Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 102–113.
DOI: 10.7463/1014.0728991
Представлена в редакцию: 14.09.2014
Исправлена: 04.10.2014
© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 511.361

Об арифметической природе значений продифференцированных по параметру гипергеометрических функций

Иванков П. Л.[1,*], Обухов В.П.[1]

*ivankovpl@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Для изучения арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами и их производных (в том числе и по параметру) нельзя непосредственно применить известный в теории трансцендентных чисел метод Зигеля. Этот метод предполагает построение линейной приближающей формы с помощью принципа Дирихле, причем построенная приближающая форма должна удовлетворять жестким требованиям, которые играют важную роль в арифметической части метода. Такая конструкция не может быть реализована, если наименьший общий знаменатель n первых коэффициентов разложения рассматриваемых функций в ряды Тейлора растет слишком быстро. Именно эту ситуацию мы имеем в упомянутом выше случае гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. В данной работе рассматривается гипергеометрическая функция, которая дифференцируется по параметру, и затем вместо этого параметра подставляется иррациональное число. Первые результаты, касающиеся арифметических свойств значений таких функций, были получены с помощью эффективной конструкции линейной приближающей формы. Применение совместных приближений позволяет улучшить и обобщить эти результаты. Основная трудность при таком подходе состоит в получении приемлемой оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов аппроксимирующих многочленов.

Ключевые слова: оценки линейных форм; совместные приближения; обобщенные гипергеометрические функции; дифференцирование по параметру

Введение

В работе изучаются арифметические свойства значений гипергеометрических функций и их производных (в том числе и по параметру). При этом параметр, по которому производится дифференцирование, принимает иррациональное значение. Ранее для решения такой задачи использовалась эффективная конструкция линейных приближающих форм. Применение совместных приближений, учитывающих специфику однородного случая, позволило получить соответствующий результат в более общей ситуации. В [1, замечания к главе 7] приведены формулировки различных результатов об арифметической природе

значений продифференцированных по параметру гипергеометрических функций. При этом во всех указанных там теоремах параметры рассматриваемых функций рациональны (см. работы [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]). В [11], по-видимому, впервые доказана теорема, в которой фигурирует продифференцированная по параметру функция, и этот параметр принимает иррациональное значение. Отличие последней упомянутой теоремы от приведенной ниже теоремы 1 заключается в том, что в теореме из [11] фигурирует гипергеометрическая функция типа (1), у которой $b(x) = x$, и значения функций берутся не в произвольной точке $\xi \neq 0$, а в точке вида $1/q$, где q — достаточно большое по модулю число. Обобщение получено за счет использования совместных приближений. Основным моментом соответствующего рассуждения является оценка общего наименьшего знаменателя коэффициентов аппроксимирующих многочленов; при получении такой оценки применяются специально разработанные для этого технические приемы.

1. Формулировка основной теоремы

Пусть $b(x)$ — многочлен степени m, $m \geqslant 1$, старший коэффициент которого равен единице; $b(0) = 0$; $b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \ldots$; $\mathbb{I}$ — некоторое мнимое квадратичное поле; $b(x) \in \mathbb{I}[x]$; $\lambda \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Z}$; $u = m + 1$.

Рассмотрим при $l = 0, 1$, $j = 1, \ldots, u$ следующие функции:

$$F_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \frac{d^{\,l}}{d\lambda^{l}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda}. \tag{1}$$

При выполнении перечисленных условий справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть ξ — ненулевое число из поля $\mathbb{I}$; h_{lj}, $l = 0, 1$, $j = 1, \ldots, u$, — нетривиальный набор целых чисел из этого поля; H — максимум модулей этих чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное H_0, такое, что при $H \geqslant H_0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{u} h_{lj} F_{lj}(\xi) \right| > H^{1-4u-\varepsilon}.$$

2. Доказательство основной теоремы

В работе [12] рассматриваются функции вида

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{\,l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda},$$
$$k = 1, \ldots, t, \quad l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \ldots, u,$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_t$ — некоторые натуральные числа. Для этих функций в упомянутой работе предложена эффективная конструкция совместных приближений, т.е. при каждом натуральном n построены многочлены $P_{kl_kj}(z)$ степени n, причем функции

$$P_{kl_kj}(z) F_{k'l'_{k'}j'}(z) - P_{k'l'_{k'}j'}(z) F_{kl_kj}(z)$$

имеют при $z = 0$ порядок нуля, близкий к максимально возможному. Мы используем здесь эту конструкцию, предварительно дав ее краткое описание применительно к рассматриваемой в данной работе ситуации (т.е. в случае $k = 1$, $l_1 = l = 1$, $a(x) = 1$). Основная трудность заключается в оценке общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{kl_kj}(z)$. В работе [12] такой проблемы не было, так как там рассматривается случай рациональных $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$. Итак, пусть n — натуральное число, и пусть

$$N_1 = \left[\frac{2un}{2u-1}\right], \quad N_2 = \left[\frac{un}{2u-1}\right], \tag{2}$$

$$Q(z) = \prod_{x=0}^{N_2-1} (z - \lambda + x)^2, \tag{3}$$

$$\theta_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{Q(\zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{x=N_1-\mu}^{N_1} (\zeta + x)}, \quad \mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_1,$$

где Γ_1 — какая-либо положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции. Из теории рядов Ньютона вытекает справедливость равенства

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x} = \frac{Q(z)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1} (z+x)}; \tag{4}$$

см., например, [13, гл. 2, §2.2].

Далее, пусть

$$p_\mu = \theta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} b(x), \quad P(z) = \sum_{\mu=0}^{N_1} p_\mu z^\mu. \tag{5}$$

Составим бесконечный ряд

$$P(z)\, F_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p^*_{lj\nu} z^\nu \tag{6}$$

и рассмотрим многочлен

$$P^*_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p^*_{lj\nu} z^\nu,$$

являющийся частичной суммой этого ряда. Звездочки * здесь поставлены для того, чтобы различать многочлен $P^*_{lj}(z)$ и встречающийся ниже многочлен (8). Отметим также, что, хотя указанные многочлены, как и их коэффициенты, зависят от n, по сложившейся традиции эта зависимость не указывается. В цитированной выше работе [12] доказано, что (при выполнении условий теоремы) функции

$$P^*_{lj}(z)\, F_{l'j'}(z) - P^*_{l'j'}(z)\, F_{lj}(z) \tag{7}$$

отличны от тождественного нуля (если $(l, j) \neq (l', j')$) и имеют при $z = 0$ порядок нуля не ниже $N_1 + 1$. Для наших целей удобнее использовать многочлены

$$P_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p_{lj\nu} z^\nu, \tag{8}$$

где

$$p_{lj\nu} = qp^*_{lj\nu}, \tag{9}$$

$$q = \frac{(\lambda+1)\dots(\lambda+N_1-N_2)}{N_1!}. \tag{10}$$

Очевидно, что при этом сделанные выше утверждения о функциях (7) останутся в силе.

Нашей ближайшей задачей является получение оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов (8). Эти коэффициенты, очевидно, лежат в поле $\mathbb{I}$. Общим знаменателем множества чисел $X \subset \mathbb{I}$ называется такое ненулевое целое число ω из этого поля, что $\omega x \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ при любом $x \in X$. Наименьший по модулю общий знаменатель множества X называется общим наименьшим знаменателем этого множества.

Лемма 1. Пусть σ — неотрицательное целое рациональное число. Тогда

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu C_\sigma(z,\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x} = \frac{Q(z-\sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(z-\sigma+x)}, \tag{11}$$

где

$$C_\sigma(z,\mu) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} \frac{z+N_1-\mu-x}{z-x}.$$

Для доказательства достаточно заменить z на $z-\sigma$ в равенстве (4).

Лемма 2. Пусть $B(z,\mu)$ — многочлен от двух переменных, степень которого по переменной μ не превышает N. Тогда

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu B(z,\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x} = \sum_{\sigma=0}^{N} a_\sigma \frac{Q(z-\sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(z-\sigma+x)}, \tag{12}$$

$$a_\sigma = -\prod_{x=0}^{\sigma-1}(z-x)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{B(z,\zeta)}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma}(z+N_1-\zeta-x)}\,d\zeta, \tag{13}$$

где положительно ориентированная окружность Γ_2 охватывает все полюсы подынтегральной функции.

Доказательство. Запишем равенство

$$B(z,\mu) = \sum_{\sigma=0}^{N} a_\sigma C_\sigma(z,\mu), \tag{14}$$

где a_σ определяется правой частью (13). Справедливость этого равенства обосновывается в теории рядов Ньютона (см. замечание по поводу равенства (4)). Подставив в (12) вместо $B(z,\mu)$ правую часть (14), получим такое выражение для левой части (12):

$$\sum_{\sigma=0}^{N} a_\sigma \sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu C_\sigma(z,\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x}.$$

Отсюда с учетом (11) получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 3. При $\nu = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, u$ справедливо равенство

$$p_{0j\nu} = -q \sum_{\sigma=N_2}^{N_4} \prod_{x=1}^{\sigma} (\lambda - \sigma + x) \frac{\prod\limits_{x=0}^{N_2-1} (x-\sigma)^2}{\prod\limits_{x=1}^{N_1} (\lambda - \sigma + x)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{B_{j\nu}(\lambda, \zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma} (\lambda + N_1 - \zeta - x)}, \tag{15}$$

где $N_4 = u(N_1 + 1) - 1$.

Доказательство. Из (1), (5), (6), (8) и (9) следует, что при $0 \leqslant \nu \leqslant n$ выполняется равенство

$$p_{lj\nu} = q \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu (\nu - \mu)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{1}{b(x)} \frac{d^l}{d\lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{1}{\lambda + x}. \tag{16}$$

Преобразуем последнее выражение при $l = 0$. Подставляя в (16) выражение для p_μ из (5), получаем:

$$p_{0j\nu} = q \left(\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu B_{j\nu}(z, \mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z + x} \right) \Bigg|_{z=\lambda}, \tag{17}$$

$$B_{j\nu}(z, \mu) = (\nu - \mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x - \mu)(x + z - \mu). \tag{18}$$

Верхний индекс суммирования ν можно заменить на N_1 в силу условия $b(0) = 0$.

Применяя лемму 2, получаем равенство

$$p_{0j\nu} = q \left(\sum_{\sigma=0}^{N_4} a_{j\nu\sigma} \frac{Q(z - \sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1} (z - \sigma + x)} \right) \Bigg|_{z=\lambda}, \tag{19}$$

где

$$a_{j\nu\sigma} = -\prod_{x=0}^{\sigma-1} (z - x) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_3} \frac{B_{j\nu}(z, \zeta)\, d\zeta}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma} (z + N_1 - \zeta - x)}, \tag{20}$$

а положительно ориентированная окружность Γ_3 охватывает все полюсы подынтегральной функции.

Так как $Q(\lambda - \sigma) = 0$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant N_2 - 1$, то, с учетом (3), (19) и (20), получаем требуемое равенство (15).

Лемма 4. Справедливо равенство

$$p_{1j\nu} = -q \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{\sigma=N_2}^{N_4} \prod_{x=1}^{\sigma} (z - \sigma + x) \frac{\prod\limits_{x=0}^{N_2-1} (z + x - \sigma)^2}{\prod\limits_{x=1}^{N_1} (z - \sigma + x)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{B_{j\nu}(z, \zeta) d\zeta}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma} (z + N_1 - \zeta - x)} \right) \Bigg|_{z=\lambda}, \tag{21}$$

в котором N_4 определяется, как в предыдущей лемме.

Доказательство. Преобразуем (16) в случае $l = 1$. Имеем

$$p_{1j\nu} = q\sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu(\nu-\mu)^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu-\mu}\frac{1}{b(x)}\frac{d}{d\lambda}\prod_{x=1}^{\nu-\mu}\frac{1}{\lambda+x} =$$

$$= q\sum_{\mu=0}^{N_1}\theta_\mu(\nu-\mu)^{j-1}\prod_{x=\nu+1}^{N_1}b(x-\mu)\frac{d}{d\lambda}\left(\prod_{x=\nu+1}^{N_1}(x+\lambda-\mu)\prod_{x=1}^{N_1-\mu}\frac{1}{\lambda+x}\right) =$$

$$= q\sum_{\mu=0}^{N_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\theta_\mu B_{j\nu}(z,\mu)\prod_{x=1}^{N_1-\mu}\frac{1}{z+x}\right)\Bigg|_{z=\lambda}, \quad (22)$$

где $B_{j\nu}(z,\mu)$ определяется равенством (18). Поскольку обе части (12) можно продифференцировать по z, то из (22) следует, что

$$p_{1j\nu} = q\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{\sigma=0}^{N_4}a_{j\nu\sigma}\frac{Q(z-\sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(z-\sigma+x)}\right)\Bigg|_{z=\lambda};$$

числа $a_{j\nu\sigma}$ определены равенством (20). Отсюда и из (20) получаем требуемое равенство (21); суммирование можно начинать с $\sigma = N_2$, так как из (3) следует, что

$$\frac{\partial Q\,(z-\sigma)}{\partial z} = 0$$

при $z = \lambda$ и $\sigma = 0, 1, \ldots, N_2 - 1$. Лемма доказана.

Через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от параметров функций (1).

Лемма 5. Общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов (8) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_1 n}(n!)^{\frac{u}{2(2u-1)}}$.

Доказательство. Используя (15) и (21), нетрудно получить оценку модуля общего наименьшего знаменателя коэффициентов $p_{lj\nu}$. Если записать интеграл, входящий в правую часть (15) в виде вычета относительно точки $\zeta = \infty$, то станет ясно, что при всех допустимых значениях индексов j и ν эти интегралы лежат в поле $\mathbb{I}$, а модуль их общего наименьшего знаменателя оценивается сверху числом $e^{\gamma_2 n}$. Аналогичной величиной оценивается и модуль общего наименьшего знаменателя коэффициентов при этих интегралах. Из (10) следует, что произведение $\prod\limits_{x=1}^{N_1}(\lambda-\sigma+x)$, входящее в знаменатель (15), полностью сокращается. Оценка знаменателя дроби

$$\frac{\prod\limits_{x=0}^{N_2-1}(x-\sigma)^2}{N_1}$$

основывается на сравнении степеней, в которых простые числа входят в числитель и знаменатель этой дроби. Соответствующее рассуждение является стандартным (см., например, доказательство леммы 2 в [1, с. 186]) и приводит к оценке вида $e^{\gamma_3 n}$. Таким образом, модуль общего наименьшего знаменателя чисел $p_{0j\nu}$ оценивается сверху величиной $e^{\gamma_4 n}$. При

получении оценки для общего наименьшего знаменателя коэффициентов (21) приходится учитывать последствия дифференцирования. Легко видеть, что здесь требуется дополнительно оценить общие наименьшие знаменатели чисел

$$\frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{N_4}, \tag{23}$$

а также чисел

$$\frac{1}{\lambda+1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\lambda+N_2}. \tag{24}$$

Хорошо известно, что для чисел (23) соответствующая оценка есть $e^{\gamma_5 n}$. Для чисел (24) требуемая оценка получена в [11, с. 68–69]; здесь модуль общего наименьшего знаменателя оценивается сверху величиной $e^{\gamma_6}(n!)^{\frac{u}{2(2u-1)}}$. Суммируя все вышесказанное, получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

Кроме оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов (8) для доказательства основной теоремы важно иметь также оценки сверху модулей значений (при $z=\xi$) этих многочленов и модулей значений функций

$$r_{ljl'j'}(z) = P_{lj}(z)\,F_{l'j'}(z) - P_{l'j'}(z)\,F_{lj}(z). \tag{25}$$

Лемма 6. Справедливы оценки

$$|P_{lj}(\xi)| \leqslant e^{\gamma_7 n}(n!)^u, \quad |r_{ljl'j'}(\xi)| \leqslant e^{\gamma_7 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}.$$

В этих неравенствах константа γ_7 может зависеть также и от ξ.

Доказательство мы не приводим, так как данные оценки получаются непосредственно из определений многочленов $P_{lj}(z)$ и функций $r_{ljl'j'}(z)$; помимо этого принимается во внимание замечание о порядке нуля при $z=0$ функций (25), сделанное после равенства (7).

Дальнейшие шаги стандартны: располагая совместными приближениями для функций $F_{lj}(z)$, можно построить целую совокупность таких приближений с отличным от тождественного нуля определителем. Возможность такого построения основана на том, что функции (1) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, а функции (25) имеют порядок нуля, близкий к максимально возможному. Используется также и линейная независимость функций (1) над полем рациональных дробей, установленная в [14]. Подробно указанное построение рассматривается в работе [15]; менее подробно — в работе [16]. Затем осуществляется переход от функциональных приближений к числовым. Эта процедура также является стандартной; подробно она описана в работе [15]. Получающийся при этом результат оформим в виде леммы.

Лемма 7. При каждом натуральном n в поле $\mathbb{I}$ существует набор чисел $w_{lj}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, 2u$, $l = 0, 1$, $j = 1, \ldots, u$, обладающих следующими свойствами:

1) определитель $|w_{lj}^{(k)}|$, $k = 1, \ldots, 2u$, $l = 0, 1$, $j = 1, \ldots, u$, отличен от нуля;

2) модуль общего наименьшего знаменателя чисел $w_{lj}^{(k)}$ не превышает $e^{\gamma_8 n}(n!)^{\frac{u}{2(2u-1)}}$;

3) $\left|w_{lj}^{(k)}F_{l'j'}(\xi)-w_{l'j'}^{(k)}F_{lj}(\xi)\right|\leqslant e^{\gamma_8 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}$;

4) $\left|w_{lj}^{(k)}\right|\leqslant e^{\gamma_8 n}(n!)^{u}$.

В последних трех пунктах индексы k, l, j могут принимать все допустимые значения.

Из последней леммы утверждение основной теоремы 1 выводится хорошо известным приемом; см., например, рассуждения из [16, с. 396].

Заключение

Возможности метода, использованного для доказательства теоремы 1, еще не исчерпаны. Можно предположить, что этот метод позволит получить аналогичный результат и для дважды продифференцированной по параметру функции вида (1). При этом, по-видимому, придется ограничиться значениями соответствующих функций в точке вида $1/q$. Представляется естественной также возможность варьировать параметр λ, входящий в правую часть равенства (1).

Список литературы

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 448 с.
2. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1967. № 2. С. 55–62.
3. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // Ученые записки МГУ. 1959. Вып. 186. Математика. 9. С. 11–70.
4. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций // Труды Московского математического общества. 1959. Т. 10. С. 283–320.
5. Mahler K. Application of a theorem by A.B. Shidlovski // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. Vol. 305. P. 149–173.
6. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций одного класса // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14. № 1. С. 16–35.
7. Väänänen K. On the transcendence and algebraic independence of the values of certain E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1973. Vol. 537. P. 3–15.
8. Väänänen K. On the algebraic independence of some E-functions related to Kummer's functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1975. Vol. 1. P. 183–194.
9. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1975. Vol. 1. P. 93–109.
10. Mahler K. Lectures on Transcendental Numbers. Berlin: Springer Verlag. 1976.

11. Иванков П.Л. О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 2. С. 64–70.
12. Иванков П.Л. О значениях некоторых функций, удовлетворяющих однородным дифференциальным уравнениям // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 104–112.
13. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1981. 312 с.
14. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.
15. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Padé approximation to Diophantine inequalities in values of G-function // Lect. Notes in Math. 1985. Vol. 1135. P. 9–51.
16. Иванков П.Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая // Математические заметки. 2002. Т. 74, вып. 3. С. 390–397.

Science&Education
of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 10, pp. 102–113.
DOI: **10.7463/1014.0728991**
Received: 14.09.2014
Revised: 04.10.2014
© Bauman Moscow State Technical University

On Arithmetic Properties of the Values of Hypergeometric Functions Differentiated with Respect to Parameter

Ivankov P. L.[1,*], **Obukhov V. P.**[1]

[*]ivankovpl@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: estimates of linear forms, simultaneous approximations, generalized hypergeometric functions, differentiation with respect to parameter

In this paper we obtain the low estimate of the modulus of linear form in the values of generalized hypergeometric function and its derivatives (also with respect to parameter) at the nonzero point of some imaginary quadratic field. The parameter with respect to which the differentiation is fulfilled is irrational. For the solution of such a problem it is impossible to apply directly known in the theory of transcendental numbers Siegel's method, since above mentioned functions do not belong to a special class of entire functions introduced by Siegel. The method of Siegel implies the construction of linear approximating form (or simultaneous approximations) by means of Dirichlet principle. The constructed form must satisfy strict requirements, which are of importance in the arithmetic part of the method. Construction of this type cannot be realized if the least common denominator of the first n coefficients of Taylor series of the functions under consideration grows too fast. There exists a modification of the method of Siegel which makes it possible to apply in some cases Dirichlet principle for the construction of approximating forms also for hypergeometric functions with irrational parameters, but it is unknown if this modification can be applied for functions differentiated with respect to parameter.

Usually in the case of irrational parameters for the investigation of the arithmetic properties of the values of the functions under consideration one applies effective methods for constructing linear approximating form. If we apply such a construction in the case when we have differentiation with respect to the irrational parameter we shall have to introduce additional restrictions: the hypergeometric function must be of a special type and its value calculated in the point belonging to the vicinity of the origin of the coordinate system. The practice of dealing with similar problems shows that better results can be achieved by using simultaneous approximations. This approach makes it possible to consider functions of more general type and to reject the unnecessary restriction on the point in which the values of these functions are calculated.

In this paper we use the effective construction of simultaneous approximations. This requires some additional technique for the estimation of the least common denominator of the coefficients of the approximating polynomials. All this allows us to improve and generalize earlier results. Remaining within the methods used in this paper one can obtain some other results concerning the arithmetic properties of the values of the hypergeometric functions differentiated with respect to parameter.

References

1. Shidlovskii A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 448 p. (in Russian).
2. Belogrivov I.I. Transcendence and algebraic independence of values of some E-functions. *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 1967, no. 2, pp. 55–62. (in Russian).
3. Shidlovskii A.B. Transcendence and algebraic independence of the values of entire functions of certain classes. *Uchenye zapiski MGU. Vyp. 186. Matematika. T. 9*. Moscow, MSU Publ., 1959, pp. 11–70. (in Russian).
4. Shidlovskii A.B. Transcendentality and algebraic independence of the values of E-functions. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 1959, vol. 10, pp. 283–320. (in Russian).
5. Mahler K. Application of a theorem by A.B. Shidlovski. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1968, vol. 305, pp. 149–173.
6. Belogrivov I.I. Transcendentality and algebraic independence of the values of E-functions of the same class. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 1973, vol. 14, no. 1, pp. 16–35. (in Russian).
7. Väänänen K. On the transcendence and algebraic independence of the values of certain E-functions. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A: Math.*, 1973, vol. 537, pp. 3–15.
8. Väänänen K. On the algebraic independence of some E-functions related to Kummer's functions. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A: Math.*, 1975, vol. 1, pp. 183–194.
9. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A: Math.*, 1975, vol. 1, pp. 93–109.
10. Mahler K. *Lectures on Transcendental Numbers*. Springer Berlin Heidelberg, 1976. 254 p. (Ser. *Lecture Notes in Mathematics*; vol. 546). DOI: 10.1007/BFb0081107
11. Ivankov P.L. Values of hypergeometric functions that are differentiated with respect to parameter. *Chebyshevskii sbornik*, 2012, vol. 13, no. 2, pp. 64–70. (in Russian).
12. Ivankov P.L. On the values of some functions satisfying homogeneous differential equations. *Chebyshevskii sbornik*, 2013, vol. 14, no. 2, pp. 104–112. (in Russian).
13. Fel'dman N.I. *Sed'maya problema Gilberta* [The seventh Hilbert's problem]. Moscow, MSU Publ., 1982. (in Russian).

14. Ivankov P.L. On the linear independence of some functions. *Chebyshevskii sbornik*, 2010, vol. 11, no. 1, pp. 145–151. (in Russian).

15. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Pade approximation to Diophantine inequalities in values of G-function. In: *Number Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. 9–51. (Ser. *Lecture Notes in Mathematics*; vol. 1135). DOI: 10.1007/BFb0074600

16. Ivankov P.L. Simultaneous Approximations with Regard to the Specific Character of the Homogeneous Case. *Matematicheskie zametki*, 2002, vol. 71, iss. 3, pp. 390–397. (English translation: *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 3, pp. 355–361. DOI: 10.1023/A:1014898808012).