подсчитывают уровень важности каждого критерия по формуле (2) , суммарный уровень важности критериев по формуле (3) и определяют весовые коэффициенты критериев по формуле (4).

При использовании метода фиксированного предпочтения и строгом ранжировании критериев имеем $\mathrm{K}_1 \succ \mathrm{K}_2 ..... \succ \mathrm{K}_\mathrm{n}$, что соответствует взаимосвязи уровней важности критериев определяемой выражением (5). При этом уровни важности критериев также являются членами убывающей арифметической прогрессии со знаменателем прогрессии равным единице и могут быть вычислены по следующей формуле

$$k_i = (n-1)\cdot 1,5 + 1 + 1 - i = (1,5n + 0,5) - i \qquad (11)$$

Согласно (11) имеем:

$$k_1 = (1,5n + 0,5) - 1 = 1,5n - 0,5$$

$$k_n = (n-1)\cdot 1{,}5 + 1 + 1 - n = 0{,}5n + 0{,}5$$

Далее соответственно определяют суммарное значение уровней важности критериев и весовые коэффициенты критериев по следующим формулам:

$$k_c = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{k_1 + k_n}{2}\cdot n = \frac{(1{,}5n - 0{,}5) + (0{,}5n + 0{,}5)}{2}\cdot n = n^2 \qquad (12)$$

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_c} = \frac{\left[(1{,}5n + 0{,}5) - i\right]}{n^2} \qquad (13)$$

При использовании метода парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения, уровень важности наиболее важного и наименее важного критериев, а следовательно и их весовые коэффициенты, при строгом ранжировании критериев отличаются друг от друга в (γ) раз и эта величину определяют по формуле

$$\gamma = \frac{k_1}{k_n} = \frac{1{,}5n - 0{,}5}{0{,}5n + 0{,}5} = \frac{3n - 1}{n + 1} \qquad (14)$$

Сравнивая выражения (9) и (14) получаем, что в случае строгого ранжирования критериев разброс значений весовых коэффициентов критериев, при использовании парного сравнения критериев на основе метода фиксированного предпочтения, значительно меньше по сравнению с классическим методом. Весовой коэффициент наиболее важного критерия превосходит весовой коэффициент наименее важного критерия менее чем в три раза, в то время как в классическом методе он превосходит в n раз.

Однако метод парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения также заранее, согласно выражения (14), устанавливает зависимость величины (γ) от числа критериев при расчете весовых коэффициентов критериев, что в ряде случаев ограничивает практическое использование данного метода.

В последнее время для расчета весовых коэффициентов критериев стали использовать метод парного сравнения критериев на основе плавающего предпочтения, составляющий основу метода анализа иерархий [7-9]. При использовании этого метода ЛПР сначала формирует свои логические суждения о качественном уровне предпочтения критериев по отношению друг к другу, согласно табл.1 столбец 2, а. затем, используя вербально-числовую шкалу, переводит качественные значения предпочтения в количественные, табл.1. столбец 3.

Таблица 1 Фундаментальная вербально- числовая шкала относительной предпочтительности критериев, предложенная Саати

№	**Качественное определение уровня предпочтительности критериев**	**Количественное значение уровня предпочтительности критериев (k_{ij})**
1	2	3
1	Равная предпочтительность	1
2	Слабая степень предпочтительности	2
3	Среднее степень предпочтительности	3
4	Предпочтительность выше среднего	4
5	Умеренно сильная предпочтительность	5
6	Сильная предпочтительность.	6
7	Очень сильная предпочтительность	7
8	Очень, очень сильная предпочтительность	8
9	Абсолютная предпочтительность	9

Если в матрице парного сравнения критериев критерий строки (i) имеет определенное превосходство по сравнению с критерием столбца (j), то этому элементу матрицы присваивают соответствующее число k_{ij} из табл.1 столбец 3.

Если же указанный в строке критерий не является доминирующим по отношению к критерию, указанному в столбце, то в соответствующий элемент матрицы всегда записывают число обратное коэффициенту предпочтения, т. е. $1/k_{ij}$. Диагональные элементы матрицы парного сравнения критериев всегда равны единице.

Для того, чтобы результаты, полученные при использовании этого метода, были корректными, необходимо, чтобы матрица была полностью согласованной в суждениях ЛПР. Для этого необходимо выполнение следующих условий для любых элементов k_{ik}, k_{ij}, k_{jk}:

- условие согласованности элементов матрицы, которое имеет следующий вид:

$$k_{ik} = k_{ij} \cdot k_{jk} \tag{15}$$

- условие транзитивности элементов матрицы, согласно которому имеем, если

$$k_{ik} \geq k_{ij} \text{ и } k_{ij} \geq k_{jk}, \text{ то } k_{ik} \geq k_{jk} \tag{16}$$

После заполнения матрицы, согласно [7-9] , последовательно вычисляют значения C_i , т.е. собственные вектора критериев, используя следующую формулу:

$$C_i = (k_{i1} \cdot k_{i2} \cdots k_{in})^{1/n} \tag{17}$$

Далее определяют коэффициенты важности α_i , т.е. весовые коэффициенты этих критериев по следующей формуле:

$$\alpha_i = \frac{C_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i} \qquad (18)$$

В [9] предложен упрощенный подход к расчету весовых коэффициентов критериев при использовании метода парного сравнения критериев на основе плавающего предпочтения, при котором, для строго согласованной матрицы парного сравнения критериев, значения α_j можно вычислять по следующей формуле:

$$\alpha_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_{ij}} \text{ где } j = 1, 2 \ldots n \qquad (19)$$

Следует иметь в виду, что с увеличением числа критериев, при заполнении матрицы парного сравнения критериев, ЛПР становится все сложнее выполнять условия согласованности и транзитивности для коэффициентов предпочтения критериев. Результаты исследований, приведенные в табл 2,3,4 показывают, что в случае строгого ранжирования критериев разброс значений весовых коэффициентов критериев, при использовании парного сравнения критериев на основе метода плавающего предпочтения, значительно больше, чем при классическом методе. Согласно результатов, приведенных в табл 5, весовой коэффициент наиболее важного критерия превосходит весовой коэффициент наименее важного критерия более чем в n раз и при этом значение γ резко возрастает с ростом n.

Таблица 2 Сравнительный анализ трех критериев методом плавающего предпочтения

	K_1	K_2	K_3	C_i	α_i
K_1	1	2	3	1,817	0,540
K_2	1/2	1	2	1	0,297
K_3	1/3	1/2	1	0,551	0,163

Таблица 3 Сравнительный анализ пяти критериев методом плавающего предпочтения

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	C_i	α_i
K_1	1	2	3	4	5	2,605	0,417
K_2	1/2	1	2	3	4	1,644	0,263
K_3	1/3	1/2	1	2	3	1	0,160
K_4	1/4	1/3	1/2	1	2	0,608	0,098
K_5	1/5	1/4	1/3	1/2	1	0,384	0,062

Таблица 4 Сравнительный анализ семи критериев методом плавающего предпочтения

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	C_i	α_i
K_1	1	2	3	4	5	6	7	3,370	0,351
K_2	1/2	1	2	3	4	5	6	2,310	0,241
K_3	1/3	1/2	1	2	3	4	5	1,530	0,159
K_4	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4	1	0,104
K_5	1/5	1/4	1/3	1/2	1	2	3	0,652	0,068
K_6	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	2	0,431	0,045
K_7	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	0,206	0,032

Таблица 5 Оценка влияния числа критериев на величину γ при использовании метода плавающего предпочтения

n	3	4	5	6	7	8	9
OC	0,008	0,012	0,015	0,02	0,025	0,03	0,036
$\gamma = \alpha_1 / \alpha_n$	3,301	4,912	6,781	8,962	11,406	14,152	17,206

OC - оценка согласованности суждений ЛПР, которая вычислена по методике, приведенной в [8]. Поскольку все значения $OC < 0{,}1$, то суждения ЛПР согласованы и полученные результаты вычисления весовых коэффициентов, а следовательно и γ следует признать корректными.

При расчете весовых коэффициентов критериев в [10] предложено использовать метод парного сравнения критериев на основе экспоненциального плавающего предпочтения, составляющий основу мультипликативного метода анализа иерархий. Этот метод обладает большей разрешающей способностью по сравнению с методом анализа иерархий и позволяет провести при необходимости более четкое ранжирование весовых коэффициентов критериев. ЛПР сначала формирует свои логические суждения о качественном уровне предпочтения критериев по отношению друг к другу, согласно табл. 6 столбец 1, а затем, используя вербально-числовую шкалу, переводит качественные значения предпочтения в количественные, табл. 6 столбец 2, и формирует базовую матрицу парного сравнения критериев , элементами которой являются оценки δ_{ij} .Затем ЛПР на основе этой базовой матрицы формирует матрицу субъективной относительной важности парных сравнений критериев, осуществляя переход от оценок δ_{ij} к оценкам k_{ij} , используя табл. 6 и столбцы 2 и 3..

Таблица 6 Вербально-числовая шкала относительной важности критериев

Качественное значение превосходства критериев			**Количественное значение превосходства критериев**	
1			2	3
			δ_{ij}	$k_{ij} = e^{p \cdot \delta_{ij}}$
F_j	Абсолютно превосходит	F_i	- 10	0,000912
F_j	Очень сильно (намного) превосходит	F_i	- 8	0,004
F_j	Сильно (явно) превосходит	F_i	- 6	0,014
F_j	Умеренно превосходит	F_i	- 4	0,06
F_j	Немного превосходит	F_i	- 2	0,246
F_i	Примерно равно	F_j	0	0
F_i	Немного превосходит	F_j	2	4,06
F_i	Умеренно превосходит	F_j	4	16,44
F_i	Сильно (явно) превосходит	F_j	6	66,70
F_i	Очень сильно (намного) превосходит	F_j	8	270,40
F_i	Абсолютно превосходит	F_j	10	1095,84

p - показатель, определяющий уровень превосходства критериев. Поскольку для перехода от одной градации к другой, при построении шкалы важности критериев уровень этого превосходства, согласно табл.6.2 столбец 2 , равен двум баллам, т.е. $e^p = 2$ то $p = 0,7$

Так в случае строгого ранжирования критериев методом экспоненциального плавающего предпочтения, базовая матрица парного сравнения критериев и соответствующая ей матрица субъективной относительной важности парных сравнений

критериев, на примере трех критериев, соответственно имеют вид, приведенный в табл. 7 и табл. 8

Таблица 7 Базовая матрица парного сравнения критериев методом экспоненциального плавающего предпочтения

	K_1	K_2	K_3
K_1	0	2	4
K_2	-2	0	2
K_3	-4	-2	0

Таблица 8 Матрица субъективной относительной важности парных сравнений критериев методом экспоненциального плавающего предпочтения

	K_1	K_2	K_3	C_i	α_i
K_1	1	4,06	16,44	4,051	0,764
K_2	0,246	1	4,06	1	0,189
K_3	0,06	0,246	1	0,246	0,047

Так при $n=3$, согласно результатов табл. 8, имеем $\gamma=\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=\frac{0,764}{0.047}=16,255$, а при $n=4$ имеем $\gamma=253,667$. Имеет место тенденция - очень резкое увеличение γ с ростом числа критериев, когда $\gamma>n^2$, что снижает возможность практического использования метода в случае строгого ранжирования четырех и более критериев .

В [11] для оценки весовых коэффициентов критериев предложено использовать формулу Фишберна, основанную на том, что изменение весовых коэффициентов критериев подчиняется убывающей арифметической прогрессии, при этом первый критерий ($i=1$), расположен первым в строго упорядоченном по важности ранжированном ряду критериев $i=1,2,...n$, является наиболее важным и имеет наибольший весовой коэффициент.

Формула Фишберна для расчета весовых коэффициентов критериев имеет вид [11]:

$$\alpha_i=\frac{2\cdot(n-i+1)}{n\cdot(n+1)} \tag{20}$$

Согласно формулы Фишберна имеем:

$$\alpha_1=\frac{2\cdot n}{n\cdot(n+1)} \quad \alpha_n=\frac{2}{n\cdot(n+1)}$$

При этом

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = n \qquad (21)$$

В [12,13] считают, что при строгом ранжировании критериев изменение весовых коэффициентов критериев подчиняется убывающей геометрической прогрессии. При этом первый критерий, самый важный среди сравниваемых критериев, имеет наибольший весовой коэффициент. Поэтому для оценки весовых коэффициентов критериев предложено использовать следующую формулу

$$\alpha_i = \frac{\omega^{i+1}}{1-\omega^n} \text{ где } i = 1, 2, \ldots n \qquad (22)$$

$\omega = 0,618$ - является «золотым сечением» единичного целого на две части и удовлетворяет уравнению

$$\omega + \omega^2 = 1. \qquad (23)$$

При этом

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{\omega^2}{\omega^{n+1}} = \omega^{1-n} \qquad (24)$$

Значения ω^n и ω^{-n} приведены в табл. 9. Анализ этих данных показывает, что величина γ резко увеличивается с ростом числа критериев, так если при трех критериях весовые коэффициенты наиболее важного и наименее важного критериев отличаются в 2,6 раза, при пяти критериях в 6,8 раза, то при семи критериях почти в 18 раз. Это усложняет применение рассматриваемого метода расчета весовых коэффициентов критериев на практике при строгом ранжировании семи и более критериев.

Таблица 9 Значение ω^n и ω^{-n} и γ в зависимости от числа критериев

n	2	3	4	5	6	7	8
ω^n	0,3819	0,2360	0,1458	0,0901	0,0557	0,0344	0,0213
ω^{-n}	2,6185	4,2371	6,8561	11,094	17,9514	29,0477	47,0026
γ	1,6181	2,6185	4,2371	6,8561	11,094	17,9514	29,0477

Для того, чтобы при расчете весовых коэффициентов критериев величина γ заранее не зависела от числа критериев, а могла быть задана ЛПР в качестве исходных данных, на практике используют формальные методы расчета весовых коэффициентов критериев. Наиболее часто используют метод последовательного поэтапного сравнения критериев, известный как метод Черчмена-Акоффа [14]

Метод предполагает последовательную корректировку оценок критериев, заданных первоначально ЛПР. Основные предположения, на которых основан метод, состоят в следующем:

- каждому i-му критерию дают баллы, т. е. ставится в соответствие действительное неотрицательное число b_i ;
- если критерий K_i предпочтительнее критерия K_j то $b_i > b_j$, если же эти критерии равноценны, то $b_i = b_j$
- если b_i и b_j оценки критериев K_i и K_j , то оценка $(b_i + b_j)$ соответствует совместному влиянию этих критериев.

Согласно методу Черчмена-Акоффа критерии ранжируются по предпочтительности. При этом для удобства изложения считаем, что критерий K_1 наиболее важный, за ним следует K_2 и т.д. ЛПР указывает предварительные численные оценки в баллах для каждого из критериев. Обычно наиболее важному критерию дают оценку 100 баллов, оценки остальных критериев располагают между 0 и 100 в соответствии с их важностью. Затем ЛПР сравнивает оценки критерия K_1 и суммы остальных критериев от K_2 до K_n. Если критерий K_1 предпочтительнее всех остальных, то ЛПР корректирует оценки так, чтобы выполнялось условие

$$b_i > \sum_{i=2}^{n} b_i \tag{25}$$

В противном случае должно выполняться следующее условие

$$b_i < \sum_{i=2}^{n} b_i \tag{26}$$

Если критерий K_1 оказывается менее предпочтительным, чем сумма всех остальных, то для уточнения оценок его оценка сравнивается по предпочтению с суммой оценок остальных критериев. После того как оценка критерия K_1 оказывается предпочтительнее суммы оценок критериев K_2 ... K_k.. K_n $(k \geq 2)$, он исключается из рассмотрения, а вместо оценки критерия K_1 рассматривается и корректируется оценка критерия K_2. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут откорректированы оценки всех критериев.

При большом числе критериев целесообразно разбить все критерии на группы важности, а один из критериев, например, наиболее важный, для корректировки оценок всех критериев, включить во все группы. Это позволяет упростить процесс бальной оценки критериев. Весовые коэффициенты критериев α_i определяют по следующей формуле:

$$\alpha_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \text{ где } i = 1, 2.....n \qquad (27)$$

В [15] для расчета весовых коэффициентов критериев предложено использовать метод базового критерия и приведен пример его практического использования при числе критериев более 20 с учетом разбиения критериев на группы важности.

Использование этого метода предусматривает следующий порядок действий:

1) все множество локальных критериев разбивают на группы важности, самые несущественные критерии относят к базовой (g-ой) группе, и задают значения коэффициентов β_i, показывающих уровень превосходства критериев i- ой группы по сравнению с критериями базовой группой. При этом в первую группу ($i = 1$) включают самые важные критерии.

2) составляют уравнение нормировки локальных критериев, согласно которому сумма весовых коэффициентов всех локальных критериев должна быть равна единице.

$$\sum_{i=1}^{g} n_i \cdot \beta_i \cdot \alpha = 1 \qquad (28)$$

при условии , что

$$\sum_{i=1}^{g} n_i = n \qquad (29)$$

Где g - количество групп важности локальных критериев;

n_i - количество локальных критериев, которые входят в состав i- ой группы

β_i - коэффициент, который показывает степень превосходства критериев

i- ой группы по сравнению с критериями базовой группы, при этом $\beta_g = 1,\ \beta_1 = \gamma$

α - коэффициент важности критериев базовой группы, при этом $\alpha = \alpha_g = \alpha \cdot \beta_g$

3) определяют весовой коэффициент (α) критериев базовой группы и весовые коэффициенты (α_i) критериев, входящих в состав i- ой группы

$$\alpha = (\sum_{i=1}^{g} n_i \cdot \beta_i)^{-1} \qquad (30)$$

$$\alpha_i = \alpha \cdot \beta_i \qquad (31)$$

Проведенный анализ существующих методов расчета весовых коэффициентов критериев показал, что формальные методы, по сравнению с другими методами, позволяют ЛПР задавать в качестве исходных данных численное значение коэффициента γ, показывающего превосходство наиболее важного критерия по сравнению с наименее важным критерием, что часто на практике играет существенную роль.

На основе результатов, полученных в ходе проведенного анализа, разработаны и предложены к практическому использованию методы расчета весовых коэффициентов критериев, устраняющие недостатки ряда существующих методов и позволяющие ЛПР задавать в качестве исходных данных коэффициент γ, учитывающий превосходство наиболее важного критерия по сравнению с наименее важным критерием: К числу этих методов относятся:

1. метод парного сравнения критериев на основе настраиваемого фиксированного предпочтения;

2. метод взаимосвязи весовых коэффициентов критериев на основе настраиваемой убывающей арифметической прогрессии;

3. метод взаимосвязи весовых коэффициентов критериев на основе настраиваемой убывающей геометрической прогрессии.

В методе парного сравнения критериев на основе настраиваемого фиксированного предпочтения, так же как и в методе парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения, диагональные элементы матрицы должны быть равны единице. Остальным элементам матрицы следует присвоить значения k_{ij}, соответствующие предпочтению критерия i по отношению к критерию j, с учетом Δ-нормы предпочтения критериев, следующим образом:

$$k_{ij} = \begin{cases} 1+\Delta & \textit{если критерий } i \textit{ более важен чем критерий } j \\ 1-\Delta & \textit{если критерий } i \textit{ менее важен чем критерий } j \\ 1 & \textit{если критерии } i \textit{ и } j \textit{ имеют одинаковую важность} \end{cases} \quad (32)$$

При этом обязательно должно быть выполнено условие $k_{ij} + k_{ji} = 2$ при $i \neq j$

При строгом упорядоченном ранжировании критериев и заполнении матрицы парного сравнения критериев коэффициентами k_{ij} согласно условию (32), справедливо следующее отношение уровней важности критериев:

$$\frac{k_1}{k_n} = \frac{(n-1)\cdot(1+\Delta)+1}{(n-1)\cdot(1-\Delta)+1} \quad (33)$$

Поскольку справедливо следующее отношение $\frac{k_1}{k_n} = \frac{\alpha_1}{\alpha_n}$, то согласно (33) имеем

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{k_1}{k_n} = \frac{(n-1)\cdot(1+\Delta)+1}{(n-1)\cdot(1-\Delta)+1} = \frac{n\Delta - \Delta + n}{n\Delta - \Delta + 1} \quad (34)$$

Решая уравнение (34) относительно Δ получаем:

$$\Delta = \frac{n\cdot(\gamma-1)}{(n-1)\cdot(\gamma+1)} \quad (35)$$

Подставляя в уравнение (35) исходные значения n и γ , получаем численное значение величины нормы предпочтения критериев Δ, обеспечивающее заданное значение γ.

При строгом ранжировании критериев имеем:

$$k_i = (n-1)\cdot(1+\Delta)+2-i \tag{36}$$

Тогда из (36) получаем

$$k_1 = (n-1)\cdot(1+\Delta)+1 = n+n\Delta-\Delta \tag{37}$$

$$k_n = (n-1)\cdot(1+\Delta)+2-n = n\Delta-\Delta+1 \tag{38}$$

Поскольку коэффициенты предпочтения критериев являются членами убывающей арифметической прогрессии, то с учетом (37) и (38) имеем:

$$k_c = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{k_1+k_n}{2}\cdot n = \frac{\left[2(n\Delta-\Delta)+(n+1)\right]n}{2} \tag{39}$$

Подставляя выражения (36) и (39) в (40), определяем весовые коэффициенты критериев при строгом ранжировании этих критериев:

$$\alpha_i = \frac{k_i}{k_c} = \frac{2\left[(n-1)\cdot(1+\Delta)+2-i\right]}{\left[2(n\Delta-\Delta)+(n+1)\right]n} \tag{40}$$

При этом численное значение Δ определяем по формуле (35).

Если имеет место нестрогое ранжирование критериев, т.е. наличие одинаковых по важности критериев, то, задавая в качестве исходных данных значения n и γ, весовые коэффициенты критериев определяют следующим образом:

1) составляют матрицу парного сравнения критериев с учетом выполнения условия (32);

2) определяют уровни важности k_1 и k_n соответствующих критериев K_1 и K_n по формуле (2) При этом имеем, что $k_1 = f_1(\Delta,n)$, а $k_n = f_2(\Delta,n)$

3) составляют уравнение вида $\gamma = \frac{k_1}{k_n} = \frac{f_1(\Delta,n)}{f_2(\Delta,n)}$, решают его и определяют Δ

4) в элементах матрицы парного сравнения критериев учитывают рассчитанное значение Δ и формируют численные значения коэффициентов важности критериев k_{ij}

5) определяют уровни важности критериев k_i по формуле (2)

6) определяют суммарный уровень важности критериев по формуле (3)

7) определяют весовые коэффициенты критериев по формуле (4)

При расчете весовых коэффициентов критериев методом настраиваемой убывающей арифметической прогрессии следует иметь в виду, что ЛПР в качестве исходных данных должен задавать значения n и γ, при этом весовые коэффициенты критериев являются

членами убывающей арифметической прогрессии. Поэтому справедливы следующие выражения:

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \tag{41}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n = \frac{\alpha_n \cdot (\gamma + 1)}{2} \cdot n = 1 \tag{42}$$

После преобразования выражения (42) получаем

$$\alpha_n = \frac{2}{(\gamma + 1) \cdot n} \tag{43}$$

С учетом выражений (41) и (43) имеем

$$\alpha_1 = \alpha_n \cdot \gamma = \frac{2\gamma}{(\gamma + 1) \cdot n} \tag{44}$$

Определяем знаменатель арифметической прогрессии

$$\Delta_\alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_n}{(n-1)} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1) \cdot n \cdot (n-1)} \tag{45}$$

Весовой коэффициент i-го критерия определяем по формуле

$$\alpha_i = \alpha_1 - (i-1) \cdot \Delta_\alpha \tag{46}$$

После подстановки в (46) выражения α_1 из (44) и выражения Δ_α из (45) получаем выражение для расчета весовых коэффициентов критериев

$$\alpha_i = \frac{2 \cdot \left[\gamma \cdot (n-1) - (i-1) \cdot (\gamma - 1) \right]}{(\gamma + 1) \cdot n \cdot (n-1)} \text{ где } i = 1, 2 \ldots n \tag{47}$$

Из формулы (47), предназначенной для расчета весовых коэффициентов критериев, при $\gamma = n$, получаем как частный случай широко используемую формулу Фишберна (20). Действительно, после подстановки $\gamma = n$ и преобразований выражение (47) имеем вид:

$$\alpha_i = \frac{2 \cdot \left[n \cdot (n-1) - (i-1) \cdot (n-1) \right]}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)} = \frac{2 \cdot \left[n^2 - ni + i - 1 \right]}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}$$

$$\alpha_i = \frac{2 \cdot \left[(n^2 - 1) - i(n-1) \right]}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)} = \frac{2 \cdot (n + 1 - i)}{(n+1) \cdot n}$$

При расчете весовых коэффициентов критериев методом настраиваемой убывающей геометрической прогрессии следует иметь в виду, что ЛПР в качестве исходных данных должен задавать значения n и γ, при этом весовые коэффициенты критериев являются членами убывающей геометрической прогрессии. Поэтому, кроме выражения (41) , справедливы следующие выражения:

$$\alpha_i = \alpha_1 \cdot r^{i-1} \tag{48}$$

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{1}{r^{n-1}} \tag{49}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \cdot r^{i-1} = \alpha_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 1 \tag{50}$$

Порядок расчета весовых коэффициентов критериев имеет следующий вид:

1) задаем значения n и γ. Согласно (49) имеем, что $r^{n-1} = \frac{1}{\gamma}$ или

$$(n-1)\lg r = \lg(1/\gamma) \tag{51}$$

2) после преобразования выражения (51) получаем

$$r = 10^A \tag{52}$$

где

$$A = \frac{\lg(1/\gamma)}{n-1} \tag{53}$$

3) из выражения (50) получаем, что

$$\alpha_1 = \frac{1-r}{1-r^n} \tag{54}$$

4) согласно выражения (48) определяем весовые коэффициенты критериев

$$\alpha_i = \alpha_1 \cdot r^{i-1} \tag{55}$$

Выводы

1 Рассмотрены методы расчета весовых коэффициентов локальных критериев, входящих в состав интегральных критериев, и предназначенные для лица принимающего решение.

2. Приведена классификация методов расчета весовых коэффициентов критериев и выделены три группы методов: методы, базирующиеся на парном сравнении критериев, методы, базирующиеся на аналитической взаимосвязи показателей предпочтения критериев, и методы, основанные на формальном подходе.

3. Показано, что при использовании методов парного сравнения критериев или методов, основанных на взаимосвязи весовых коэффициентов критериев, подчиняющейся аналитической или геометрической прогрессии, при строгом ранжировании критериев вида $K_1 \succ K_2 \succ K_3 ..... K_{n-1} \succ K_n$, весовые коэффициенты наиболее важного и наименее важного критериев отличаются друг от друга в строго фиксированное число раз γ, которое зависит от используемого метода и числа рассматриваемых критериев n.

4. Разработаны и предложены к практическому использованию методы настраиваемой оценки предпочтения критериев, в частности: метод парного сравнения на основе настраиваемого фиксированного предпочтения критериев; метод на основе

настраиваемой убывающей арифметической прогрессии и метод на основе настраиваемой убывающей геометрической прогрессии.

5. Разработанные методы позволяют ЛПР в случае строгого ранжирования критериев, в качестве исходных данных, задавать как число критериев, так и значение γ - коэффициент превосходства наиболее важного критерия по сравнению с наименее важным критерием и имеют ярко выраженную практическую направленность.

Список литературы

1. Постников В.М., Черненький В.М. Методы принятия решений в системах организационного управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 205 с.
2. Зак Ю.А. Прикладные задачи многокритериальной оптимизации. М.: Экономика, 2014. 455 с.
3. Ногин В.Д. Линейная свертка в многокритериальной оптимизации // Искусственный интеллект и принятие решений. 2014. № 4. С. 73 - 82.
4. Емельянов С.В., Ларичев О.И. Многокритериальные методы принятия решений. М.: Знание, 1985. 32 с.
5. Михайлов Я.В. Управленческие решения: пособие для управленцев-практиков. М.: Экономика, 2011. 143 с.
6. Шилин А.И. Коптелова И.А. Теория принятия решений в проектировании информационно-измерительной техники. Волгоград: ВолГУ, 2012. 128 с.
7. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий: пер. с англ. М.: Радио и связь, 1993. 316 с.
8. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте. Руководство для будущих топ-менеджеров. М.: ЛКИ, 2010. 688 с.
9. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. СПб.: ЮТАС, 2007. 104 с.
10. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Университетская лавка, Логос, 2008. 392 с.
11. Баранов Ю.Г. Методы принятия управленческих решений. Псков: ПГУ, 2013. 176 с.
12. Некрестьянова Ю.Н. Теоретическое обоснование анализов Парето // Предпринимательство. 2013. № 3. С. 56-64.
13. Некрестьянова Ю.Н. Определение весовых коэффициентов критериев эффективности инвестиций // Publishing house Education and Science s.r.o. : сайт. Режим доступа: http://www.rusnauka.com/15_NPN_2013/Economics/8_139451.doc.htm (дата обращения 14.04.2015).
14. Туккель И.А., Яшин С.Н., Макаров С.А., Кошелев Е.В. Разработка и принятие решения в управлении иннвациями. СПб.: БХВ Петербург, 2011. 352 с.

Постников В.М., Спиридонов С.Б. Подход к выбору варианта модернизации сервера ЛВС // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 2. С. 255-272. DOI: 10.7463/0213.0535392

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2015, no. 06, pp. 267–287.

DOI: **10.7463/0615.0780334**

Received: 14.05.2015
Revised: 28.05.2015

© Bauman Moscow State Technical Unversity

Selecting Methods of the Weighting Factors of Local Criteria

V.M. Postnikov[1], S.B. Spiridonov[1,*]

*spirid@bmstu.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: weighting criteria, local criteria, pairwise comparisons criteria, assessment criteria, the importance of the criteria

The paper considers calculation methods of weight coefficients of local criteria for the person to make decision (PMD). Methods can be used by a decision-maker to form the integrated criteria in the form of the additive, multiplicative, minimax, nonlinear or combined convolution of local criteria, different in degree of importance, as well as to carry out a comparative assessment of the studied alternative options on their basis, range these options, and choose the best option among them.

The paper classifies the calculation methods of weight coefficients of criteria and distinguishes three groups, namely: methods based on the paired comparison of criteria, methods based on the analytical interrelation of indicators of criteria preference, and methods based on the formalistic approach. Among the methods based on paired comparison of criteria the following ones are distinguished: a classical method of paired comparison of criteria, and methods of paired comparison of criteria based on the fixed, floating, and exponential floating preferences of criteria. The last two methods of criteria comparison are respectively basic for the practical use of both a method of hierarchy analysis and a multiplicative method of hierarchy analysis. The paper considers in detail calculation methods of weight coefficients of criteria using analytical dependences of interrelation between the indicators of criteria importance based on an arithmetic and geometrical progression. The considered formal methods include the method of consecutive comparison of criteria known as a Cherchmen's method – Akoffa, method and a method of basic criterion.

It is shown that when using methods of paired comparison of criteria or methods based on the interrelation of weight coefficients of criteria obeyed to an analytical or geometrical progression with the strictly ranging criteria $K_1 \succ K_2 \succ K_3 ..... K_{n-1} \succ K_n$, a difference in weight coefficients of the most important and least important criteria is strictly the fixed number of times γ which depends on the used method and the number of the considered criteria n. So when using a classical method of paired comparison of criteria and a method based on the use of an

arithmetic progression, $\gamma = n$, and when using a geometrical progression, $\gamma > n$, and it sharply increases with growing n.

To eliminate noted shortcomings in considered calculation methods of weight coefficients of criteria, methods of the adjusted assessment of criteria preference are developed and offered for a practical use: a method of paired comparison on the basis of the adjusted fixed preference of criteria; a method on the basis of the adjusted decreasing arithmetic progression, and a method on the basis of the adjusted decreasing geometrical progression.

The offered methods allow a decision-maker in case of strictly ranging criteria, as basic data, to set both the number of criteria, and the value - coefficient of superiority of the most important criterion in comparison with the least important criterion and have a pronounced practical focus.

References

1. Postnikov V.M., Chernen'kii V.M. *Metody prinyatiya reshenii v sistemakh organizatsionnogo upravleniya* [Decision-making methods in systems of organizational management]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014. 205 p. (in Russian).
2. Zak Yu.A. *Prikladnye zadachi mnogokriterial'noi optimizatsii* [Applied problems of multi-criteria optimization]. Moscow, Ekonomika Publ., 2014. 455 p. (in Russian).
3. Noghin V.D. Weighted sum scalarization in multicriteria optimization. *Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii = Artificial intelligence and decision making*, 2014, no. 4, pp. 73-82. (in Russian).
4. Emel'ianov S.V., Larichev O.I. *Mnogokriterial'nye metody priniatiia reshenii* [Multicriteria decision making methods]. Moscow, Znanie Publ., 1985. 32 p. (in Russian).
5. Mikhailov Ya.V. *Upravlencheskie resheniya: posobie dlya upravlentsev-praktikov* [Management decisions. Handbook for managers-practitioners]. Moscow, Ekonomika Publ., 2011. 143 p. (in Russian).
6. Shilin A.I. Koptelova I.A. *Teoriya prinyatiya reshenii v proektirovanii informatsionno-izmeritel'noi tekhniki* [The theory of decision-making in design of information and measuring techniques]. Volgograd, VolSU Publ., 2012. 128 p. (in Russian).
7. Saaty T.L. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, 1980. (Russ. ed.: Saaty T.L. *Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhii*. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1993. 316 p.).
8. Madera A.G. *Modelirovanie i prinyatie reshenii v menedzhmente. Rukovodstvo dlya budushchikh top-menedzherov* [Modeling and decision-making in management. Guidelines for future top managers]. Moscow, LKI Publ., 2010. 688 p. (in Russian).
9. Nogin V.D. *Prinyatie reshenii pri mnogikh kriteriyakh* [Multiple-criteria decision-making]. St. Petersburg, YuTAS Publ., 2007. 104 p. (in Russian).
10. Larichev O.I. *Teoriya i metody prinyatiya reshenii* [Theory and methods of decision making]. Moscow, Universitetskaya lavka Publ., Logos Publ., 2008. 392 p. (in Russian).

11. Baranov Yu.G. *Metody prinyatiya upravlencheskikh reshenii* [Methods of managerial decision-making]. Pskov, PSU Publ., 2013. 176 p. (in Russian).
12. Nekrest'yanova Yu.N. The theoretical justification of Pareto's analysis. *Predprinimatel'stvo = Enterpreneurship*, 2013, no. 3, pp. 56-64. (in Russian).
13. Nekrest'yanova Yu.N. *Opredelenie vesovykh koeffitsientov kriteriev effektivnosti investitsii* [Determination of weight coefficients of investment performance criteria]. Publishing house Education and Science s.r.o. : website. Available at: http://www.rusnauka.com/15_NPN_2013/Economics/8_139451.doc.htm , accessed 14.04.2015. (in Russian).
14. Tukkel' I.A., Yashin S.N., Makarov S.A., Koshelev E.V. *Razrabotka i prinyatie resheniya v upravlenii innvatsiyami* [Development and decision making in innovation management]. St. Petersburg, BKhV Peterburg Publ., 2011. 352 p. (in Russian).
15. Postnikov V.M., Spiridonov S.B. Approach to selection of a way to upgrade a LAN server. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 2, pp. 255-272. DOI: 10.7463/0213.0535392 (in Russian).