

УДК 535.317

## **Базовая апланатическая сферическая линза с осевым линейным распределением показателя преломления**

Ровенская Т. С.<sup>1,\*</sup>

[\\*rovts@yandex.ru](mailto:rovts@yandex.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

Исследованы конструкции сферических апланатических линз с осевым линейным распределением показателя преломления и апланатических асферических однородных линз. Моделирование выполнено для линз при фокусном расстоянии 100мм, относительном отверстии 1:2 и угловом поле 30° в диапазоне изменения показателя преломления от 1,5 до 1,9. Анализ проводился в отношении формы, монохроматических сумм Зейделя и реальных aberrаций с выделением aberrаций высших порядков, а также значений глубины градиентного слоя и максимального изменения показателя преломления. Результаты характеризуют семейство базовых апланатических линз, которые могут использоваться как самостоятельные функциональные узлы (одноэлементные коллиматоры) или входить в состав апертурного компонента многокомпонентной оптической системы в качестве его базовой линзы (объективы – монохроматоры, телеобъективы, конденсоры).

**Ключевые слова:** aberrация, апланатическая коррекция, градиентная линза, осевое распределение показателя преломления, асферическая линза

---

### **Введение**

Современный этап развития оптико-электронных устройств в значительной степени определяется достижениями в разработке и производстве источников и приемников электромагнитного излучения и оптических формирующих и изображающих систем.

В русле этих тенденций находятся актуальные задачи повышения числовых значений функционально важных характеристик оптических систем, улучшения качества формируемого изображения (увеличение значений модуляционно - передаточных функций, повышение разрешающей способности, уменьшение значений лучевых aberrаций), уменьшения числа образующих оптическую систему компонентов, повышения надежности и удешевления изделия. Решение указанных задач связано с совершенствованием методов и средств проектирования оптических систем. Этому способствуют разработка и автоматизация аналитических и вычислительных методов

структурного (композиционного) и параметрического синтеза оптических систем, создание компьютеризированных информационно-поисковых систем и баз данных. Одновременно происходит все более широкое использование в оптических системах нетрадиционной элементной базы, представленной прежде всего оптическими элементами с асферическими и дифракционными поверхностями, сферическими и асферическими линзами из оптически прозрачных сред с регулярным изменением показателя преломления (градиентных линз), а также гибридных оптических элементов. Тенденция использования в оптических системах нетрадиционной элементной базы имеет устойчиво динамичный характер, что связано с успехами вычислительной оптики, метрологии и оптических технологий прежде всего в областях формообразования оптических поверхностей и производства оптических сред. Определенное место в семействе нетрадиционных оптических элементов занимают ограниченные сферическими преломляющими поверхностями линзы (сферические линзы) из оптически прозрачного материала с осевым распределением показателя преломления (ОРПП), именуемые сферическими градиентными линзами с ОРПП. В структурных схемах оптических изображающих систем градиентные линзы аналогично сферическим линзам с постоянным значением показателя преломления (ПП) (сферические однородные линзы) могут выполнять функции базовых (силовых), коррекционных и коррекционно - силовых линз, но обладающих при этом иными присоединительными характеристиками и абберационными свойствами [1, 2, 3,4]. Поэтому разработка методов синтеза сферических линз с ОРПП и исследование их абберационных свойств с целью эффективного применения в современных оптических системах различного назначения является актуальной задачей вычислительной оптики.

В представленном материале обобщены результаты моделирования и исследования сферических положительных по оптической силе линз из материала с осевым линейным распределением показателя преломления (ОЛРПП), в которых обеспечена апланатическая степень исправления аббераций. Такие элементы могут быть самостоятельными функциональными узлами (линзы - коллиматоры) или входить в состав апертурного компонента многокомпонентной оптической системы в качестве его базовой линзы (объективы – монохроматоры, телеобъективы, конденсоры). Выполнено сравнение с альтернативным решением в виде базовой однородной линзы с асферической поверхностью второго порядка.

## Параметрический синтез апланатических сферической градиентной линзы с ОЛРПП и асферической однородной линзы

Базовая линза представляет собой ограниченный преломляющими поверхностями центрированный элемент положительной оптической силы. Линза анализируется при условиях нахождения ее в воздухе и расположении предметной плоскости в бесконечности. Осевая толщина линзы определяется из условий ее технологической реализуемости. В этом случае линза с формой, близкой к двояковыпуклой или выпукло – плоской, может считаться условно тонкой (квизитонкой) при изменении относительного отверстия линзы в достаточно широком диапазоне значений.

Определение конструктивных параметров апланатической сферической градиентной линзы с ОЛРПП выполняется в соответствии с изложенным в [5] методом.

На первом этапе путем аналитического решения или с использованием средств автоматизированного компьютерного моделирования устанавливаются конструктивные параметры сферической линзы с однородным показателем преломления  $n_0$ , определяемые для квазитонкой линзы заданной оптической силы из условия обнуления второй суммы Зейделя. При синтезе плоскость входного зрачка принимается касательной к первой поверхности линзы в ее вершине (практически можно считать входной зрачок размещенным в плоскости квазитонкой линзы).

На втором этапе путем применения в линзе материала с ОЛРПП вида

$$n^{(1)}(z) = n_0 + n_1 z \quad (1)$$

обеспечивается исправление сферической абберации третьего порядка при условиях сохранения оптической силы линзы и оптической силы первой поверхности линзы. ОЛРПП оптической среды описывается в прямоугольной системе координат OXYZ; ось OZ совпадает с оптической осью сферической однородной линзы; начало O системы координат совпадает с вершиной первой поверхности линзы. В выражении (1)  $n_0$  соответствует значению показателя преломления в начале системы координат (при  $z=0$ ),  $n_1$  – коэффициент с размерностью  $\text{мм}^{-1}$ . Коррекционными параметрами этого этапа являются кривизна последней поверхности линзы и коэффициент  $n_1$ .

Моделирование градиентных линз осуществляется в двух вариантах конструкции. В варианте «а» градиентная линза рассматривается как склеенный элемент с радиусами  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , которые ограничивают градиентную выпукло – плоскую линзу и квазисклеенную с ней однородную линзу с первой плоской поверхностью; показатель преломления последней равен показателю преломления градиентной линзы при  $z = d_1$ . Осевая толщина  $d_1$  градиентной линзы определяется стрелкой прогиба ее первой поверхности на световом диаметре (рис. 1). ОЛРПП  $n^{(1)}(z)=n_0+n_1z$  существует в пределах стрелки прогиба первой поверхности склеенного компонента. Общая осевая толщина  $d$  склеенной линзы равна

толщине сферической однородной линзы, определенной на первом этапе синтеза. Градиентный слой прилегает к поверхности, обеспечивающей больший вклад в сферическую aberrацию однородной линзы, выполняя функцию корректора этой aberrации [4,5]. В варианте «б» ОЛРПП вводится на всей толщине  $d$  линзы; в этом варианте можно считать  $d_1 = d$ ,  $d_2 = 0$ .

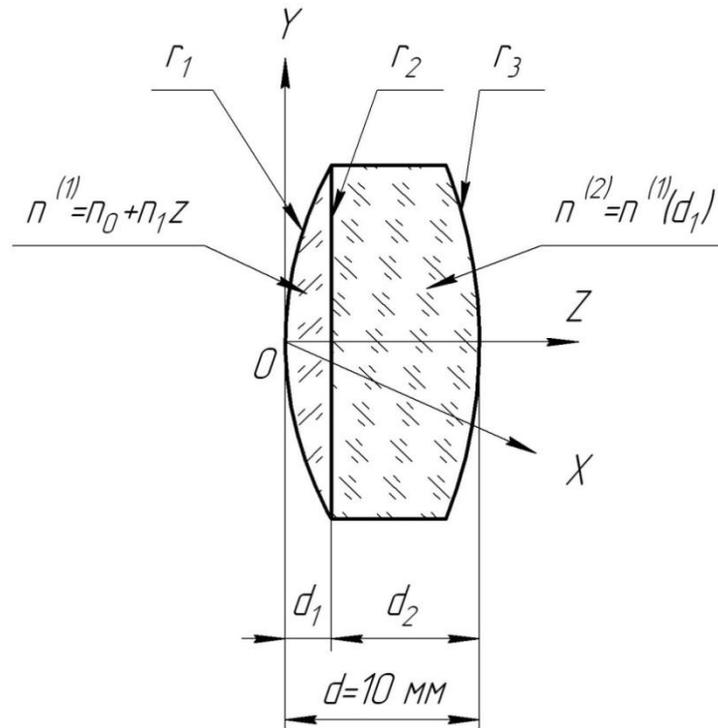


Рис.1. Сферическая линза из градиентной с ОЛРПП и однородной частей (квасисклеенная линза)

В результате формируется конструктивное описание базовой сферической градиентной линзы с ОЛРПП, обладающей апланатической или практически близкой к ней коррекцией в области aberrаций третьего порядка при расположении плоскости входного зрачка касательной к первой поверхности линзы в ее вершине. Конструкции с указанным расположением зрачка в тексте обозначены как варианты 1а и 1б.

Альтернативное решение представляет собой асферическую линзу, параксиальное описание которой полностью повторяет конструктивное описание ( $r_1$ ,  $r_2$  и  $d$ ) сферической базовой линзы с однородным показателем преломления  $n = n_0$ , полученное на первом этапе синтеза апланатической градиентной линзы (далее вариант «о»). Как и в случае с градиентной квазисклеенной линзой, асферическая поверхность вводится на поверхность с большим вкладом в сферическую aberrацию третьего порядка. Уравнение меридионального профиля асферической поверхности определяется из условия устранения сферической aberrации третьего порядка и имеет вид

$$Y^2 = 2 r_1 * z - (1 - e^2) * z^2. \quad (2)$$

Уравнение (2) записано в прямоугольной системе координат OXYZ, описанной для уравнения (1) (рис.1);  $e^2$  – квадрат эксцентриситета, определяющий деформацию опорной сферической поверхности и тип асферической поверхности второго порядка [6].

### Конструкция базовых апланатических сферических градиентных линз с ОЛРПП и асферических линз

Первый этап синтеза линз с постоянным значением ПП выполнен путем компьютерного моделирования в пакете прикладных программ «ОПАЛ» [7] с использованием в качестве параметра поверхности углов первого вспомогательного луча, обеспечивая при  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_3 = 1$  равенство нулю второй суммы Зейделя :  $\bar{S}_{II} = 0$ . Исходные данные синтеза: заднее фокусное расстояние линзы  $f' = 100$  мм, толщина по оси  $d = 10$  мм, относительное отверстие  $D/f' = 1:2$ , показатель преломления  $n = n_0$  изменяется в диапазоне значений от 1,5 до 1,9; последний определен с ориентацией на градиентные стекла с ОРПП GRADIUM® [2, 8].

Синтез линз с градиентной средой проводился при помощи ППП «ZEMAX» путем оптимизации полученного на первом этапе решения за счет коррекционных параметров  $r_3$  и  $n_1$  (варианты «а») и  $r_2$  и  $n_1$  ( варианты «б») в областях определения функции  $n^{(z)}(z) = n_0 + n_1 z$  при условиях сохранения значения фокусного расстояния и устранения сферической аберрации.

Синтез асферических линз выполнен при помощи ППП «ZEMAX» путем оптимизации полученного на первом этапе решения при условии устранения сферической аберрации за счет коррекционного параметра  $e^2$ .

Конструктивные параметры апланатических градиентных линз представлены в таблице 1.

**Таблица 1** Конструктивные параметры апланатических градиентных линз с ОЛРПП

Параметры линзы		$n_0$		
		1,5	1,7	1,9
$r_1$ , мм.		56,729	66,258	72,956
$r_2 / r_1$	вариант о	- 6,99	17,55	4,94
	вариант а	- 6,4336	16,7199	4,794
	вариант б	- 6,0046	16,054	4,635
$t$ , мм.		5,806	4,897	4,417
$\Delta n$	вариант а	- 0,041	- 0,029	- 0,022
	вариант б	- 0,070	- 0,060	- 0,050

**Примечание:**  $t$  – глубина градиентного слоя [мм]:  $t = d_1$ ;  $\Delta n$  – перепад показателя преломления в градиентных линзах вариантов а, б.

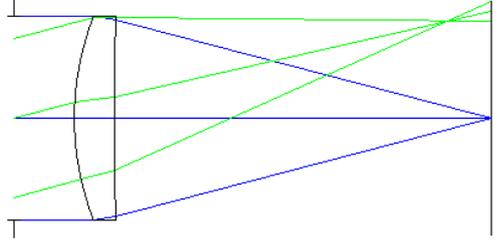
При возрастании ПП  $n_0$  основы в диапазоне от 1,5 до 1,9 форма линз находится вблизи решения «выпукло-плоская линза» с переходом от двояковыпуклой формы к мениску с выпуклостью к предметной плоскости. Апланатические линзы с большим показателем преломления имеют более пологий радиус кривизны первой поверхности и,

следовательно, более низкий уровень aberrаций высших порядков. Задача развития относительного отверстия апланатической базовой линзы может реализовываться при применении в качестве оптических сред материалов с более высокими значениями  $n_0$ .

Требуемое изменение ПП в пределах градиентного слоя (перепад ПП -  $\Delta n$ ) больше в линзах с градиентным слоем на всей толщине линзы. При увеличении  $n_0$  перепад ПП уменьшается как в варианте а, так и в варианте б. Одновременно с этим отмечается некоторое уменьшение глубины градиентного слоя в квазисклеенной градиентной линзе. При уменьшении ПП основы наблюдается также тенденция к сглаживанию различий в значениях перепада ПП в вариантах «а» и «б». Уменьшение величины перепада ПП и глубины градиентного слоя позволяет упростить процесс изготовления градиентных линз и является, следовательно, определенным технологическим преимуществом.

В табл. 2 показаны конструктивные параметры линзы с показателем преломления  $n = 1,7$  с первой асферической поверхностью второго порядка, в которой обеспечено исправление комы третьего порядка и которое анализируется в качестве альтернативного решения апланатическим градиентным линзам с равным значением  $n_0$ . Асферическая поверхность является эллипсоидной и характеризуется отступлением от вершинной сферы [6] величиной 0,0245мм.

**Таблица 2** Конструктивные параметры асферической однородной линзы

	$r$ , мм	$e^2$	$d$ , мм	$n$
	66,259	0,555	10,0	1,7
	1162,594			

**Примечания:** ход лучей показан для случая расположения входного зрачка на расстоянии 15 мм перед первой поверхностью линзы при условии определения светового диаметра поверхности по осевому пучку.

Изменение формы асферических линз при изменении ПП линз от 1,5 до 1,9 с достаточной степенью приближения представляет табл. 1, а отступление от вершинной сферы изменяется от 0,0544 мм (для  $n = 1,5$ ) до 0,014мм (для  $n = 1,9$ ) при сохранении формы асферической поверхности второго порядка.

### **Аберрационный анализ синтезированных апланатических линз**

В табл. 3 приведены суммы Зейделя монохроматических aberrаций апланатических градиентных и асферической линз со средним для анализируемого диапазона ПП значением -  $n = 1,70$  для двух положений входного зрачка  $s_p = -15$ мм; 0мм. Результаты отражают как этапы синтеза (сопоставляемые решения - однородная и градиентные

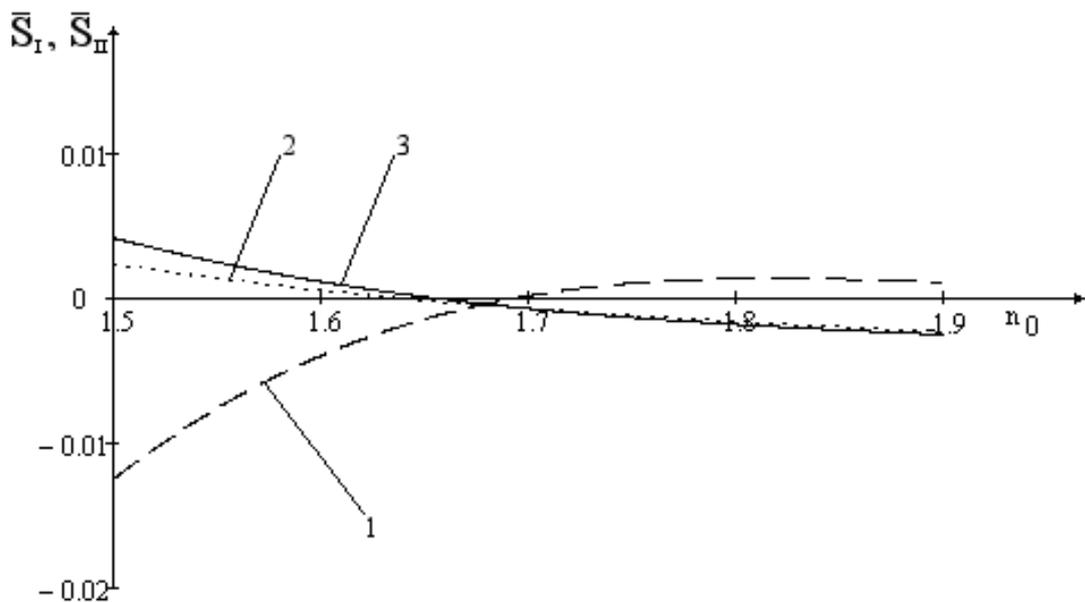
линзы), так и общее состояние коррекции линз с учетом и такого фактора, как изменение положения входного зрачка (апертурной диафрагмы).

**Таблица 3** Суммы Зейделя сферической однородной линзы с исправленной комой третьего порядка (вариант о) и апланатических градиентных (варианты а, б) и асферической линз

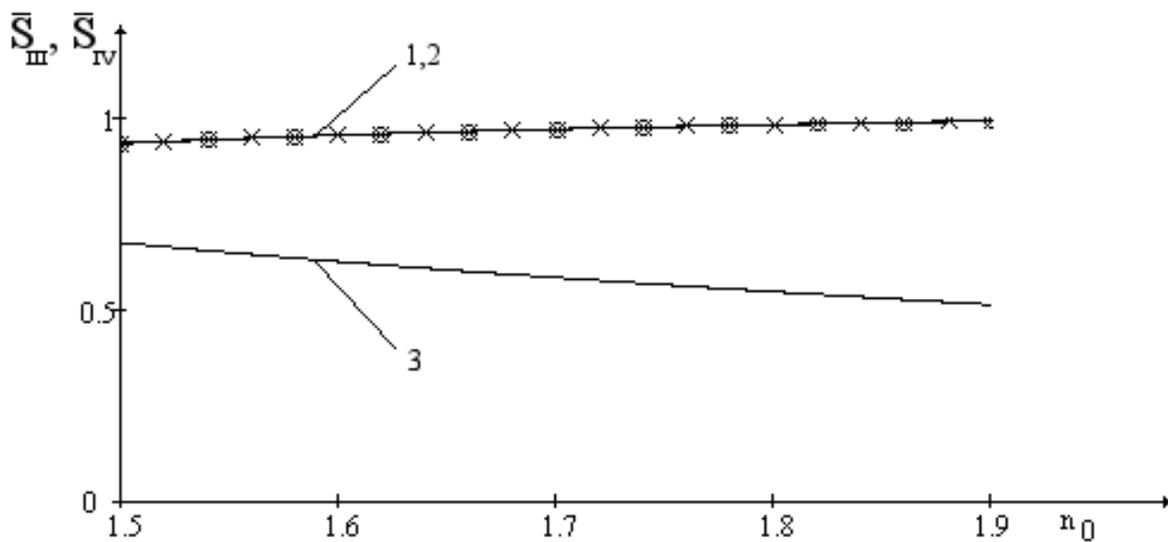
Сумма Зейделя		Однородная линза	Градиентная линза		Асферическая линза на основе варианта о
		о	а	б	
$\bar{S}_I$		1,3356	-0,0007	0,0002	0,0
$\bar{S}_{II}$	$S_p = 0$ мм	0,0	-0,0009	-0,0007	0,0
	$S_p = -15$ мм	-0,2003	-0,0009	-0,0007	0,0
$\bar{S}_{III}$	$S_p = 0$ мм	0,9709	0,9711	0,9713	0,9709
	$S_p = -15$ мм	1,0009	0,9714	0,9715	0,9709
$\bar{S}_{IV}$		0,5860	0,5854	0,5847	0,5860
$\bar{S}_V$	$S_p = 0$ мм	-0,0288	-0,0285	-0,0284	-0,0288
	$S_p = -15$ мм	-0,5581	-0,5532	-0,5533	-0,5536

$S_p$  – положение входного зрачка относительно первой поверхности линзы.

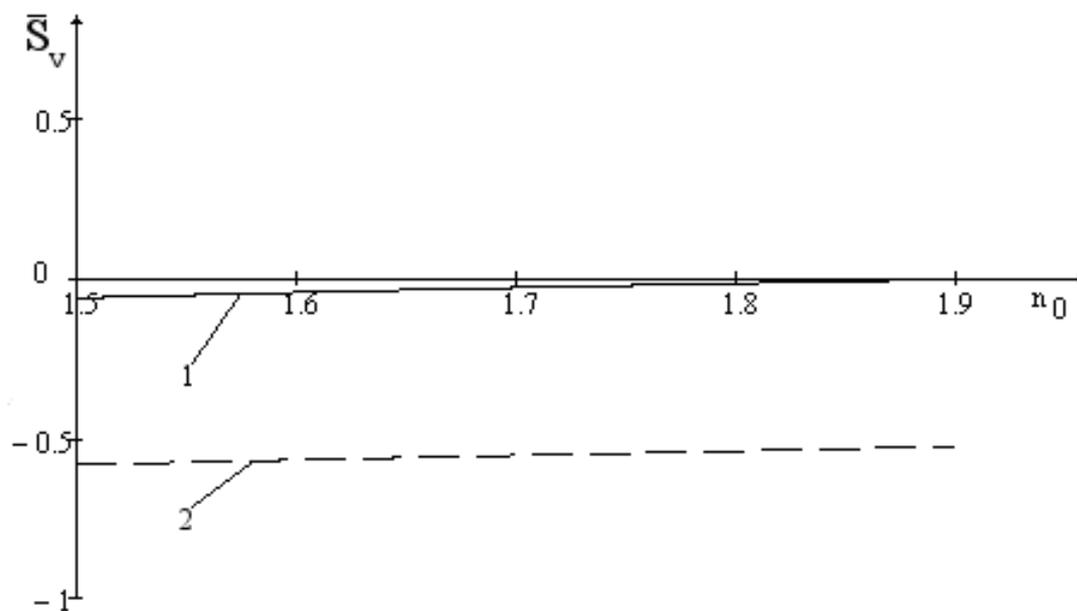
На рис.2 - 4 представлены графические функции, определяющие зависимости сумм Зейделя апланатических градиентных линз от базового ПП  $n_0$ .



**Рис.2.** Зависимость от базового ПП первой и второй сумм Зейделя апланатических линз с ОЛРПП на всей толщине линзы: 1 –  $\bar{S}_I(n_0)$  при  $s_p = 0$ ; 2 –  $\bar{S}_{II}(n_0)$  при  $s_p = 0$ ; 3 –  $\bar{S}_{II}(n_0)$  при  $s_p = -15$  мм



**Рис.3.** Зависимость от базового ПП третьей и четвертой сумм Зейделя апланатических линз с ОЛРПП на всей толщине линзы: 1 –  $\bar{S}_{III}(n_0)$  при  $s_p = 0$ ; 2 –  $\bar{S}_{III}(n_0)$  при  $s_p = -15$  мм; 3 –  $\bar{S}_{IV}(n_0)$  при  $s_p = 0$



**Рис.4.** Зависимость от базового ПП пятой суммы Зейделя апланатических линз с ОЛРПП на всей толщине линзы: 1 –  $\bar{S}_V(n_0)$  при  $s_p = 0$ ; 2 –  $\bar{S}_V(n_0)$  при  $s_p = -15$  мм

Величина  $\bar{S}_{III}$  практически одинакова во всем диапазоне ПП основы, но уровень сумм  $\bar{S}_{IV}$  и  $\bar{S}_V$  уменьшается при расчете апланатических линз на основе материала с более высоким значением ПП основы. Изменение положения входного зрачка не оказывает влияния на величину монохроматических абберационных коэффициентов, за исключением пятой суммы, определяющей дисторсию третьего порядка. Вынос

апертурной диафрагмы в пространство предметов приводит к появлению отрицательной дисторсии, слабо зависящей от значения ПП основы. В области aberrаций третьего порядка апланатические градиентные и асферические линзы идентичны. Однако в области реальных aberrаций между апланатическими решениями в виде градиентных и асферических линз наблюдается различие, которое иллюстрируется представленными ниже результатами. Так, в табл.4 для апланатических линз с  $n_0 = 1,70$  приведены геометрические aberrации лучей осевого и внеосевого пучков с выделением уровня aberrаций третьего порядка. Градиентные и асферические решения эквивалентны в отношении всех анализируемых aberrаций, за исключением поперечной геометрической aberrации меридиональной комы. Указанная aberrация характеризуется более высоким уровнем реальной aberrации ( aberrаций высших порядков) в асферическом варианте решения ( выделенные значения табл. 4).

Аналогичное различие фиксируется во всем диапазоне анализируемых апланатических градиентных и асферических линз, что показано в табл.5. Указанное различие проявляется в наибольшей степени в области более низких значений ПП основы.

**Таблица 4** Aberrации исходной однородной и апланатических градиентных и асферических линз при  $f'=100$  мм,  $D/f'=1:2$ ,  $2\omega=30^\circ$ ,  $S_F=0$ мм;  $n_0 = 1,70$

Название aberrации, единица измерения	Порядок aberrации	Однородная линза	Градиентные линзы		Асферическая линза на основе варианта 2
			2а	2б	
Поперечная сферическая для $m = 1$ , мм	3 порядок	-1,0434	0,0006	-0,0002	0,0
	Реальная	-1,1939	0,0009	0,0	-0,0159
Меридиональная кома для $k = 22$ %, $\omega = -15^\circ$ , мм	3 порядок	0,0	0,0024	0,0017	0,0
	Реальная	0,5203	0,2660	0,2669	0,4025
Астигматическая разность для $\omega = -15^\circ$ , мм	3 порядок	6,6541	6,6579	6,6571	6,9704
	Реальная	6,1402	6,1442	6,1430	6,1408
Средняя кривизна изображения для $\omega = -15^\circ$ , мм	3 порядок	-8,6624	-8,6646	-8,6609	-9,0742
	Реальная	-8,2965	-8,2991	-8,2950	-8,2968
Дисторсия для $\omega = -15^\circ$ , %	3 порядок	-0,0963	-0,0955	-0,0952	-0,1033
	Реальная	-0,0982	-0,0971	-0,0970	-0,0982

Таблица 5 Меридиональная кома апланатических градиентных и асферических линз

ПП основы	Характеристика aberrации	Характеристика линзы		
		Градиентная		Асферическая
		вариант а	вариант б	
1,5	Третий порядок	0,0081	0,0058	0
	Полная	0,3552	0,3707	0,6041
1,7	Третий порядок	0,0024	0,0017	0
	Полная	0,2660	0,2669	0,4025
1,9	Третий порядок	- 0,0039	- 0,0057	0
	Полная	0,2499	0,2508	0,3357

Единица измерения aberrации: мм. Параметры луча:  $f'=100$  мм,  $D/f'=1:2$ ,  $2\omega=30^\circ$ ,  $S_p=0$  мм.

### Заключение

На основе предложенного в [5] метода синтезированы семейства базовых апланатических сферических градиентных с ОЛРПП и асферических однородных линз в диапазоне значений ПП от 1,5 и 1,9. Выполнен сравнительный анализ конструктивных параметров и aberrационных свойств указанных нетрадиционных оптических элементов и показана близость градиентных и асферических решений в области aberrаций третьего порядка с выявлением различия в aberrациях высших порядков в широких внеосевых пучках. Выявлены преимущества градиентных линз перед асферическими линзами в области реальных aberrаций. Эти преимущества в большей степени проявляются при моделировании апланатических линз на основе материалов с более низкими значениями ПП (область «кроновых» стеклянных и полимерных линз).

Идентичность свойств квазитонких градиентных и асферических линз в области монохроматических aberrаций третьего порядка позволяет распространять выводы и результаты исследований, полученные для оптических систем с асферическими поверхностями, на оптические системы с градиентными элементами на основе ОЛРПП.

### Список литературы

1. Анитропов Р.В., Лившиц И.Л., Свищук Д.В. Предпосылки построения экспертной системы композиции объективов // Известия ВУЗов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 5. С. 77-78.
2. Алимов А.Е. Свойства базовых сферических линз с осевым распределением показателя преломления: дис. ... канд. техн. наук. М., 2012. 265 с.
3. Алимов А.Е., Ровенская Т.С. Исследование «толстой» изопланатической базовой линзы с осевым распределением показателя преломления // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 125-130.

4. Ровенская Т.С., Алимов А.Е. Базовая сферическая линза с исправленной сферической aberrацией путем применения градиентного материала с осевым линейным распределением показателя преломления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 7. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/942.html> (дата обращения 01.05.2015).
5. Ровенская Т.С., Алимов А.Е., Квиткина К.Э. Метод расчета апланатической сферической линзы с осевым линейным распределением показателя преломления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 2. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/1209.html> (дата обращения 01.05.2015).
6. Запрягаева Л.А., Свешникова И.С. Расчёт и проектирование оптических систем. М.: Логос, 2000. 584 с.
7. Пакет программ автоматизированного проектирования оптических систем ОПАЛ-ПК. Руководство для пользователя. Оптимизация центрированных оптических систем (работы OPT, OPTW, OPTZ) / Ленинград. ин-т точной механики и оптики. СПб., 1992.
8. ZEMAX Optical Design Program. User's Guide. Version 10.0. Tucson, Arizona, USA, Focus Software, Incorporated, 2003. 478 p.

## Basic Aplanatic Spherical Lens with Axial Linear Distribution of Refractive Index

T.S. Rovenskaya<sup>1,\*</sup>

[\\*rovts@yandex.ru](mailto:rovts@yandex.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** aberration, aplanatic correction, gradient lens, the axial distribution of refractive index, aspherical lens

---

The use of gradient optical elements (GOE) from materials with a given spatial change of the refractive index (RI) in optical systems allows us to improve quality, increase reliability, and reduce weight and dimensions of the optical systems in electro-optic and laser devices.

The object of research is constructive and aberration properties of the GOE as the positive lens formed by spherical centered surfaces that restrict environment with a linear change of RI:  $n(z) = n_0 + n_1 * z$ ; the axis OZ coincides with the geometrical optical axis of the lens,  $n_1$  is the coefficient.

In order to study the axial thickness ( $d = 10\text{mm}$ ) and RI of the base  $n_0$  at a given focal length ( $f = 100\text{ mm}$ ), a parametric synthesis of the lens, located in the air, is performed using a developed technique to provide elimination of spherical aberration and coma of the third order for an infinitely remote object. Thus, designs were considered when the RI gradient was introduced at an axial thickness of lenses or at a depth of the pointer of its first surface in the light aperture, defined at a relative aperture of 1:2 and angular field in object space of  $30^\circ$ . The synthesis is performed when you change the RI of the base in the range from 1.5 to 1.9; this corresponds to an optical glass and plastic in the visible and near IR region of the spectrum.

The analysis was conducted regarding the form, monochromatic amounts of Seidel, and real aberrations with identification of higher-order aberrations, as well as depth values of the gradient layer  $t$  and the maximum change of RI -  $\Delta n$ . Values of  $t$  and  $\Delta n$  are related to process parameters determined by the method of manufacturing gradient material. The results characterize the family of basic aplanatic lenses that either can be used as the independent functional units (singleton collimators) or enter into the aperture component of a multicomponent optical system as its base lenses (lenses – monochromators, telephoto lenses, optical condensers). The GOE with an alternative solution in the form of basic RI homogeneous lens is compared with the first aspheric surface of the second order.

## References

1. Anitropov R.V., Livshits I.L., Svishchuk D.V. Prerequisites for development of expert system for lens compositions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie*, 2010, vol. 53, no. 5, pp. 77-78. (in Russian).
2. Alimov A.E. *Svoistva bazovykh sfericheskikh linz s oseвым raspredeleniem pokazatelya prelomleniya. Kand. dis.* [Properties of base spherical axial gradient-index lenses. Cand. diss.]. Moscow, 2012. 265 p. (in Russian).
3. Alimov A.E., Rovenskaya T.S. Investigation of a "thick" isoplanatic axial gradient-index lens. *Prikladnaya fizika*, 2011, no. 3, pp. 125-130. (in Russian).
4. Rovenskaya T.S., Alimov A.E. Basic spherical lens with the corrected spherical aberration by using linear axial gradient-index material. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/942.html> , accessed 01.05.2015. (in Russian).
5. Rovenskaya T.S., Alimov A.E., Kvitkina K.E. Method for calculating an aplanatic spherical lens with an axial linear refractive index. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 2. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/1209.html> , accessed 01.05.2015. (in Russian).
6. Zapryagaeva L.A., Sveshnikova I.S. *Raschet i proektirovanie opticheskikh sistem* [Calculation and design of optical systems]. Moscow, Logos Publ., 2000. 584 p. (in Russian).
7. Paket programm avtomatizirovannogo proektirovaniya opticheskikh sistem OPAL-PK. Rukovodstvo dlya pol'zovatelya. Optimizatsiya tsentrirovannykh opticheskikh sistem (raboty OPT, OPTW, OPTZ) [Computer-aided design software package for optical systems OPAL-PC. User's manual. Optimization of centered optical systems (OPT, OPTW, OPTZ operations)]. St. Petersburg, Leningrad Institute of Precision Mechanics and Optics Publ., 1992. (in Russian).
8. ZEMAX Optical Design Program. User's Guide. Version 10.0. Tucson, Arizona, USA, Focus Software, Incorporated, 2003. 478 p.