

УДК 514.853

Бертрановские системы и их фазовое пространство

Загрядский О. А.^{1,2,*}

[*grpcozag@mail.ru](mailto:grpcozag@mail.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
²МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Для систем Бертрانا на поверхностях вращения с римановыми и псевдоримановыми метриками посчитан период движения по замкнутым траекториям. Также посчитано время движения по неограниченным траекториям, с помощью чего установлена полнота соответствующих потоков в фазовом пространстве. Для указанных гамильтоновых систем построены бифуркационные диаграммы отображения момента, описано слоение Лиувилля, показано, что слоем может быть окружность, тор, цилиндр и пара цилиндров. Данная система является примером, богатым особенностями, такими как резонансность и совпадения числа вращения всех торов Лиувилля, наличия перестроек слоёв Лиувилля не через критические множества, что позволит в дальнейшем описать все виды некомпактных перестроек для систем вращения.

Ключевые слова: система Бертрана; замкнутая орбита; поверхность вращения; бифуркационная диаграмма; теорема Лиувилля — Арнольда

Введение

Еще задолго до открытия Ньютоном закона всемирного тяготения было установлено, что планеты движутся вокруг Солнца по замкнутым орбитам, притом орбиты являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится само Солнце. Во второй половине XIX века Бертраном был поставлен и решен естественный вопрос: зная формы траекторий, что мы можем сказать о законе притяжения. Ему удалось доказать следующую теорему.

Теорема 1 (Бертран). Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задан центральный гладкий потенциал $V(r)$, где (r, φ) — полярные координаты. Тогда из того, что орбиты при движении в центральном поле этого потенциала будут замкнуты, если только начальная скорость меньше некоторого предела, следует, что потенциал $V(r)$ может быть либо пропорционален $\frac{1}{r}$, либо пропорционален r^2 (с точностью до аддитивной константы).

З а м е ч а н и е 1. Потенциал $V_1(r) = \frac{A}{r} + B$ ($A < 0, B \in \mathbb{R}$) является законом всемирного тяготения и в этом случае замкнутые орбиты будут эллипсами, в одном из фокусов которых находится притягивающий центр (Солнце), потенциал $V_2(r) = Ar^2 + B$ ($A > 0, B \in \mathbb{R}$) является пружинным законом Гука и в этом случае замкнутые орбиты будут эллипсами, в

центре которых находится Солнце. В теореме 1 предполагается неявно существование хотя бы одной замкнутой некруговой орбиты.

Таким образом, теорема 1 устанавливает, что только для двух законов притяжения ограниченные орбиты будут замкнуты. В дальнейшем этот результат многократно обобщался: менялись требования к форме орбит (алгебраические кривые, конические сечения), к пространству (исходное пространство — сфера, плоскость Лобачевского, поверхность вращения). Все эти результаты были получены в разные годы в период с 1873 г. по 2008 г. Ж. Бертраном, Г. Дарбу, Г. Либманом, Г. Кенигсом, Т. Депейру, П. Аппелем, П. Хиггсом, Я. Славяновским, М. Икедой, Н. Катаямой, В. Козловым, А. Хариным, В. Перликом, М. Сантепретом, А. Баллестросом и др. Один из недавно полученных результатов представляет теорему 2.

Рассмотрим поверхность вращения $S \approx (a, b) \times S^1$ с координатами $(u, \varphi \bmod 2\pi)$ и метрикой

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}^2(u) & 0 \\ 0 & a_{22}^2(u) \end{pmatrix},$$

где $a_{11}(u)$, $a_{22}(u)$ — гладкие, положительные функции. А также поверхность вращения $\tilde{S} \approx (a, b) \times S^1$ с координатами $(u, \varphi \bmod 2\pi)$ и псевдоримановой метрикой

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} a_{11}^2(u) & 0 \\ 0 & -a_{22}^2(u) \end{pmatrix}.$$

На $\tilde{S}$ действует некий центральный гладкий потенциал $V(u)$. Под действием потенциала по S и $\tilde{S}$ движется точка по законам (уравнения Эйлера — Лагранжа для стандартного лагранжиана как разности кинетической и потенциальной энергий)

$$\begin{aligned} a_{11}^2 \ddot{u} + a_{11} a_{11}' \dot{u}^2 - i a_{22} a_{22}' \dot{\varphi}^2 + V' &= 0, \\ \frac{d}{dt}(a_{22}^2 \dot{\varphi}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1$ в римановом случае и $i = -1$ в псевдоримановом. Записанные уравнения имеют два первых интеграла: интегралы энергии и кинетического момента

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} a_{11}^2(u) \dot{u}^2 + \frac{i}{2} a_{22}^2(u) \dot{\varphi}^2 + V(u), \\ K &= a_{22}^2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение 1. Пару $\vec{r}(t) = (u(t), \varphi(t))$ назовем траекторией движения, а образ отображения $\vec{r}(t)$ — орбитой, которая в дальнейшем будет задаваться зависимостью $u(\varphi)$. Траектория (соответствующая ей орбита):

- круговая, если $u(t) = \text{const}$;
- особая, если $\varphi(t) = \text{const}$;
- ограниченная, если $a' \leq u(t) \leq b'$ для некоторых a' и b' , $a < a' < b' < b$.

Отметим, что орбита:

- круговая тогда и только тогда, когда она лежит на одной из параллелей;
- особая тогда и только тогда, когда она лежит на каком-либо меридиане;
- ограниченная, если лежит в некотором компактном поясе $[a', b'] \times S^1$.

Определение 2. Центральный (не зависящий от φ) потенциал $V(u)$ ($\tilde{V}(u)$) назовем *замыкающим*, если:

- 1) существует неособая ограниченная некруговая орбита в $S(\tilde{S})$;
- 2) всякая неособая ограниченная орбита в $S(\tilde{S})$ замкнута.

Следующая теорема [5, 7] описывает все поверхности (без экваторов) с потенциалами, приводящими к замкнутым орбитам, т.е. все пары (S, V) , где S — поверхность вращения, а V — замыкающий потенциал на ней. Назовем такие пары бертрановскими.

Теорема 2 (Загрядский О.А., Кудрявцева Е.А., Федосеев Д.А.). Пусть на поверхности $S(\tilde{S})$ нет экваторов, т.е. $a'_{22}(u) \neq 0$ при $u \in (a, b)$. Тогда:

- 1) на поверхностях $S(\tilde{S})$, метрика (псевдориманова метрика) которых заменой $u = u(\vartheta)$ приводится к виду

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\vartheta^2 + c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\vartheta^2 + c)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

для некоторых констант $(\mu, c) \in \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{R}^1$, существует в точности два вида замыкающих потенциалов с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант $V_1(\vartheta) = A|\vartheta| + B$ ($A < 0, B \in \mathbb{R}$), $V_2(\vartheta) = \frac{A}{\vartheta^2} + B$ ($A > 0, B \in \mathbb{R}$);

- 2) на поверхностях $S(\tilde{S})$, метрика (псевдориманова метрика) которых заменой $u = u(\vartheta)$ приводится к виду

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2})} \end{pmatrix} \quad (4)$$

для некоторых констант $(\mu, c, t) \in \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{R}^2$, причем $t \neq 0$, существует ровно один вид замыкающего потенциала с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант $V_2(\vartheta) = \frac{A}{\vartheta^2} + B$ ($A(\vartheta^4 + t) > 0, B \in \mathbb{R}$);

- 3) на остальных поверхностях вращения замыкающего потенциала не существует.

З а м е ч а н и е 2. Бертрановских поверхностей не так уж и много, они представляют собой трехпараметрическое (μ, c, t) множество. В противоположность этому поверхности с экваторами и замкнутыми геодезическими (что соответствует нулевому потенциалу), так называемые поверхности Таннери, представляют собой множество, параметризованное функциональным параметром. Замыкающих потенциалов существует не более двух видов. В случае римановой метрики значению параметров $(\mu, c, t) = (1, 1, 0)$ соответствует полусфера, а значению $(\mu, c, t) = (1, -1, 0)$ соответствует плоскость Лобачевского.

З а м е ч а н и е 3. По условию $a'_{22}(\vartheta) \neq 0$, $a_{22}^2(\vartheta) > 0$, что накладывает ограничения на возможные значения координаты ϑ . При значениях параметров c, t, μ , таких, что $t = 0, c > 0$, переменная ϑ может принимать значения $(0, \infty)$ в римановом случае, и в псевдоримановом пространстве Бертрана с такими значениями параметров c, t, μ не существует. Естественно, если у поверхности $(0, \infty) \times S^1$ с метрикой (3) рассмотреть подповерхность $(a', b') \times S^1$, то она тоже будет бертрановской. Поверхность Бертрана, которая не является подповерхностью никакой другой поверхности Бертрана назовем максимальной.

В табл. 1 приведены значения, которые может принимать ϑ на максимальных поверхностях Бертрана, эти значения не зависят от μ . Без ограничения общности считаем, что $\vartheta > 0$. В таблице фигурируют две константы

$$\vartheta_1 = \sqrt{\frac{-c - \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}, \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}.$$

Т а б л и ц а 1

Возможные положительные значения ϑ

Значение (c, t)	Допустимые значения ϑ в римановом случае	Допустимые значения ϑ в псевдоримановом случае
$c \geq 0, t = 0$	$(0, \infty)$	$\emptyset$
$c < 0, t = 0$	$(\sqrt{-c}, \infty)$	$(0, \sqrt{-c})$
$t > 0$	(ϑ_2, ∞)	$(0, \vartheta_2)$
$t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0$	$(0, \vartheta_1) \cup (\vartheta_2, \infty)$	$(\vartheta_1, \sqrt[4]{-t}) \cup (\sqrt[4]{-t}, \vartheta_2)$
$t < 0, c > 0, c^2 + 4t > 0$	$(0, \sqrt[4]{-t}) \cup (\sqrt[4]{-t}, \infty)$	$\emptyset$
$c^2 + 4t \leq 0$	$(0, \sqrt[4]{-t}) \cup (\sqrt[4]{-t}, \infty)$	$\emptyset$

1. Гамильтоновость

Система Бертрана является гамильтоновой системой. Для ее исследования удобно воспользоваться гамильтоновым формализмом.

Пусть задана поверхность S ($\tilde{S}$) с координатами $(\vartheta, \varphi \bmod 2\pi)$ и метрикой (псевдоримановой метрикой) (4), где ϑ меняется в пределах некоторого интервала (a, b) , являющегося подмножеством допустимого множества значений (см. табл. 1). Пусть на S ($\tilde{S}$) действует центральный потенциал $V(\vartheta)$.

Используя стандартный Лагранжиан

$$L = \frac{a_{11}^2(\vartheta)\dot{\vartheta}^2}{2} + i\frac{a_{22}^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2}{2} - V(\vartheta),$$

введем импульсы:

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = a_{11}^2(\vartheta)\dot{\vartheta}, \quad p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ia_{22}^2(\vartheta)\dot{\varphi},$$

где $i = 1$ для риманова случая и $i = -1$ для псевдориманова. Гамильтониан представляется формулой

$$H = \frac{p_\vartheta^2}{2a_{11}^2(\vartheta)} + i \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(\vartheta)} + V(\vartheta).$$

Тогда данная динамическая система описывается уравнениями Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}, & \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, & \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (5)$$

Соответственно описанные во введении интегралы энергии и кинетического момента примут вид:

$$E = \frac{p_\vartheta^2}{2a_{11}^2(\vartheta)} + i \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(\vartheta)} + V(\vartheta), \quad (6)$$

$$K = p_\varphi. \quad (7)$$

Система уравнений (5) является однородной. Качественную картину системы Бертрана отражает устройство фазового пространства $M^4 \approx (a, b) \times S^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ (кокасательное расщепление к S) с координатами $(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$. С математической точки зрения M^4 представляет из себя симплектическое многообразие с некой симплектической структурой

$$\omega = dp_u \wedge du + dp_\varphi \wedge d\varphi. \quad (8)$$

Симплектическая структура тесно связана с вектором косого градиента от скалярной функции F на M^4 и скобкой Пуассона [10].

Определение 3. Координаты вектора $\text{sgrad } F(x^1, x^2, x^3, x^4)$ определяются из соотношения $\omega(v, \text{sgrad } F) = v(F)$, которое должно быть выполнено для произвольного векторного поля v . В локальных координатах

$$(\text{sgrad } F)^i = \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j}, \quad (9)$$

где (x^1, x^2, x^3, x^4) — переобозначение для $(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$, а ω^{ij} — матрица, обратная к матрице ω_{ij} формы (8). Для функций $F(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и $G(x^1, x^2, x^3, x^4)$ скобка Пуассона определяется следующим образом:

$$\{F, G\} = \omega(\text{sgrad } F, \text{sgrad } G) = \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j}.$$

Функции F и G находятся в инволюции или коммутируют, если $\{F, G\} = 0$.

Рассмотрим в качестве примера первые интегралы E и K , которые являются функциями на M^4 .

Утверждение 1. Интегралы (6) и (7) коммутируют и векторное поле $\text{sgrad } K$ полно, т.е. естественный параметр t на его интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Доказательство. Вычислим градиенты функций E и K :

$$\text{grad } E = \begin{pmatrix} -\frac{a'_{11}(\vartheta)}{a^3_{11}(\vartheta)}p_\vartheta^2 + \frac{a'_{22}(\vartheta)}{a^3_{22}(\vartheta)}p_\varphi^2 + V'(\vartheta) \\ 0 \\ \frac{p_\vartheta}{a^2_{11}(\vartheta)} \\ -\frac{p_\varphi}{a^2_{22}(\vartheta)} \end{pmatrix}, \quad \text{grad } K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Соотношения (9) позволяет по градиентам вычислить косые градиенты $\text{sgrad } E$, $\text{sgrad } K$:

$$\text{sgrad } E = \begin{pmatrix} E'_{p_\vartheta} \\ E'_{p_\varphi} \\ -E'_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sgrad } K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу следуют, что $\{F, G\} = (\text{sgrad } E)^T \omega_{ij}(\text{sgrad } K) = 0$. Полнота $\text{sgrad } K$ следует из того, что его интегральные линии — это окружности вида $\{*\} \times S^1 \times \{0\} \times \{*\}$. Утверждение доказано.

Системы Бертрана похожи на интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы [10]. Согласно классическим результатам, у таких систем (в нашем случае систем с четырехмерным фазовым пространством) существует дополнительный к гамильтониану H первый интеграл G , такой, что H и G функционально независимы, находятся в инволюции, а их потоки $\text{sgrad } H$, $\text{sgrad } K$ полны. Фазовое пространство у интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем слонится на совместные поверхности уровня таких первых интегралов

$$T_{F=F_0, G=G_0} = \{(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) \in M^4: F(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = F_0, G(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = G_0\}.$$

Регулярный компактный слой всегда будет тором (а некомпактный — цилиндром); более того, в подходящих координатах (действие-угол) интегральный поток $\text{sgrad } H$ на торах спрямляется.

Таким образом, интегрирование лиувиллевой системы редуцируется с четырехмерного пространства на двумерный тор, причем интегральные кривые на торе представляют собой прямолинейные обмотки.

Однако, как показывает последнее утверждение, в системе Бертрана поток $\text{sgrad } E$ не всегда полон. Тем не менее совместная регулярная поверхность уровня интегралов E и K будет тором либо цилиндром. Для более детального анализа структуры фазового пространства необходимо оценить период ограниченной траектории и время, необходимое неограниченной траектории для достижения границы поверхности. Заметим, что в силу периодичности ограниченных орбит соответствующий поток полон, т.е. время продолжается до бесконечности.

Период движения по ограниченным орбитам. Период движения по орбите в случае плоскости, а также в случае сферы для замыкающих потенциалов известен. Для всех

таких поверхностей и произвольных центральных потенциалов на них согласно теореме Гордона [1] период движения по замкнутой траектории зависит только от интеграла E и не зависит от K . В случае с плоскостью Лобачевского явный вид такой зависимости получен В.В. Козловым [3]. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 2 (Козлов). Пусть на поверхности C_L с координатами (ϑ, φ) и метрикой (3), где $c = -1$, $\mu = 1$, действует аналог ньютоновского потенциала V_1 или аналог Гукского V_2 . Тогда период движения T точки по замкнутой орбите (т.е. период траектории) вычисляется по следующим формулам:

в случае V_1

$$T = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{A}} \sqrt{-\frac{E}{A} - \sqrt{\frac{E^2}{A^2} - 1}}}{\sqrt{\frac{E^2}{A^2} - 1}};$$

в случае V_2

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{A - 2E}}.$$

Для поверхностей Бертрана, соответствующим значениям параметров (μ, c, t) : $c^2 + 4t > 0$, также получен явный вид зависимости периода движения по замкнутой траектории от E . Докажем соответствующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть задана система Бертрана (S, V) с поверхностью Бертрана S , соответствующей области значения параметров $\{(c, t, \mu = p/q) : c^2 + 4t > 0, t \neq 0\}$, $V = \frac{A}{\vartheta^2}$ — аналог гукского потенциала. Тогда период T движения по замкнутой траектории $\vec{r}(t)$ не зависит от интеграла кинетического момента K и вычисляется по формуле

$$T = \frac{\pi q}{2\sqrt{\Delta}} \left(\frac{\sqrt{\Delta} + c}{\sqrt{E(\sqrt{\Delta} + c) + 2A}} + \frac{\sqrt{\Delta} - c}{\sqrt{E(c - \sqrt{\Delta}) + 2A}} \right),$$

где $\Delta = c^2 + 4t$.

З а м е ч а н и е 4. Данное утверждение, как и его доказательство дословно переносятся и на случай поверхности с псевдоримановой метрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [5] орбита с энергией E и кинетическим моментом K представляет из себя кривую, которая подобно синусоиде колеблется между двумя параллелями $\vartheta = \tilde{\vartheta}_1$ (перигцентр) и $\vartheta = \tilde{\vartheta}_2$ (апоцентр):

$$\vartheta^2 = \frac{E - B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E - B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}} \sin \frac{2(\varphi + \varphi_0)}{\mu}. \quad (11)$$

При этом за p оборотов вокруг поверхности, орбита совершит q колебаний. Период движения по орбите T в q раз больше периода одного колебания $\tilde{T}$. Обозначим

$$\alpha = \frac{E - B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}, \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{E - B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}}.$$

Тогда $\vartheta_1^2 = \alpha - \beta$, $\vartheta_2^2 = \alpha + \beta$, а уравнение (11) примет вид

$$\vartheta^2 = \alpha + \beta \sin 2 \frac{\varphi + \varphi_0}{\mu}.$$

Уравнение (1) имеет своим интегралом кинетический момент $K = a_{22}^2(u)\dot{\varphi}$, в случае поверхности Бертрана он будет иметь вид

$$K = \frac{\dot{\varphi}}{\mu^2(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2})},$$

откуда

$$K dt = \frac{d\varphi}{\mu^2(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2})}.$$

Проинтегрируем по дуге орбиты от перицентра до апоцентра:

$$\int_{0 - \frac{\pi}{2} - \varphi_0}^{\Phi/2 + \frac{\pi}{2} - \varphi_0} a_{22}^2(\vartheta \circ \varphi) d\varphi = K \frac{\tilde{T}}{2},$$

где Φ — период одного колебания по углу, а $\tilde{T}$ — период по времени. Из интеграла с учетом $\Phi = \mu\pi$, $\tilde{\varphi} = \frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{2}{K} \int_{0 - \frac{\pi}{2} - \varphi_0}^{\Phi/2 + \frac{\pi}{2} - \varphi_0} \frac{d\varphi}{\mu^2(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2}) \circ \vartheta(\varphi)} = \\ &= \frac{2}{K\mu^2} \int_{0 - \frac{\pi}{2} - \varphi_0}^{\Phi/2 + \frac{\pi}{2} - \varphi_0} \frac{d\varphi}{\alpha + \beta \sin\left(\frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2}\right) + c - \frac{t}{\alpha + \beta \sin\left(\frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2}\right)}} = \\ &= \frac{1}{\mu K} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi} + c - \frac{t}{\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi}}} = \frac{1}{\mu K} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}}{(\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi})^2 + c(\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi}) - t}. \end{aligned}$$

Замена $\tau = \operatorname{tg} \frac{\tilde{\varphi}}{2}$, $d\tilde{\varphi} = \frac{2d\tau}{1 + \tau^2}$ приводит от тригонометрических функций к дробно-рациональным:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{\left(\alpha + \frac{2\beta\tau}{1 + \tau^2}\right) \frac{2d\tau}{1 + \tau^2}}{\left(\alpha + \frac{2\beta\tau}{1 + \tau^2}\right)^2 + c\left(\alpha + \frac{2\beta\tau}{1 + \tau^2}\right) - t} = \\ &= \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{2(\alpha + \alpha\tau^2 + 2\beta\tau)d\tau}{(\alpha + \alpha\tau^2 + 2\beta\tau)^2 + (c\alpha - t)(1 + \tau^2)^2 + 2\beta c\tau(1 + \tau^2)} = \\ &= \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{2(\alpha + \alpha\tau^2 + 2\beta\tau)d\tau}{\tau^4(\alpha^2 + c\alpha - t) + \tau^3(4\beta\alpha + 2\beta c) + \tau^2(4\beta^2 + 2\alpha^2 + 2c\alpha - 2t) + \tau(4\alpha\beta + 2\beta c) + \alpha^2 + c\alpha - t}. \end{aligned}$$

Знаменатель представляет из себя возвратный многочлен четвертой степени, это позволяет легко разложить его на множители:

$$\tilde{T} = \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{2\alpha \left(\tau^2 + \frac{2\beta}{\alpha} \tau + 1 \right) d\tau}{(\alpha^2 + \alpha c - t) \left(\tau^2 + \beta \frac{2\alpha + c - \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t} \tau + 1 \right) \left(\tau^2 + \beta \frac{2\alpha + c + \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t} \tau + 1 \right)}.$$

В дальнейшем будем использовать сокращения

$$\beta_+ = \beta \frac{2\alpha + c + \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t}, \quad \beta_- = \beta \frac{2\alpha + c - \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t}.$$

Запишем интеграл С учетом введенных сокращений:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{\mu K \sqrt{\Delta} (\alpha^2 + c\alpha - t)} \left(\int_{-1}^1 \frac{(\alpha \sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t) d\tau}{\tau^2 + \beta_+ \tau + 1} + \int_{-1}^1 \frac{(\alpha \sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t) d\tau}{\tau^2 + \beta_- \tau + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu K \sqrt{\Delta} (\alpha^2 + c\alpha - t)} \left((\alpha \sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t) I_1 + (\alpha \sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t) I_2 \right). \end{aligned}$$

С помощью формулы (в случае $4ac - b^2 > 0$)

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$

находим:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau^2 + \beta_+ \tau + 1} = \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\tau + \beta_+}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 + \beta_+}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-2 + \beta_+}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \right). \end{aligned}$$

Последнее упрощается с помощью тождества $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$:

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{4}{\sqrt{4 - \beta_+^2}}}{1 + \frac{\beta_+^2 - 4}{4 - \beta_+^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{4 - \beta_+^2}}.$$

Аналогичное выражение получается для I_2 :

$$I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{4 - \beta_-^2}}.$$

Таким образом, период равен:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \frac{\pi}{\mu K \sqrt{\Delta} (\alpha^2 + c\alpha - t)} \left(\frac{\alpha \sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} + \frac{\alpha \sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t}{\sqrt{4 - \beta_-^2}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\mu K \sqrt{\Delta}} \left(\frac{\alpha \sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t}{(\alpha^2 + c\alpha - t) \sqrt{4 - \beta^2 \frac{(2\alpha + c + \sqrt{\Delta})^2}{(\alpha^2 + c\alpha - t)^2}}} + \frac{\alpha \sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t}{(\alpha^2 + c\alpha - t) \sqrt{4 - \beta^2 \frac{(2\alpha + c - \sqrt{\Delta})^2}{(\alpha^2 + c\alpha - t)^2}}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\mu K \sqrt{\Delta}} \left(\frac{\sqrt{\Delta} + c}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{\sqrt{\Delta} + c}{2}\right)^2 - \beta^2}} + \frac{\sqrt{\Delta} - c}{\sqrt{\left(\alpha - \frac{\sqrt{\Delta} - c}{2}\right)^2 - \beta^2}} \right).\end{aligned}$$

В последнем переходе первая дробь сократилась на $\alpha - \frac{2t}{\sqrt{\Delta} + c}$, а вторая на $\alpha + \frac{2t}{\sqrt{\Delta} - c}$. Вспоминая теперь связь $T = q\tilde{T}$ и определение величин α и β , получаем окончательно искомое утверждение. Теорема доказана.

Время движения по неограниченным орбитам. Если траектория неограниченная, то, согласно определению 1, орбита выходит на край поверхности, однако частица, движущаяся по этой орбите, может достигнуть границы как за конечное время, так и за бесконечное.

Утверждение 4. Пусть (S, V) — пара Бертрана, где S — поверхность вращения с координатами $(\vartheta, \varphi \bmod 2\pi)$ и римановой метрикой (4), $V(\vartheta)$ — замыкающий потенциал на S . Тогда:

1) если максимальная поверхность параметризована $t = 0, c = 0$, то в случае потенциала $V_1(\vartheta) = A\vartheta$ ($A < 0$) граница $\vartheta = 0$ достигается за бесконечное время, граница $\vartheta = \infty$ не достигается, а в случае потенциала $V_2(\vartheta) = \frac{A}{\vartheta^2}$ ($A(\vartheta^4 + t) > 0$), обе границы $\vartheta = 0, \vartheta = \infty$ не достигаются;

2) если максимальная поверхность параметризована $t = 0, c > 0$, то в случае потенциала $V_1(\vartheta)$ граница $\vartheta = 0$ достигается за конечное время, граница $\vartheta = \infty$ не достигается, а в случае потенциала $V_2(\vartheta)$ обе границы $\vartheta = 0, \vartheta = \infty$ не достигаются;

3) если максимальная поверхность параметризована $t = 0, c < 0$, то в случае потенциала $V_1(\vartheta)$ граница $\vartheta = \sqrt{-c}$ достигается за бесконечное время, граница $\vartheta = \infty$ не достигается, а в случае потенциала $V_2(\vartheta)$ граница $\vartheta = \sqrt{-c}$ достигается за бесконечное время, граница $\vartheta = \infty$ не достигается;

4) если максимальная поверхность параметризована $t > 0$, то в случае потенциала V_2 граница $\vartheta = \infty$ не достигается, граница $\vartheta = \vartheta_2$ достигается за бесконечное время;

5) если $(\mu, c, t) \in \{(t < 0, c < 0, c^2 + 4t \geq 0)\}$, то имеем две максимальные поверхности $(0, \vartheta_1) \times S^1$ и $(\vartheta_2, \infty) \times S^1$ с потенциалом V_2 , причем для первой поверхности граница $\vartheta = 0$ достигается за конечное время, граница $\vartheta = \vartheta_1$ достигается за бесконечное время, а для второй поверхности граница $\vartheta = \vartheta_2$ достигается за бесконечное время, граница $\vartheta = \infty$ не достигается;

б) если $(\mu, c, t) \in \{c^2 + 4t < 0\} \cup \{c > 0, t < 0, c^2 + 4t \geq 0\}$, то имеем две максимальные поверхности $(0, \sqrt[4]{-t}) \times S^1$ и $(\sqrt[4]{-t}, \infty) \times S^1$ с потенциалом V_2 , причем для первой поверхности граница $\vartheta = 0$ достигается за конечное время, граница $\vartheta = \sqrt[4]{-t}$ достигается за конечное время, а для второй поверхности граница $\vartheta = \sqrt[4]{-t}$ достигается за конечное время, граница $\vartheta = \infty$ не достигается.

З а м е ч а н и е 5. Предыдущее утверждение легко переформулируется и для немаксимальных поверхностей Бертрана. Для подповерхности $S' \approx (a_1, b_1) \times S^1$ поверхности Бертрана $S \approx (a, b) \times S^1$, где $a < a_1 < b_1 < b$, ограничением замыкающего потенциала $V(\vartheta)$ на (a_1, b_1) также будет замыкающим. В случае подповерхности S' ее границы $\vartheta = a_1$ и $\vartheta = b_1$ достигаются, и притом за конечное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достижимость границы связана с тем, что существуют значение энергии E и кинетического момента K , такие, что орбита с этими значениями выходит на границу поверхности ϑ_0 . Также в окрестности границы возможно движение с такими первыми интегралами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$W(\vartheta_0) = E - V(\vartheta_0) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(\vartheta_0)} \geq 0. \quad (12)$$

Согласно (2) выполнено $\tilde{V}(\vartheta_0) = \frac{a_{11}^2(\vartheta_0)\dot{\vartheta}_0^2}{2}$, что доказывает необходимость. Достаточность следует из теоремы существования решения задачи Коши дифференциального уравнения (2) с начальным условием $\vartheta(\varphi_0) = \vartheta_0$.

Далее, время движения от параллели $\vartheta = \vartheta_{11}$ до параллели $\vartheta = \vartheta_{22}$ по орбите с энергией E и моментом K , согласно 2, равно

$$T = \int_{\vartheta_{11}}^{\vartheta_{22}} \frac{a_{11}(\vartheta)d\vartheta}{\sqrt{2(E - V(\vartheta)) - \frac{K^2}{a_{22}^2(\vartheta)}}}.$$

Рассмотрим поверхность $S \approx (0, \infty) \times S^1$, соответствующую $c = t = 0$, и потенциал $V_1(\vartheta)$. Тогда время движения между параллелями ϑ_{11} и ϑ_{22} таково:

$$T = \int_{\vartheta_{11}}^{\vartheta_{22}} \frac{d\vartheta}{\vartheta^2 \sqrt{2(E - A\vartheta) - K^2\mu^2\vartheta^2}}.$$

Если граница $\vartheta = \infty$ достигается, то тогда существует орбита с некоторыми E , K и $\tilde{V}(\vartheta)$ в окрестности ∞ неотрицательна. Но при $\vartheta \rightarrow \infty$ функция $\tilde{V}(\vartheta) = E - A\vartheta - \frac{K^2\mu^2}{2}\vartheta^2$ стремится к $-\infty$, а это означает (по критерию (12)), что данная граница не достигается.

Видно, что если взять $E > 0$, то $\vartheta \rightarrow 0$ функция $\tilde{V}(\vartheta) \rightarrow E$, т.е. граница достигается. Также $\vartheta_{11} = 0$ интеграл в нуле расходится. Таким образом, граница $\vartheta = 0$ достигается за бесконечное время.

Пусть $S_1 \approx (0, \sqrt[4]{-t})$ — поверхность Бертрана из области Ω_3 , т.е. соответствующая значениям параметров $\{c^2 + 4t < 0\} \cup \{c^2 + 4t \geq 0, t < 0, c > 0\}$. На ней действует

потенциал $V_2 = A\vartheta^{-2}$ ($A > 0$). Тогда время движения между параллелями ϑ_{11} и ϑ_{22} для нее вычисляется следующим образом:

$$T = \int_{\vartheta_{11}}^{\vartheta_{22}} \frac{d\vartheta}{(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2})\sqrt{2(E - \frac{A}{\vartheta^2}) - K^2\mu^2(\vartheta^2 + c - t\vartheta^{-2})}}.$$

Рассмотрим значение кинетического момента $K = \sqrt{\frac{2A}{\mu^2 t}}$ и значение энергии $E > K^2\mu^2 c$. При $\vartheta \rightarrow 0$ функция $\tilde{V}(\vartheta)$ стремится к $E - K^2\mu^2 c > 0$, значит граница $\vartheta = 0$ достигается. Соответственно интеграл при $\vartheta \rightarrow 0$ сходится, значит граница $\vartheta = 0$ достигается за конечное время. При ϑ стремящимся к $\vartheta_{22} = \sqrt[4]{-t}$ и достаточно большом значении E функция $\tilde{V}(\vartheta)$ неотрицательна, интеграл сходится, значит граница $\vartheta = \sqrt[4]{-t}$ достигается и за конечное время.

Аналогично разбираются остальные случаи. Теорема доказана.

Аналогичный результат справедлив и для поверхности Бертрана с псевдоримановой метрикой.

Утверждение 5. Пусть $(\tilde{S}, V)$ — пара Бертрана, где $\tilde{S}$ — поверхность вращения с координатами $(\vartheta, \varphi \bmod 2\pi)$ и псевдоримановой метрикой (4), $V(\vartheta)$ — замыкающий потенциал на $\tilde{S}$. Тогда:

1) если $\tilde{S} \approx (0, \sqrt{-c}) \times S^1$, $t = 0$, $V = A\vartheta$ ($A < 0$), то граница $\vartheta = 0$ может достигаться за конечное время, граница $\vartheta = \sqrt{-c}$ достигается только за бесконечное время;

2) если $\tilde{S} \approx (0, \sqrt{-c}) \times S^1$, $t = 0$, $V = A\vartheta^{-2}$ ($A > 0$), то траектория на границу $\vartheta = \sqrt{-c}$ может выйти только за бесконечное время, на границу $\vartheta = 0$ не может выйти даже за бесконечное время;

3) если $\tilde{S} \approx (0, \vartheta_2) \times S^1$, $t > 0$, $V = A\vartheta^{-2}$ ($A > 0$), то траектория на границу $\vartheta = 0$ может выйти за конечное время, а на границу $\vartheta = \vartheta_2$ может выйти лишь за бесконечное время;

4) если $\tilde{S} \approx (\vartheta_1, \sqrt[4]{-t}) \times S^1$, $t < 0$, $c < 0$, $c^2 + 4t > 0$, $V = A\vartheta^{-2}$ ($A < 0$), то граница $\vartheta = \sqrt[4]{-t}$ достижима за конечное время, а граница $\vartheta = \vartheta_1$ достижима лишь за бесконечное время;

5) если $\tilde{S} \approx (\sqrt[4]{-t}, \vartheta_2) \times S^1$, $t < 0$, $c < 0$, $c^2 + 4t > 0$, $V = A\vartheta^{-2}$ ($A > 0$), то граница $\vartheta = \sqrt[4]{-t}$ достижима за конечное время, а граница $\vartheta = \vartheta_2$ достижима лишь за бесконечное время.

Доказательство аналогично риманову случаю, и мы его не приводим. Как и в римановом случае, для немаксимальных поверхностей Бертрана (если такая поверхность компактно вкладывается в максимальную) обе границы могут достигаться, притом за конечное время.

2. Бифуркационные диаграммы

Чтобы описать топологию слоений Лиувилля фазового пространства, рассмотрим отображение момента $F_{EK}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое определяется так: $(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) \rightarrow (K, E)$.

Также построим бифуркационные диаграммы отображения момента для поверхностей Бертрана, т.е. на плоскости $ОКЕ$ изобразим множество Σ точек (K, E) , таких, что существует интегральная линия гамильтоновой системы, вдоль которой интегралы энергии и момента принимают значения E и K .

Каждой точке (K, E) соответствует слой слоения Лиувилля (совместная поверхность уровня интегралов K, E). Случаи $K > 0$ и $K < 0$ симметричны, бифуркационная диаграмма симметрична относительно оси $ОЕ$, поэтому ограничимся построением в правой полуплоскости $K > 0$. Множество Σ разбивается на несколько подмножеств:

Σ_2 — образ множества точек фазового пространства, в которых $\text{rk } dF_{EK} = 2$;

Σ_1 — образ множества точек фазового пространства, в которых $\text{rk } dF_{EK} = 1$;

Σ_0 — образ множества точек фазового пространства, в которых $\text{rk } dF_{EK} = 0$;

I_B — образ множества точек, которые лежат на фазовых траекториях, соответствующих ограниченным орбитам.

З а м е ч а н и е 6. Канонически бифуркационной диаграммой называется образ критических точек фазового пространства, т.е. таких, в которых падает ранг отображения момента, другими словами $\text{rk } dF_{EK} \leq 1$. Более того, в предыдущем определении обыкновенно под Σ_i понимают образ множества точек фазового пространства, а которых минимальное значение ранга равно i . Однако в случае системы Бертрана $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$. Далее, в виду того, что $\text{grad } K \neq 0$ в силу (10), заключаем, что $\Sigma_0 = \emptyset$.

Что же касается множества Σ_1 , то для него выполнено условие $\text{rk } dF_{EK} = 1$, или $\text{rk}(\text{grad } K, \text{grad } E) = 1$, что равносильно линейной зависимости векторов $\text{grad } E$ и $\text{grad } K$. С учетом (10) линейная зависимость означает, что

$$\begin{cases} -2 \frac{a'_{22}(\vartheta)}{\mu^2 a_{22}^5(\vartheta)} p_\vartheta^2 + \frac{a'_{22}(\vartheta)}{a_{22}^3(\vartheta)} p_\varphi^2 + V'(\vartheta) = 0, \\ \frac{p_\vartheta}{a_{11}^2(\vartheta)} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{a'_{22}(\vartheta)}{a_{22}^3(\vartheta)} p_\varphi^2 + V'(\vartheta) = 0, \\ p_\vartheta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Эти условия в точности означают, что данные значения K, E достигаются на круговой орбите $\{\vartheta\} \times S^1$, и только на ней. Поэтому прообраз $F_{EK}^{-1}(\Sigma_1)$ состоит из точек фазовых траекторий, соответствующих круговым орбитам. Верно и обратное, на круговых орбитах выполняются условия (13). Таким образом, Σ_1 состоит только из образа точек фазовых траекторий, соответствующих круговым орбитам. Значит, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.

Далее строятся диаграммы для системы на максимальной поверхности вращения $\tilde{S}$ с псевдоримановой метрикой (4). Для каждого случая: $t = 0, V_1 = A\vartheta + B$; $t = 0, V_2 = A/\vartheta^2 + B$; $t > 0, V_2$; $t < 0, V_2$ — будет своя бифуркационная диаграмма. Отметим, что константа B ни на что не влияет, поэтому далее мы ее будем опускать.

Утверждение 6. Рассмотрим поверхность Бертрана $\tilde{S}$, отвечающую значениям параметров (c, t, μ) : $t = 0$, $c < 0$, и потенциал $V = A\vartheta$ ($A < 0$). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма (на плоскости (K, E)) имеет вид, представленный на рис. 1). Координаты точки A_1 следующие: $(\sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}}, A\sqrt{-c})$, точка A_1 не принадлежит Σ , множество Σ_1 представляет собой кривую

$$E_1(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2 K^2}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty \right\}.$$

Область Σ_2 делится кривыми $E_2(K)$, $E_3(K)$ на четыре зоны (рис. 2): I_B, I_1, I_2, I_3 , где

$$E_2(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{c\mu^2 K^2}{2}, 0 < K < \infty \right\},$$

$$E_3(K) = \left\{ (K, E): E = A\sqrt{-c}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty \right\}.$$

Прообраз любой точки из Σ_1 представляет собой окружность, прообраз любой точки из I_B — тор (см. рис. 2). Прообраз каждой точки из I_1 — цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны. Прообраз каждой точки из I_2 — цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на соответствующих траекториях не продолжается ни до $+\infty$, ни до $-\infty$. Прообраз I_3 — пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в $\{p_\vartheta < 0\}$, не продолжается до $+\infty$, но продолжается до $-\infty$, для цилиндра $\{p_\vartheta > 0\}$ наоборот.

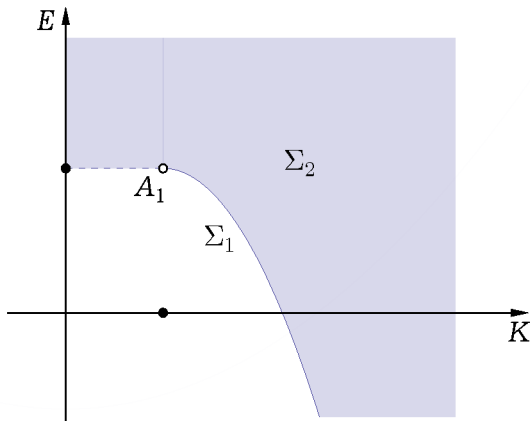


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма l_1, V_1

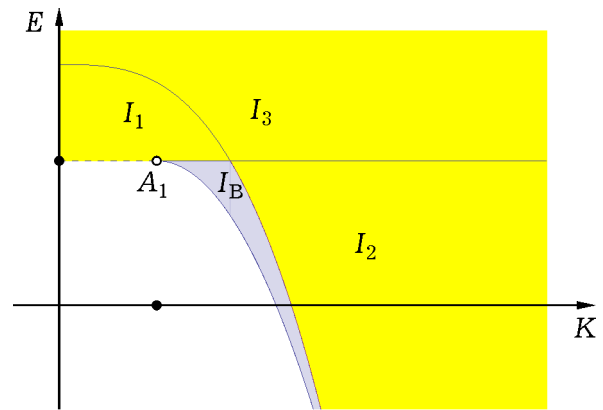


Рис. 2. Детализированная диаграмма l_1, V_1

Доказательство. Множество Σ состоит из точек (K, E) , отвечающих тем значениям K, E , при которых существуют орбиты с соответствующими значениями интегралов энергии и момента. Согласно (2) при некотором допустимом ϑ выполняется $E = \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} a_{11}^2 - \frac{K^2}{2a_{22}^2} + V$. Перегруппируем слагаемые:

$$E - V + \frac{K^2}{2a_{22}^2} = \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} a_{11}^2 \geq 0.$$

Таким образом, необходимым условием того, чтобы было возможно движение с энергией E и моментом K , является существование такого ϑ_0 из допустимого интервала $(0, \sqrt{-c})$, что

$$E - V(\vartheta_0) + \frac{K^2}{2a_{22}^2(\vartheta_0)} \geq 0. \quad (14)$$

Это же условие является и достаточным, так как, если оно выполнено, то можно подобрать $\dot{\vartheta}$, чтобы выполнялось (2), а далее воспользоваться теоремой существования решения.

Далее, подставим в (14) заданную метрику $a_{22}^2(\vartheta) = -\frac{1}{\mu^2(\vartheta^2 + c)}$ и потенциал $V(\vartheta) = A\vartheta$, обозначим $\sigma(\vartheta) = E - A\vartheta - \frac{K^2\mu^2c}{2} - \frac{K^2\mu^2\vartheta^2}{2}$. Условие (14) существования $\vartheta_0 \in (0, \sqrt{-c})$ примет вид $\sigma(\vartheta_0) \geq 0$. Для поиска максимума заметим, что производная $\sigma'(\vartheta) = -A - K^2\mu^2\vartheta$ обращается в нуль в точке $\vartheta_{max} = -\frac{A}{K^2\mu^2}$.

Если максимум функции σ (т.е. нуль производной σ') принадлежит интервалу $(0, \sqrt{-c})$, то требование существования ϑ_0 , удовлетворяющей $\sigma(\vartheta_0) \geq 0$, эквивалентно тому, что функция $\sigma(\vartheta)$ неотрицательна хотя бы в одной точке, а это эквивалентно $\sigma(\vartheta_{max}) \geq 0$.

Таким образом,

$$E + \frac{A^2}{\mu^2K^2} - \frac{\mu^2K^2c}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2K^2} \geq 0,$$

что соответствует тому, что при $K > \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$ точки (E, K) расположены на кривой $E_1(K)$ или выше нее.

Если функция σ не имеет максимума на $(0, \sqrt{-c})$, то она возрастает и существование ϑ_0 , удовлетворяющего условию $\sigma(\vartheta_0) \geq 0$, эквивалентно условию $\sigma(\sqrt{-c}) > 0$. В итоге $E > A\sqrt{-c}$ для точек при $K \leq \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$ (на рис. 1 уровень $E = A\sqrt{-c}$ обозначен пунктиром).

Покажем, что Σ_1 задается кривой $E_1(K)$. Первый способ состоит в том, что каждая круговая орбита $\vartheta = \vartheta_0$ имеет свою уникальную K , поэтому можно из первого уравнения системы (13) выразить ϑ через K и, подставив в (6), получить, как связаны E и K для круговой орбиты. Согласно (13) для $a_{22}^2 = -\frac{1}{\mu^2(\vartheta^2 + c)}$ и $V = A\vartheta$ имеем $\mu^2\vartheta K^2 + A = 0$, т.е. $\vartheta = -\frac{A}{\mu^2K^2}$. Далее полученную ϑ вместе с условием $p_\vartheta = 0$ подставим в (6) и получим $E_1(K)$:

$$E = \frac{K^2\mu^2c}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2K^2}.$$

Так как $\vartheta \in (0, \sqrt{-c})$ (см. табл. 1), то $K \in (\sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}}, \infty)$.

Второй способ состоит в том, что условия (13) определяют круговую орбиту. Обратимся к уравнению орбиты (11), оно показывает, что в случае замкнутой орбиты, происходит флуктуация вокруг положения $-\frac{A}{\mu^2K^2}$ с амплитудой $\sqrt{1 + \frac{2E\mu^2K^2}{A^2} - c\frac{\mu^4K^4}{A^2}}$, для круговой орбиты амплитуда приравнивается к нулю, что дает ту же зависимость $E_1(K)$ между E и K .

Множество I_B состоит из точек (K, E) , соответствующих ограниченным орбитам. Для установления таких точек воспользуемся явным видом орбиты $\vartheta(\varphi)$ и определим, при каких

условиях на (K, E) она не выходит на границы $\{0\} \times S^1$, $\{\sqrt{-c}\} \times S^1$ ни при каком φ :

$$0 < -\frac{A}{\mu^2 K^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2E\mu^2 K^2}{A^2} - c \frac{\mu^4 K^4}{A^2}} \right), \quad (15)$$

$$-\frac{A}{\mu^2 K^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E\mu^2 K^2}{A^2} - c \frac{\mu^4 K^4}{A^2}} \right) < \sqrt{-c}. \quad (16)$$

Эти неравенства со всеми условиями на константы $A < 0$, $c < 0$, $K > \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$ дают:

$$E < \frac{cK^2}{2}, \quad E < \sqrt{-c}A, \quad E \geq \frac{K^2\mu^2c}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2K^2}.$$

Прообразом каждой точки $(K, E) \in I_B$ является компактное множество, и оно представляет собой тор Лиувилля $T^2 \approx F^{-1}[(K, E)]$ в случае $I_B \setminus \Sigma_1$ и окружностью в случае Σ_1 .

На множестве I_2 каждой точке (K, E) соответствуют орбиты, ограниченные только с одной стороны (со стороны параллели $\{\sqrt{-c}\} \times S^1$), так как нарушается условие (15) и выполняется условие (16). По-прежнему каждая такая орбита получается из другой поворотом вокруг оси вращения поверхности, т.е. орбита $\vartheta = \vartheta_1(\varphi)$ получается из орбиты $\vartheta = \vartheta_2(\varphi)$ подстановкой $\vartheta_1(\varphi) = \vartheta_2(\varphi + \varphi_0)$ для некоторого φ_0 . Поэтому прообраз любой точки из I_2 будет цилиндром. Согласно утверждению 5 траектория выходит за конечное время на границу $\vartheta = 0$ поверхности S' , значит, и фазовая траектория выходит на границу цилиндра за конечное время, т.е. поток на цилиндре неполон.

Аналогично орбиты, соответствующие зоне I_1 , ограничены со стороны параллели $\{0\} \times S^1$ и не ограничены с противоположной. Прообразом каждой точки из I_1 тоже будет цилиндр, но уже с полным потоком.

Для зоны I_3 верно, что соответствующие орбиты будут не ограничены с двух сторон. Теперь орбиты делятся на две группы – с положительным значением p_ϑ (точка движется от 0 до $\sqrt{-c}$) и отрицательным p_ϑ (точка движется от $\sqrt{-c}$ до 0), что означает, что прообразами в зоне I_3 будут пары цилиндров, симметричные в фазовом пространстве M^4 относительно гиперплоскости $p_\vartheta = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что прообраз любой точки $(K, E) \in \Sigma$ будет симметричен относительно гиперплоскости $p_\vartheta = 0$. Аналогично доказываются следующие 3 утверждения.

Утверждение 7. Пусть дана поверхность Бертрана $\tilde{S}$, отвечающая значениям параметров (c, t, μ) : $t = 0$, и потенциал $V = A\vartheta^{-2}$ ($A > 0$). Тогда для соответствующей гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 3. Точка A_1 имеет координаты $(\frac{\sqrt{2A}}{-\mu c}, \frac{A}{-c})$ и не принадлежит Σ , множество Σ_1 — это кривая

$$E_1(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \sqrt{2A}\mu K, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty \right\}.$$

Область Σ_2 делится кривой $E_2(K)$ на две зоны I_B, I_1 (рис. 4), где

$$E_2(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{A}{-c}, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty \right\}.$$

Прообраз любой точки из Σ_1 — окружность, прообраз любой точки из I_B — тор (см. рис. 4), прообраз любой точки из I_1 — цилиндр с полными фазовыми потоками.

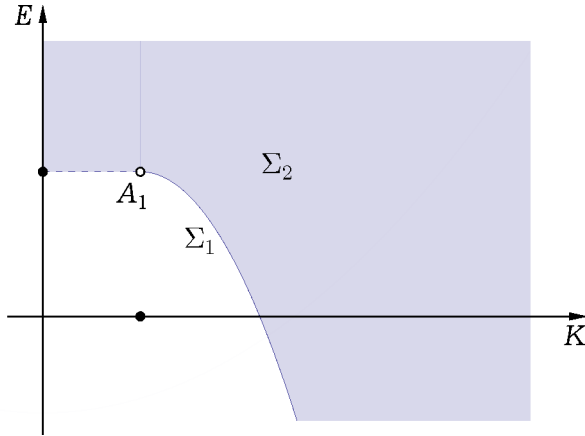


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма l_1, V_2

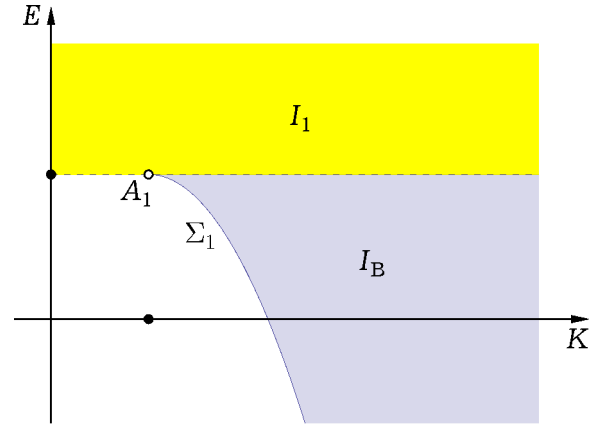


Рис. 4. Детализированная диаграмма l_1, V_2

Утверждение 8. Рассмотрим поверхность Бертрана $\tilde{S}$, соответствующую значениям параметров (c, t, μ) : $t > 0$, и потенциал $V = A\vartheta^{-2}$ ($A > 0$). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 5). Точки A_1 и A_2 имеют координаты $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\vartheta_2^4+t}}, \frac{A}{\vartheta_2^2})$ и $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t})$ соответственно, обе они не принадлежат Σ . Множество Σ_1 представляет собой кривую

$$E_1(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \mu^2 K^2 \sqrt{\frac{2A}{\mu^2 K^2} - t}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2 \sqrt{-c}}} < K < \infty \right\}.$$

Область Σ_2 делится кривыми $E_2(K), E_3(K)$ на четыре зоны I_B, I_1, I_2, I_3 (рис. 6), где

$$E_2(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{A}{\vartheta_2^2}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\vartheta_2^4+t}} < K < \infty \right\},$$

$$E_3(K) = \left\{ (K, E): K = \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t} < E < \infty \right\}.$$

Прообраз любой точки из Σ_1 — окружность; прообраз любой точки из I_B — тор (см. рис. 6); прообраз каждой точки из I_1 — цилиндр, причем соответствующие фазовые потоки полны; прообраз любой точки из I_2 — цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на соответствующих фазовых траекториях не продолжается ни до $+\infty$, ни до $-\infty$. Прообраз I_3 — пара цилиндров с неполными потоками, время на траекториях цилиндра, лежащего в $\{p_\vartheta < 0\}$, не продолжается до $+\infty$, но продолжается до $-\infty$, для цилиндра $\{p_\vartheta > 0\}$ наоборот.

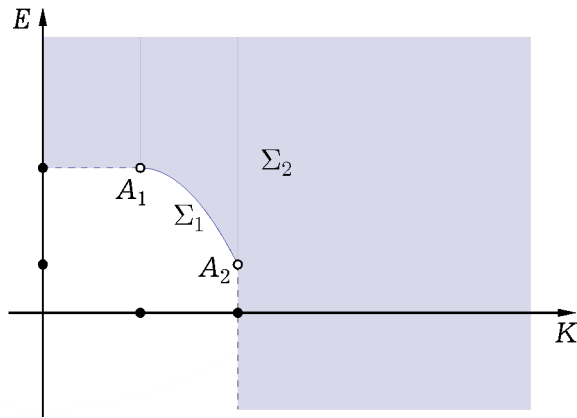


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма Ω_1, V_2

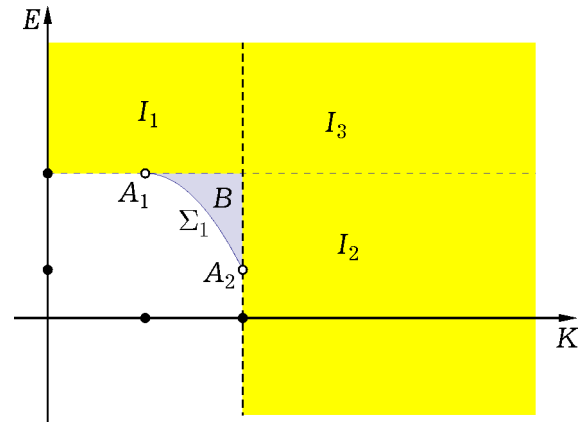


Рис. 6. Детализированная диаграмма Ω_1, V_2

Утверждение 9. Рассмотрим поверхность Бертрана $\tilde{S}$ с координатами (ϑ, φ) и метрикой (4), соответствующую значениям параметров (c, t, μ) из области $\{t < 0, c^2 + 4t > 0, c < 0\}$; без ограничения общности считаем, что координата ϑ меняется в пределах первой компоненты $(\vartheta_1, \sqrt[4]{-t})$. На $\tilde{S}$ действует потенциал $V = A\vartheta^{-2}$ ($A < 0$). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 7. Точка A_1 имеет координаты $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\vartheta_1^4+t}}, \frac{A}{\vartheta_1^2})$ и не принадлежит Σ . Множество Σ_1 представляет собой кривую

$$E_1(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \mu^2 K^2 \sqrt{\frac{2A}{\mu^2 K^2} - t}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\vartheta_1^4+t}} < K < \infty \right\}.$$

Область Σ_2 делится кривыми $E_2(K)$, $E_3(K)$ на четыре зоны I_B, I_1, I_2, I_3 (рис. 8), где

$$E_2(K) = \left\{ (K, E): E = -\frac{\mu^2 K^2}{2} \sqrt{c^2 + 4t}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\vartheta_1^4+t}} < K < \infty \right\},$$

$$E_3(K) = \left\{ (K, E): E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \sqrt{-t}\mu^2 K^2 + \frac{A}{\sqrt{-t}}, 0 < K < \infty \right\}.$$

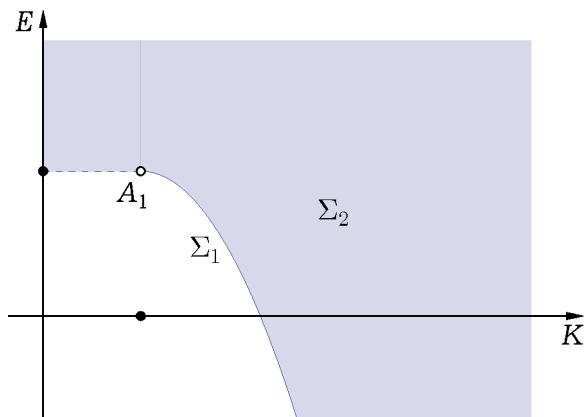


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма Ω_2, V_2

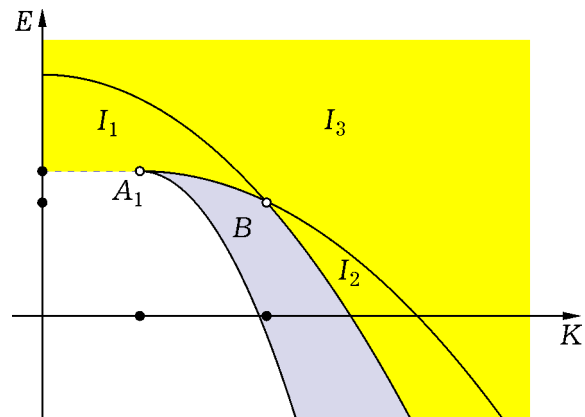


Рис. 8. Детализированная диаграмма Ω_2, V_2

Прообраз любой точки из Σ_1 — окружность, прообраз любой точки из I_B — тор (см. nfigpic::p44). Прообраз каждой точки из I_1 — цилиндр, причем соответствующие фазовые потоки полны; прообраз каждой точки из I_2 — цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на траекториях, лежащих на цилиндре не продолжается вправо до $+\infty$ и не продолжается влево до $-\infty$. Прообраз I_3 — пара цилиндров с неполными потоками, время на траекториях цилиндра, лежащего в $\{p_\vartheta < 0\}$, продолжается до $+\infty$, но не продолжается до $-\infty$, для цилиндра $\{p_\vartheta > 0\}$ наоборот.

Заключение

Для движения в пространствах, обладающих симметрией вращения, под действием центрального закона сил, известны все случаи, приводящие к замкнутым траекториям. Описанные системы являются гамильтоновыми, при работе с которыми очень эффективными оказываются методы гамильтоновой механики, в том числе геометрические. Для исследования фазового пространства указанных систем геометрическими методами оказывается полезным знание интервалов времени, необходимых траекториям, чтобы те замкнулись или вышли на границу. Соответствующие временные интервалы установлены в утверждениях 3, 4, 5.

Как показывают утверждения 4, 5, время вдоль интегральных траекторий не всегда продолжается до бесконечности, что влечет неполноту соответствующих фазовых потоков, а как следствие — невозможности напрямую использовать некоторые классические результаты, такие, как теорема Лиувилля [10]. Вместо этого нужно пользоваться их аналогами, например теоремой Алешкина [9]. Более того, знание точной зависимости периода T движения по замкнутой орбите от полной энергии E помогает явно построить координаты «действие-угол», в которых фазовый поток выпрямляется и многие объекты (симплектическая форма) принимают наиболее простой вид.

Для однородных механических систем строение фазового пространства несет много информации о типе возникающего движения. Например, для математического маятника фазовое пространство — плоскость $(x, \dot{x})$ — состоит из точек, соответствующих состоянию покоя, окружностей (кривых, гомеоморфных окружности), соответствующих малым колебаниям, неограниченных линий (гомеоморфных прямой), соответствующих движению по окружности вокруг точки крепления нити, а также сепаратрисы, разделяющей разные типы движений. Подобное представление приведено и для системы Бертрана, построены бифуркационные диаграммы. Видно, что при переходе из зоны I_B в зону I_1 ограниченное резонансное движение переходит в неограниченное.

Список литературы

1. Gordon W.B. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems // J. Math. Mech. 1969. Vol. 19. P. 111–114.

2. Ballesteros Á., Enciso A., Herranz F.J., Ragnisco O. Hamiltonian systems admitting a Runge — Lenz vector and an optimal extension of Bertrand's theorem to curved manifolds // Commun. Math. Phys. 2009. Vol. 290. P. 1033–1049. DOI: [10.1007/s00220-009-0793-5](https://doi.org/10.1007/s00220-009-0793-5)
3. Козлов В.В. О динамике в пространствах постоянной кривизны // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика. 1994. № 2. С. 28–35.
4. Santoprete M. Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution // J. Math. Phys. 2008. Vol. 49, no. 4. Art no. 042903 (16 p.). DOI: [10.1063/1.2912325](https://doi.org/10.1063/1.2912325)
5. Загрядский О.А., Кудрявцева Е.А., Федосеев Д.А. Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 8. С. 39–78.
6. Загрядский О.А., Федосеев Д.А. О явном виде метрик Бертрана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2013. Т. 67, № 5. С. 46–50.
7. Загрядский О.А. Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения с псевдоримановой метрикой // Вестн. Моск. ун-та (в печати).
8. Fomenko A.T., Konyaev A.Yu. Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems // In: Zgurovsky V.Z., Sadovnichiy V.A., eds. Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications. Springer. 2014. P. 3–21. (Ser. Solid Mechanics and Its Applications; Vol. 211) DOI: [10.1007/978-3-319-03146-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_1)
9. Алешкин К.Р. Топология интегрируемых систем с неполными полями // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 9. Р. 49–64.
10. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. 444 с.

Bertrand systems and their phase space

Zagryadskij O. A.

*grpcozag@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University

Keywords: Bertrand system, closed orbit, surface of revolution, bifurcation diagram, Liouville — Arnold theorem

Consider a pair (S, V) , where S is a two-dimensional surface of revolution without equators, i.e. cylinder equipped Riemannian metric of revolution, V is a central potential on S such that it keeps constant when the group of rotation acts. Also consider central potentials acting on the surfaces equipped Pseudoriemannian metric of revolution. Lets select Bertrand pairs in the set of all considered pairs — the potential has to be locking, i.e. under the influence of it all bounded orbits must be closed. Such dynamical systems are Hamiltonian ones possessed four-dimensional phase space. And one could represent Bertand pairs as five-parametric set, three parameters define the inner product of the manifold, other two define potential. It is proved that only generalized law of universal gravitation and the generalized oscillator Hook law could be locking.

It is well-known that in case of closed orbit the period of moving depends on the full energy, but not depends on angular momentum (classical Gordon's theorem); in this paper we established the explicit form of this relation for Bertrand systems. In case of nonbounded orbits we calculated full time of moving, noted the infinite cases, and derived the fullness of corresponding phase flows, i.e. whether time-parameter could be continued to infinitely on the integral curves of Hamiltonian vector field of energy.

We show, that Bertrand systems in pseudoriemannian case weren't integrable by the Liouville — Arnold theorem, however the connected components of regular Liouvill folia of two first integrals energy and angular momentum stayed either torii or cylinders. We proved any folia of the foliation could be either circle or torus or cylinder or pair of cylinders. Also we constructed bifurcation diagrams of momentum map, all the diagrams is divided into areas corresponding to different types of Liouville folii. Finally it was discovered whether flows were full or not.

References

1. Gordon W.B. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems. *J. Math. Mech.*, 1969, vol. 19, pp. 111–114.

2. Ballesteros Á., Enciso A., Herranz F.J., Ragnisco O. Hamiltonian systems admitting a Runge — Lenz vector and an optimal extension of Bertrand's theorem to curved manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 2009, vol. 290, iss. 3, pp. 1033–1049. DOI: [10.1007/s00220-009-0793-5](https://doi.org/10.1007/s00220-009-0793-5)
3. Kozlov W.W. Dynamics in spaces of constant curvature. *Vestnik Moscovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika = Moscow University Bulletin. Ser. Mathematics and Mechanics*, 1994, no. 2, pp. 28–35. (in Russian)
4. Santoprete M. Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution. *J. Math. Phys.*, 2008, vol. 49, iss. 4, art no. 042903 (16 p.). DOI: [10.1063/1.2912325](https://doi.org/10.1063/1.2912325)
5. Zagryadskii O.A., Kudryavtseva E.A., Fedoseev D.A. A generalization of Bertrand's theorem to surfaces of revolution. *Matematicheskij sbornik*, 2012, vol. 203, no. 8. pp. 39–78. (English version: *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 8. pp. 1112–1150. DOI: [10.1070/SM2012v203n08ABEH004257](https://doi.org/10.1070/SM2012v203n08ABEH004257)).
6. Fedoseev D.A., Zagryadskii O.A. The Explicit Form of the Bertrand Metric. *Vestnik Moscovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika*, 2013, vol. 67, no. 5, pp. 46–50. (English version: *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2013, vol. 68, iss. 5, pp. 258–262. DOI: [10.3103/S0027132213050094](https://doi.org/10.3103/S0027132213050094)).
7. Zagryadskii O.A. Generalization of Bertrand theorem on the Surface of Revolution with Pseudo-Riemannian metrics. *Vestnik Moscovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika* (to be published).
8. Fomenko A.T., Konyaev A.Yu. Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems. In: Zgurovsky V.Z., Sadovnichiy V.A., eds. *Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications*. Springer. 2014. P. 3–21. (Ser. Solid Mechanics and Its Applications; vol. 211). DOI: [10.1007/978-3-319-03146-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_1)
9. Aleshkin K.R. The topology of integrable systems with incomplete fields *Matematicheskij sbornik*, 2014, vol. 205, no. 9. pp. 49–64. (English version: *Sbornik: Mathematics*, 2014, vol. 205, no. 9, pp. 1264–1278. DOI: [10.1070/SM2014v205n09ABEH004417](https://doi.org/10.1070/SM2014v205n09ABEH004417)).
10. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Integriruemye gamil'tonovy sistemy* [Integrable Hamiltonian Systems] Iszevsk, Udmurtskij universitet publ., 1999. 444 p. (in Russian)