Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 137–151.
DOI: 10.7463/1014.0727148
Представлена в редакцию: 28.07.2014
Исправлена: 19.09.2014

УДК 536.2

Исследование влияния подвижности границы на температурное поле полупространства при воздействии теплового потока

Власов П. А.[1,*]
*pvlx@mail.ru
[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Для одномерной задачи определения температурного поля полупространства с движущейся по заданному закону границей, подверженного воздействию нестационарно-го теплового потока, получена аналитическая зависимость решения от температуры границы области. Для определения температуры границы составлено интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решение которого проведено численно. С использованием полученного представления решения исследованы характерные особенности процесса формирования изучаемого температурного поля при реализации различных законов движения границы и различных законов изменения во времени внешнего теплового потока.

Ключевые слова: температурное поле; полупространство; подвижная граница

Введение

Аналитические методы решения задач занимают особое место в теории теплопроводности. Во многом это объясняется тем, что полученные с их использованием представления решений могут быть использованы как для параметрической анализа теплового состояния изучаемой системы, так и для тестирования разрабатываемых вычислительных алгоритмов. Трудности, возникающие при получении аналитических представлений решений задач теплопроводности, хорошо известны [1].

Многие практически важные инженерные задачи, связанные с расчетом и оптимизацией тепловой защиты аэрокосмических систем, требуют учета подвижности границ изучаемых конструкций [2]. При этом сложности, связанные с получением аналитических представлений соответствующих задач, значимо возрастают даже в тех случаях, когда закон движения границы известен [1]—[6]. Так, в работе [7] задача определения температуры движущейся границы полупространства, подверженного нагреву внешней средой, сведена к задаче решения интегрального уравнения, что позволило изучить характерные особенности процесса

формирования изучаемого температурного поля. В работе [8] получено аналитическое представление решения задачи нахождения температурного поля полупространства с равномерно движущейся границей, подверженного нагреву внешним тепловым потоком.

Основная цель настоящей работы — изучение особенностей процесса формирования температурного поля твердого тела, моделируемого полупространством с движущейся по известному закону $l = l(\mathrm{Fo})$ границей, в условиях нагрева внешним тепловым потоком.

1. Математическая модель

Будем предполагать, что рассматриваемое полупространство является однородным, а интенсивность теплового потока не зависит от пространственных координат. Это позволяет выбрать в качестве объекта исследований одномерную математическую модель изучаемого процесса

$$\frac{\partial\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \quad \xi > l(\mathrm{Fo}), \quad \mathrm{Fo} > 0, \tag{1}$$

$$\vartheta(\xi,0) = 0, \quad \xi > 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=l(\mathrm{Fo})} = -Q(\mathrm{Fo}), \quad \mathrm{Fo} > 0, \tag{3}$$

где $\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})$ — температурное поле полупространства; $l = l(\mathrm{Fo})$ — известный закон движения границы,

$$\xi = \frac{z}{z_*}, \quad \mathrm{Fo} = \frac{\varkappa t}{z_*^2}, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad Q = \frac{q_0 z_*}{\lambda},$$

z — пространственная переменная; z_* — единица масштаба переменной z; t — текущее время; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; T — температура изучаемой области; $T_0 = \mathrm{const}$ — температура изучаемой области в начальный момент времени $t = 0$; q_0 — мощность внешнего теплового потока; λ — коэффициент теплоотдачи на границе $z = 0$ полупространства.

При решении задачи (1)–(3) будем предполагать, что

$$\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})\Big|_{\mathrm{Fo}>0} \in L^2[l(\mathrm{Fo}),\,+\infty), \tag{4}$$

т.е. при каждом фиксированном значении $\mathrm{Fo} > 0$ функция $\vartheta(\xi,\mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом по пространственной переменной $\xi \in [l(\mathrm{Fo}),\,+\infty)$. Кроме того, будем предполагать, что для каждого значения Fo функция $\vartheta(\cdot,\mathrm{Fo})$ является оригиналом преобразования Фурье [11].

Относительно закона движения границы будем предполагать, что $l = l(\mathrm{Fo})$ — неубывающая неотрицательная функция, дифференцируемая хотя бы в обобщенном смысле, $l(0) = 0$, а $Q = Q(\mathrm{Fo})$ удовлетворяет стандартным требованиям теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи [9]. В этом случае можно выполнить замену переменных

$$x = \xi - l(\mathrm{Fo}), \quad \tau = \mathrm{Fo}, \tag{5}$$

после чего математическая модель (1)–(3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\vartheta(x,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\vartheta(x,\tau)}{\partial x^2} + l'(\tau)\frac{\partial\vartheta(x,\tau)}{\partial x}, \quad x>0, \quad \tau>0, \tag{6}$$

$$\vartheta(x,0)=0, \quad x>0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = -Q(\tau), \quad \tau>0, \tag{8}$$

а условие (4) запишется в виде

$$\vartheta(x,\tau)\Big|_{\tau>0} \in L^2[0,\,+\infty). \tag{9}$$

2. Решение поставленной задачи

Для решения задачи (6)–(8) воспользуемся косинус- и синус- преобразованиями Фурье [10, 11] по пространственной переменной x.

Применив оператор косинус-преобразования к уравнению (6) и начальному условию (7), с учетом (9) и граничного условия (8) приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Theta_C(p,\tau)}{d\tau} = -p^2\Theta_C(p,\tau) + pl'(\tau)\,\Theta_S(p,\tau) + Q(\tau) - l'(\tau)\,\vartheta(0,\tau), \quad \tau>0; \\ \Theta_C(p,0)=0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\Theta_C(p,\tau)$ — изображение косинус-преобразования Фурье неизвестного решения $\vartheta(\xi,\tau)$, а p — параметр этого преобразования.

Аналогично применение оператора Φ_S к уравнению (6) и начальному условию (7) с учетом (8), (9) приводит к задаче

$$\begin{cases} \dfrac{d\Theta_S(p,\tau)}{d\tau} = -pl'(\tau)\,\Theta_C(p,\tau) - p^2\Theta_S(p,\tau) + p\vartheta(0,\tau), \quad \tau>0; \\ \Theta_S(p,0)=0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\Theta_S(p,\tau)$ — изображение синус-преобразования Фурье неизвестного решения $\vartheta(\xi,\tau)$.

Задачи (10) и (11) эквивалентны следующей задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\Theta(p,\tau) = A(p,\tau)\,\Theta(p,\tau) + f(\tau) + F(p,\tau)\,\vartheta(0,\tau), \quad \tau>0; \\ \Theta(p,0) = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{12}$$

где использованы обозначения

$$\Theta(p,\tau) = \begin{pmatrix} \Theta_C(p,\tau) \\ \Theta_S(p,\tau) \end{pmatrix}, \quad A(p,\tau) = \begin{pmatrix} -p^2 & pl'(\tau) \\ -pl'(\tau) & -p^2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$f(\tau) = \begin{pmatrix} Q(\tau) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(p,\tau) = \begin{pmatrix} -l'(\tau) \\ p \end{pmatrix}. \tag{14}$$

При этом, согласно (12), (13), (14), изображения $\Theta_C(p,\tau)$, $\Theta_S(p,\tau)$ неизвестного температурного поля $\vartheta(x,\tau)$ полностью определяются его значениями $\vartheta(0,\tau)$ на границе полупространства $x \geqslant 0$, скоростью $l'(\tau)$ движения границы и функцией $Q(\tau)$, принимающей значения, пропорциональные значениям внешнего теплового потока.

Для решения задачи Коши (12) заметим, что если $R(\tau,\eta)$ — резольвента этой задачи, то ее решение может быть представлено в стандартной форме [12]:

$$\Theta(p,\tau) = \int\limits_0^\tau R(\tau,\eta)\Big[f(\eta) + F(p,\eta)\vartheta(0,\eta)\Big]\,d\eta. \tag{15}$$

Поскольку согласно (13), (14) матричные функции $A(p,\tau)$ и

$$\int\limits_\eta^\tau A(p,\chi)\,d\chi = \begin{pmatrix} -p^2(\tau-\eta) & p[l(\tau)-l(\eta)] \\ -p[l(\tau)-l(\eta)] & -p^2(\tau-\eta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \tau,$$

коммутируют, в чем можно убедиться непосредственной проверкой, то [12]

$$R(\tau,\eta) = \exp\left(\int\limits_\eta^\tau A(p,\chi)\,d\chi\right). \tag{16}$$

Согласно теореме Кэли — Гамильтона [12], для любой квадратной матрицы U порядка n ее характеристический многочлен $q(\lambda)$ является также ее аннулирующим многочленом, т.е., если

$$q(\lambda) = \det(U - \lambda E_n) \equiv \sum_{k=0}^{n} q_k \lambda^k,$$

$$q(U) = \sum_{k=0}^{n} q_k U^k = O_n,$$

где q_k, $k = \overline{0,\,n}$, — коэффициенты характеристического многочлена, $U^0 = E_n$, O_n — соответственно единичная и квадратная нулевая матрицы порядка n. Таким образом, любая степень квадратной матрицы U порядка n представима в виде линейной комбинации квадратных матриц U^k, $k = \overline{0,\,n-1}$. С учетом этого результата доказано [12], что матричная функция $f(U)$ является линейной комбинацией квадратных матриц U^k, $k = \overline{0,\,n-1}$:

$$f(U) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k,$$

где α_k, $k = 0n-1$, — неизвестные коэффициенты, удовлетворяющие системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_j^k = f(\lambda_j), \quad j = \overline{1,\,n},$$

если собственные числа λ_k, $k = 0n-1$, матрицы U различны.

В рассматриваемом случае $n = 2$ и матричная экспонента в правой части равенства (16) определяется как

$$\exp\left(\int\limits_{\eta}^{\tau} A(p,\chi)\,d\chi\right) = \alpha_0 E_2 + \alpha_1 \int\limits_{\eta}^{\tau} A(p,\chi)\,d\chi.$$

Коэффициенты α_0 и α_1 находим следующим образом. Решая характеристическое уравнение

$$\det\left(\int\limits_{\eta}^{\tau} A(p,\chi)\,d\chi - \lambda E_2\right) = 0,$$

находим собственные числа

$$\lambda_1 = -p^2(\tau-\eta) + ip\Big[l(\tau) - l(\eta)\Big], \quad \lambda_2 = -p^2(\tau-\eta) - ip\Big[l(\tau) - l(\eta)\Big].$$

Далее выписываем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_0, α_1:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 = e^{\lambda_1}, \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 = e^{\lambda_2} \end{cases}$$

и получаем

$$\alpha_0 = \alpha_1 p^2(\tau-\eta) + e^{-p^2(\tau-\eta)}\cos p\mathcal{L}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{p\mathcal{L}} e^{-p^2(\tau-\eta)}\sin p\mathcal{L},$$

где

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tau,\eta) = l(\tau) - l(\eta). \tag{17}$$

Таким образом, с учетом (16) резольвента задачи Коши (12) имеет вид

$$R(\tau,\eta) = \begin{pmatrix} \cos p\mathcal{L} & \sin p\mathcal{L} \\ -\sin p\mathcal{L} & \cos p\mathcal{L} \end{pmatrix} e^{-p^2(\tau-\eta)} \tag{18}$$

и, согласно (15), (18), (13), (14)

$$\Theta_C(p,\tau) = \int\limits_0^{\tau} e^{-p^2(\tau-\eta)} Q(\eta)\,\cos p\mathcal{L}\,d\eta + \int\limits_0^{\tau} e^{-p^2(\tau-\eta)}\Big[p\sin p\mathcal{L} - l'(\eta)\,\cos p\mathcal{L}\Big]\vartheta(0,\eta)\,d\eta. \tag{19}$$

С использованием формулы обращения косинус-преобразования Фурье [10, 11]

$$\vartheta(x,\tau) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \Theta_C(p,\tau)\cos(px)\,dp$$

и представления (19) после изменения порядка интегрирования получаем:

$$\vartheta(x,\tau) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\tau}\left\{\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^2(\tau-\eta)}\cos p\mathcal{L}\,\cos px\,dp\right\}Q(\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\tau}\left\{\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^2(\tau-\eta)}\Big[p\sin p\mathcal{L}\,\cos px - l'(\eta)\,\cos p\mathcal{L}\,\cos px\Big]\,dp\vartheta(0,\eta)\,d\eta. \tag{20}$$

Внутренние несобственные интегралы в правой части равенства (20) могут быть вычислены аналитически. Воспользовавшись известными формулами тригонометрии

$$\cos p\mathcal{L}\,\cos px = \frac{1}{2}\Big[\cos(p\mathcal{L}-x)+\cos(p\mathcal{L}+x)\Big], \quad \sin p\mathcal{L}\,\cos px = \frac{1}{2}\Big[\sin(p\mathcal{L}-x)+\sin(p\mathcal{L}+x)\Big]$$

и равенствами [14]

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha p^2}\cos\beta p\,dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}e^{-\beta^2/4\alpha}, \quad \int\limits_0^{+\infty} pe^{-\alpha p^2}\sin\beta p\,dp = \frac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}}e^{-\beta^2/4\alpha},$$

придем к соотношению

$$\vartheta(x,\tau) = \int\limits_0^{\tau} K(\tau,\eta,x)\,\vartheta(0,\eta)\,d\eta + \Psi(\tau,x), \tag{21}$$

где

$$K(\tau,\eta,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau-\eta}}\left\{\frac{1}{2(\tau-\eta)}\left[(\mathcal{L}-x)e^{-\frac{(\mathcal{L}-x)^2}{4(\tau-\eta)}} + (\mathcal{L}+x)e^{-\frac{(\mathcal{L}+x)^2}{4(\tau-\eta)}}\right] - \right.$$
$$\left. - l'(\eta)\left[e^{-\frac{(\mathcal{L}-x)^2}{4(\tau-\eta)}} + e^{-\frac{(\mathcal{L}+x)^2}{4(\tau-\eta)}}\right]\right\}, \tag{22}$$

$$\Psi(\tau,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\tau}\frac{1}{2\sqrt{\tau-\eta}}\left[e^{-\frac{(\mathcal{L}-x)^2}{4(\tau-\eta)}} + e^{-\frac{(\mathcal{L}+x)^2}{4(\tau-\eta)}}\right]Q(\eta)\,d\eta.$$

Равенства (21), (22) однозначно определяют температурное поле $\vartheta(x,\tau)$ полупространства в подвижной системе координат (5) при известном законе $\vartheta(0,\tau)$ изменения температуры на границе этого полупространства. Полагая $x=0$ в равенствах (21), (22), приходим к соотношению

$$u(\tau) = \int\limits_0^{\tau}\frac{\mathcal{A}(\tau,\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}}u(\eta)\,d\eta + \varphi(\tau), \tag{23}$$

где $u(\tau)=\vartheta(0,\tau)$ — закон изменения температуры границы полупространства,

$$\mathcal{A}(\tau,\eta) = K(\tau,\eta,0)\sqrt{\tau-\eta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\mathcal{L}(\tau,\eta)}{2\sqrt{\tau-\eta}} - l'(\eta)\right]e^{-\frac{\mathcal{L}^2(\tau,\eta)}{4(\tau-\eta)}}, \tag{24}$$

$$\varphi(\tau) = \Psi(\tau,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\tau}\frac{Q(\eta)}{\sqrt{\tau-\eta}}e^{-\frac{\mathcal{L}^2(\tau,\eta)}{4(\tau-\eta)}}\,d\eta, \tag{25}$$

а функция $\mathcal{L}(\tau,\eta)$ определена соотношением (17).

Анализ соотношения (23) показывает, что функция $u(\tau)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода, ядро $(\tau-\eta)^{-1/2}\mathcal{A}(\tau,\eta)$ которого имеет слабую особенность и не является фредгольмовским [15].

Для численного решения уравнения (23) выбираем достаточно большое натуральное число N, полагаем

$$s_u = \frac{\tau_*}{N}, \quad \tau_j = j s_u, \quad j = \overline{0,\, N}, \tag{26}$$

и строим итерационный процесс, позволяющий по известным значениям $\Big(u(\tau_j)\Big)_{j=0}^{m}$ искомого решения $u(\tau)$ с заданной точностью вычислить значение $u(\tau_{m+1})$. При этом $\tau_0 = 0$ и $u(0) = 0$.

Пусть далее

$$u_j = u(\tau_j), \quad \varphi_j = \varphi(\tau_j), \quad j = \overline{0,\, N}. \tag{27}$$

Тогда, согласно (23), (24), (25)

$$u_{m+1} = \int\limits_0^{\tau_{m+1}} \frac{\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \eta)}{\sqrt{\tau_{m+1} - \eta}} u(\eta)\, d\eta + \varphi_{m+1}. \tag{28}$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (28), является несобственным, что делает невозможным непосредственное использование известных квадратурных формул [16, 17]. Для преодоления этого затруднения полагаем

$$J_{m+1} = \int\limits_0^{\tau_{m+1}} \frac{\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \eta)}{\sqrt{\tau_{m+1} - \eta}} u(\eta)\, d\eta = J_{m+1}^{(1)} + J_{m+1}^{(2)}, \tag{29}$$

$$J_{m+1}^{(1)} = \int\limits_0^{\tau_m} \frac{\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \eta)}{\sqrt{\tau_{m+1} - \eta}} u(\eta)\, d\eta, \tag{30}$$

$$J_{m+1}^{(2)} = \int\limits_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \eta)}{\sqrt{\tau_{m+1} - \eta}} u(\eta)\, d\eta, \tag{31}$$

где интеграл $J_{m+1}^{(1)}$ является собственным и его значение может быть вычислено с использованием известной квадратурной формулы трапеций [16] и равенств (26), (27):

$$J_{m+1}^{(1)} \approx \frac{\sqrt{s_u}}{2} \Big[2 \sum_{j=1}^{m-2} \frac{\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_j)}{\sqrt{m - j + 1}} u_j + \mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_m) u_m \Big]. \tag{32}$$

Заменой $\eta = \tau_{m+1} - v^2$ переменной интегрирования несобственный интеграл $J_{m+1}^{(2)}$, определенный в (31), сводится к интегралу от функции, имеющей устранимый разрыв. Поэтому с учетом (26), (27)

$$J_{m+1}^{(2)} = 2 \int\limits_0^{\sqrt{s_u}} \mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_{m+1} - v^2) u(\tau_{m+1} - v^2)\, dv \approx$$
$$\approx \sqrt{s_u} \Big[\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_{m+1}) u_{m+1} + \mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_m) u_m \Big], \tag{33}$$

где под $\mathcal{A}(\tau, \tau)$ понимается предельное значение, которое с учетом (17) имеет вид

$$\mathcal{A}(\tau, \tau) = \lim_{\eta \to \tau - 0} \mathcal{A}(\tau, \eta) = -\frac{l'(\tau - 0)}{2\sqrt{\pi}}.$$

Подставив правые части равенств (29)–(33) в (28) и выразив из полученного соотношения u_{m+1}, придем к следующей расчетной схеме для приближенного решения интегрального уравнения (23):

$$u_0 = 0, \tag{34}$$

$$u_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \sqrt{s_u}\mathcal{A}(\tau_1, \tau_1)}, \tag{35}$$

$$u_{m+1} = \frac{\varphi_{m+1}}{1 - \sqrt{s_u}\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_{m+1})} + \frac{\sqrt{s_u}}{1 - \sqrt{s_u}\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_{m+1})} \times$$
$$\times \left[\frac{3}{2}\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_m)u_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mathcal{A}(\tau_{m+1}, \tau_j)}{\sqrt{m-j+1}} u_j\right], \quad m = \overline{1,\ N-1}. \tag{36}$$

При этом следует заметить, что эти равенства имеют смысл лишь при выполнении условия

$$s_u < \frac{1}{\max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*} \Big(\mathcal{A}(\tau, \tau)\Big)^2} = \frac{4\pi}{\max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*} \Big(l'(\tau - 0)\Big)^2}. \tag{37}$$

Величина, стоящая в правой части (37), зависит лишь от скорости движения границы полупространства и может рассматриваться как аналог параметра Куранта [18].

3. Результаты и их обсуждение

Рассмотрим некоторые результаты исследований, отражающие наиболее характерные особенности процесса формирования температурного профиля $\vartheta(0, \tau)$ на движущейся по заданному закону границе полупространства, которое подвержено воздействию внешнего теплового потока.

На рис. 1 изображены графики изменения скорости движения границы полупространства, отвечающие двум характерным законам ее движения. Каждому из этих законов отвечает

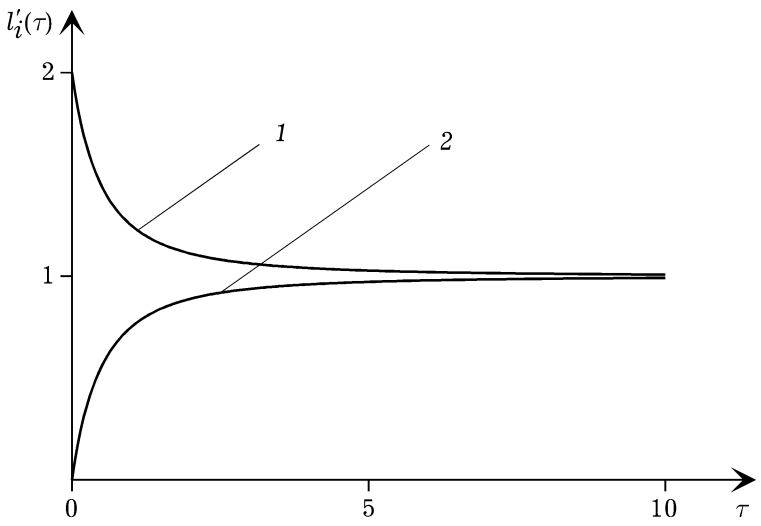

Рис. 1. Зависимость скорости движения границы полупространства от времени τ: *1* — $l_1'(\tau) = 1 + 1/(1+\tau)^2$; *2* — $l_2'(\tau) = 1 - 1/(1+\tau)^2$

асимптотическое при $\tau \to +\infty$ значение скорости, равное 1, при этом зависимость

$$l_1(\tau) = 1 + \tau - \frac{1}{1+\tau}$$

соответствует случаю «торможения» движущейся границы, а зависимость

$$l_2(\tau) = -1 + \tau + \frac{1}{1+\tau} \quad —$$

случаю ее «разгона». На рис. 2 представлены результаты вычислительных экспериментов, проведенных с использованием расчетной схемы (34)–(36) для $Q(\tau) \equiv 2$ и указанных зависимостей $l_i(\tau)$, $i = \overline{1,\,2}$. Анализ графической информации позволяет сделать вывод о том, что в обоих случаях температура движущейся границы имеет асимптотическое значение

$$\vartheta(0,\tau) \sim \frac{Q}{\lim\limits_{\tau\to+\infty} l'(\tau)},$$

что полностью согласуется с результатами, полученными в работе [8]. Кроме того, можно заметить, что бóльшие значения скорости движения границы приводят к сокращению времени переходного процесса от $\vartheta(0,0) = 0$ до

$$\vartheta(0,\tau) \approx \frac{Q}{\lim\limits_{\tau\to+\infty} l'(\tau)}.$$

Для иследования процесса эволюции температуры движущейся границы полупространства в условиях нагрева нестационарным внешним потоком была выбрана периодическая зависимость $Q(\tau) = 1 + \sin \pi\tau$ мощности потока, график которой приведен на рис. 3. На рис. 4 представлены соответствующие результаты расчетов, также проведенных с использованием схемы (34)–(36) для случая равномерного движения границы со скоростью $l'(\tau) \equiv 1$. Эти

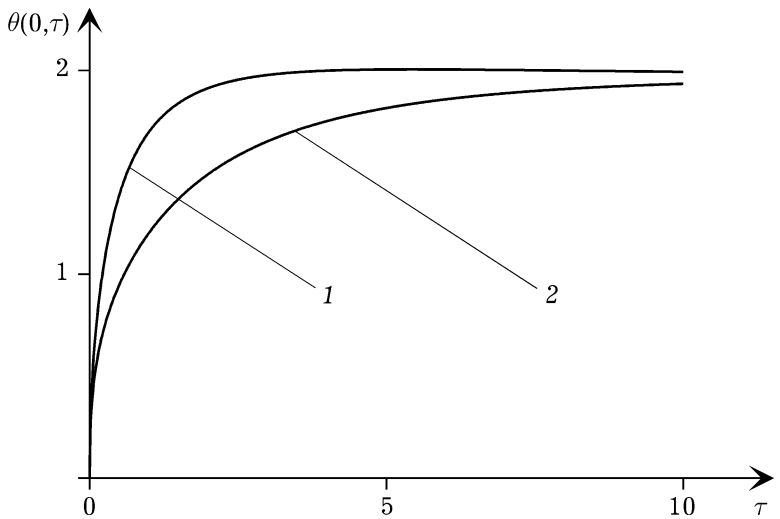

Рис. 2. Зависимость температуры $\vartheta(0,\tau)$ границы полупространства от времени τ при $Q = 2$ и реализации различных законов движения его границы: *1* — $l_1(\tau) = 1 + \tau - 1/(1+\tau)$; *2* — $l_2(\tau) = -1 + \tau + 1/(1+\tau)$

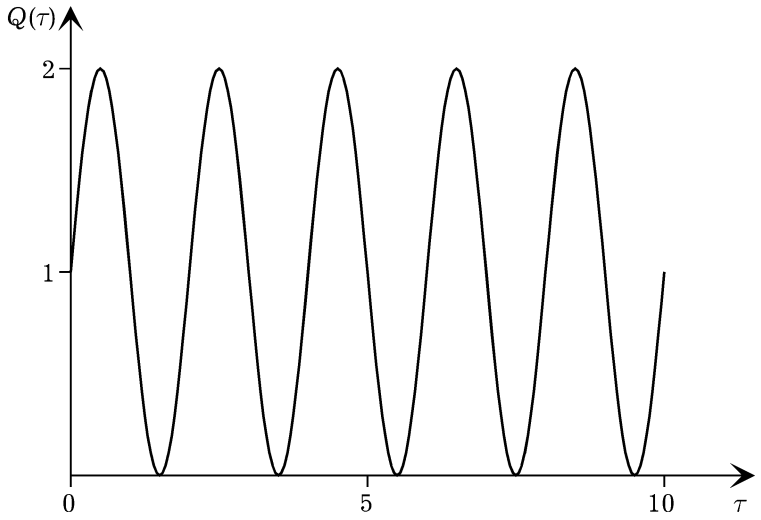

Рис. 3. Временна́я зависимость мощности внешнего теплового потока $Q(\tau) = 1 + \sin(\pi\tau)$

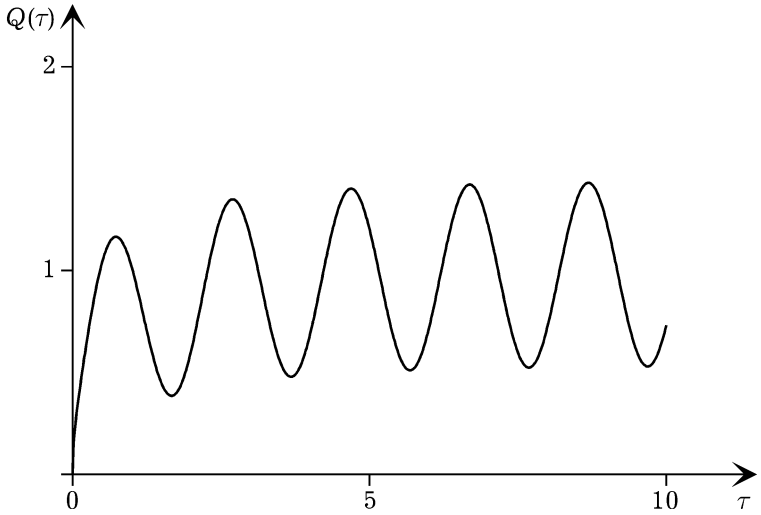

Рис. 4. Зависимость температуры $\vartheta(0,\tau)$ границы полупространства от времени τ при $l(\tau) = \tau$ и воздействии нестационарного внешнего потока

результаты показывают, что в случае периодического закона изменения мощности внешнего теплового потока, закон изменения температуры границы с течением времени также становится периодическим. При этом можно заметить, что при достаточно больших значениях времени τ «асимптотически среднее»; значение температуры также прямо пропорционально среднему значению $\langle Q \rangle = 1$ мощности потока и обратно пропорционально установившейся скорости движения $l'(\tau) = 1$.

Заключение

Для задачи нахождения температурного поля полупространства с движущейся по заданному закону границей, подверженного воздействию нестационарного теплового потока, получена аналитическая зависимость решения от температуры границы области. Для определения температуры границы составлено интегральное уравнение Вольтерра второго рода,

решение которого проведено численно. С использованием полученного представления решения исследованы характерные особенности процесса формирования изучаемого температурного поля при реализации различных законов движения границы и различных законов временно́го изменения внешнего теплового потока.

Список литературы

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 553 с.
2. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М: Изд-во МАИ, 2010. 308 с.
3. Карташов Э.М., Любов Б.Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83–111.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.
5. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74, № 2. С. 171–195.
6. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74, № 3. С. 81–86.
7. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле полупространства в нестацонарных условиях теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. 2002. Т. 75, № 6. С. 172–178.
8. Власов П.А. Влияние равномерного движения границы на температурное поле полупространства, подверженного нагреву внешним тепловым потоком // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. №8. С. 113–121. DOI: 10.7463/0814.0726072
9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 2: учеб. для вузов. М.: Наука, 2000. 448 с.
12. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем: пер. с англ. М.: Мир, 1974. 464 с.

13. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1998. 608 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1110 с.
15. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
16. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Физматгиз, 1963. 400 с.
17. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.
18. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 10, pp. 137–151.
DOI: **10.7463/1014.0727148**
Received: 28.07.2014
Revised: 19.09.2014

Research of the Border Mobility Influence on the Half-Space Temperature Field Under Heat Flux

Vlasov P. A.[1,*]
[*]pvlx@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: temperature field, half-space, moving boundary

Among the problems of unsteady heat conduction, tasks that can be solved in analytical closed-form hold a special place. This species can be used both for parametric optimization of thermal protection of structures and for testing of computational algorithms.

The previous paper presented an analytical solution of the problem to find the half-space temperature field with the uniformly moving boundary, which was under the external heat flux of constant power. In this paper we consider a similar problem, but the law of the moving boundary is assumed to be arbitrary nondecreasing, and the power of the heat flux can vary over time.

An analytical dependence of the problem solution on the temperature of a moving boundary was obtained by using the Fourier transformation in the spatial variable. To determine the temperature of moving boundary, Volterra integral equation of the second kind was drawn. The solution of this equation was numerically conducted using a specially developed computational algorithm.

The obtained representation was used to research the most characteristic features of the process to form the temperature field in studied area when implementing the various laws of boundaries motion and different operating conditions for the external heat flux influence. Using computational experiments allowed us to find that the asymptotic nature of this dependence confirms the results obtained in previous work. It has been established that the nonlinear character of both the boundary motion law and the external heat flux power variation law mainly affect the specifics of the transition process.

References

1. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytic methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1985. 553 p. (in Russian).
2. Formalev V.F., Kuznetsova E.L. *Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and Mass Transfer in Anisotropic Bodies under Conditions of

Aero-Gas-Dynamic Heating], Moscow: Moscow Aviation Institute Publ., 2010. 308 p. (in Russian).

3. Kartashov E.M., Liubov B.Ia. Analytical methods for solving boundary value problems for the heat equation in a region with moving boundaries. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport = Proceedings of the USSR AS. Power engineering and transport*, 1974, no. 6, pp. 83–111. (in Russian).
4. Kartashov E.M. Analytical Methods of Solution of Boundary Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in Regions with Moving Boundaries. *Izv. RAN. Energetika = Proceedings of the RAS. Power engineering*, 1999, no. 5, pp. 3–34. (in Russian).
5. Kartashov E.M. Analytical Methods of Solution of Boundary Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in Regions with Moving Boundaries. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2001, vol. 74, no. 2, pp. 171–195. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, iss. 2, pp. 498–536. DOI: 10.1023/A:1016641613982).
6. Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Temperature Field of a Half-Space with a Thermally Thin Coating in Pulse Modes of Heat Exchange with the Environment. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2001, vol. 74, no. 3, pp. 81–86. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, iss. 3, pp. 647–655. DOI: 10.1023/A:1016756227188).
7. Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Influence of the Mobility of a Boundary on the Temperature Field of a Half-Space under Unstable Conditions of Heat Exchange with the Environment. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2002, vol. 75, no. 6, pp. 172–178. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2002. vol. 75, no. 6. pp. 1454–1462. DOI: 10.1023/A:1022143716313).
8. Vlasov P.A. The Influence of the Boundary Motion on Temperature Field in the Half-Space under External Heat Flux. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 8, pp. 113–121. DOI: 10.7463/0814.0726072 (in Russian).
9. Ladyzhenskaia O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p. (in Russian).
10. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).
11. Il'in V.A., Pozniak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza*. V 2 ch. Ch. 2 [Principles of mathematical analysis. In 2 parts. Pt. 2]. Moscow, Nauka Publ., 2000. 448 p. (in Russian).
12. Director S.W., Rohrer R.A. *Introduction to system theory*. McGraw-Hill, New York, 1971. (Russ. ed.: Director S.W., Rohrer R.A. *Vvedenie v teoriiu sistem*. Moscow, Mir Publ., 1974. 464 p.).

13. Bronshtein I.N., Semendiaev K.A. *Spravochnik po matematike dlia inzhenerov i uchashchikhsia vtuzov* [Handbook of mathematics for engineers and students of technical colleges]. Moscow, Nauka Publ., 1998. 608 p. (in Russian).
14. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Table of Integrals, Series, and Products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 1110 p. (in Russian).
15. Zabreiko P.P., Koshelev A.I., Krasnosel'skii M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stetsenko V.Ia. *Integral'nye uravneniia* [Integral Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 448 p. (in Russian).
16. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Chislennye metody analiza* [Numerical methods of c alculus]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 400 p. (in Russian).
17. Mikhlin S.G., Smolitskii Kh.L. *Priblizhennye metody resheniia differentsial'nykh i integral'nykh uravnenii* [Approximation Methods for Solutions of Differential and Integral Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 384 p. (in Russian).
18. Godunov S.K., Riaben'kii V.S. *Raznostnye skhemy* [Difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 400 p. (in Russian).