

Обратная магнитостатическая задача для ферромагнетиков

01, январь 2014

DOI: 10.7463/0114.0695966

Игнатьев В. К., Орлов А. А.

УДК 537.6

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

ignatjev@vlpost.ru

orlwork@inbox.ru

Введение

Пассивная диагностика ферромагнитных материалов на основе решения обратной магнитостатической задачи, то есть восстановление намагниченности тела по измеренному вблизи его поверхности распределению магнитного поля, является важной задачей радиофизики и лежит в основе современных магнитных методов микроструктурного анализа, томографии и неразрушающего контроля. Понятие магнитного микроструктурного анализа введено Р.И. Янусом [1], как совокупность электромагнитных методов, позволяющих проверять изделия из ферромагнитных материалов на отсутствие в них структурных дефектов. В России эта задача изучается почти в течение столетия многими исследователями как расчетным путем с использованием различных аппроксимаций, так и экспериментально, главным образом применительно к ферромагнетикам. В качестве универсальной модели дефекта микроструктуры обычно принимается разработанная В.К. Аркадьевым [2] эллипсоидная модель. Такая форма дефекта позволяет получать решения и для других форм, например для шара, узкой трещины, которая может быть уподоблена очень тонкому или удлинённому эллипсоиду. С. В. Вонсовский [3] также рассматривал дефект в виде эллипсоида и показал, что сферический дефект действует наружу как диполь с моментом, помещенным в центр сферы. В случае трехосного эллипсоида нельзя считать, что созданное им внешнее поле эквивалентно действию некоторого диполя, помещенного в центре эллипсоида. Однако для предельных случаев удлинённый эллипсоид вращения эквивалентен дефекту в виде волосовины, а сжатый эллипсоид вращения соответствует дефекту в виде трещины.

Сложность решения обратной магнитостатической задачи во многом обусловлена нелинейностью магнитных свойств, и следовательно сложной связью между параметрами дефектов и магнитных

распределений. Так, А.Б. Сапожников [4] показал, что внутренние дефекты ферромагнитных материалов создают существенно нелокальные распределения полей рассеяния. Попытка описать нелинейные магнитные свойства через нелинейные дифференциальные уравнения для потенциала магнитного поля проделаны в работе Р.В. Загидулина [5]. При этом различные методы решения обратной задачи магнитостатики, оперируют с моделями, позволяющими исследовать образцы только в состоянии технического насыщения [1], поскольку ферромагнетики при меньших полях обладают остаточной намагниченностью, которая связана с микроструктурой материала неоднозначно [6] и существенно зависит от механических напряжений [7]. Следует отметить, что регулярные сообщения в различных научных журналах о разработке и использовании нового математического и программного обеспечения для решения задач магнитостатики свидетельствует о том, что эта область вычислительной электродинамики еще далека от своего логического завершения. Так, решение обратной магнитостатической задачи для слабонамагниченных ферромагнетиков считается невозможным из-за влияния магнитной предыстории, то есть остаточной намагниченности [8].

Целью статьи является формулировка физических основ микроструктурного анализа ферромагнитных образцов в геомагнитном поле без дополнительного подмагничивания. Такой способ анализа является пассивным и более технологичным, чем рассмотренные в работах [1 – 8]. В отличие от работы [9] рассматривается двумерное распределение полей рассеяния.

Новизной предлагаемого подхода является параметризация обратной магнитостатической задачи путем разделения намагниченности на три составляющие в зависимости от физической природы возникновения для ферромагнетиков, по которым не протекали токи намагничивания: медленно меняющаяся намагниченность, дипольная составляющая, отвечающая за нарушение структуры объекта диагностики и шумовая составляющая. Магнитная предыстория объекта диагностики учитывается путем восстановления медленно меняющейся намагниченности.

1. Магнитостатика ферромагнетиков

Основной проблемой магнитного микроструктурного анализа является некорректность обратной магнитостатической задачи [10], единственность ее решения может быть достигнута при наличии априорной информации, ограничивающей класс допустимых функций. Одним из таких предположений является физическая модель ферромагнетиков. В электродинамике конденсированных сред принимается, что магнитное поле создается свободными и связанными токами (токами проводимости $\mathbf{j}_c$ и молекулярными $\mathbf{j}_m$). При этом принимается, что $\text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_m(\mathbf{r})$, причем намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ непрерывна во всем пространстве и равна нулю вне намагниченного тела [11]. Такое представление вполне приемлемо для диа- и парамагнетиков, в которых свободный ток создается движением электронов проводимости, а связанный – внутриатомным

орбитальным движением валентных электронов.

Для ферромагнетиков же измерение гиромагнитного отношения по методу Эйнштейна – де Гааза дает значение 1,98, то есть в ферромагнетике намагниченность создается спиновыми магнитными моментами, которые не связаны с движением носителей заряда [12]. В квантовой электродинамике показывается, что гамильтониан нерелятивистского электрона во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_0$ содержит слагаемое $\hat{H} = -\gamma \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}}$, где $\hat{\mathbf{s}}$ – спиновый оператор электрона, γ – гиромагнитное отношение [13].

Известно, что среднее значение орбитального момента для невырожденных состояний равно нулю [14]. Кристаллическое поле ферромагнетика обладает достаточно низкой симметрией, чтобы снять все орбитальное вырождение и заморозить орбитальный момент. Поэтому в ферромагнетике спиновые и орбитальные переменные можно считать независимыми, и записать полную волновую функцию электрона ψ как произведение спиновой $\alpha(\mathbf{s})$ и орбитальной $\varphi(\mathbf{r})$ частей. Тогда энергия взаимодействия электрона с магнитным полем принимает вид

$$E = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = -\gamma \langle \varphi(\mathbf{r}) | \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) | \varphi(\mathbf{r}) \rangle \langle \alpha(\mathbf{s}) | \hat{\mathbf{s}} | \alpha(\mathbf{s}) \rangle = -\iiint \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \mathbf{m}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (1)$$

Таким образом, нерелятивистский электрон в отсутствии орбитального момента взаимодействует с неоднородным магнитным полем как распределенный магнитный диполь с плотностью дипольного момента $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \rho(\mathbf{r})$, где $\mathbf{m}$ – спиновый магнитный момент электрона, $\rho(\mathbf{r}) = |\varphi(\mathbf{r})|^2$, $|\mathbf{m}| = \mu_B$.

В спиновый гамильтониан системы электронов входит слагаемое, описывающее диполь-дипольное взаимодействие в виде [14]

$$\hat{H}_d = \frac{\gamma^2 \mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{s}}_1 \hat{\mathbf{s}}_2 r^2 - 3(\hat{\mathbf{s}}_1 \mathbf{r})(\hat{\mathbf{s}}_2 \mathbf{r})}{r^5}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Если в полном спиновом гамильтониане выделить обменное взаимодействие, то полную волновую функцию двух электронов можно представить как произведение одноэлектронных функций $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \varphi_1(\mathbf{r}_1) \alpha_1(\mathbf{s}_1) \varphi_2(\mathbf{r}_2) \alpha_2(\mathbf{s}_2)$. Тогда энергия диполь-дипольного взаимодействия

$$E_d = \langle \psi | \hat{H}_d | \psi \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \iiint \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 r^2 - 3(\mathbf{m}_1 \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \mathbf{r})}{r^5} \rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2) d^3r_1 d^3r_2$$

с учетом формулы (1) будет иметь вид взаимодействия распределенных магнитных моментов, каждый из которых создает магнитное поле

$$\mathbf{b}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \left\{ \frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{m}_i)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \rho_i(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (3)$$

Здесь $\rho_i(\mathbf{r}) = |\varphi_i(\mathbf{r})|^2$, $\mathbf{m}_i$ – спиновый магнитный момент электрона i -го электрона, $\varphi_i(\mathbf{r})$ – орбитальная часть его волновой функции, $\mathbf{b}_i(\mathbf{r})$ – создаваемое им в точке $\mathbf{r}$ магнитное поле.

Интегрирование в (3) ведется по объему D ферромагнетика, поскольку электроны в металле находятся в довольно глубокой потенциальной яме, можно считать, что все $\rho_i(\mathbf{r} \notin D) \equiv 0$. Интеграл (3) при $\mathbf{r} \in D$ является несобственным и условно сходящимся [15], неопределенность его значения физически обоснована модельным характером нерелятивистского гамильтониана (2). Формула (2) применима при $r > r_0$, где r_0 – характерное расстояние, на котором начинают проявляться эффекты нелокальности и радиационные поправки [13]. Поскольку r_0 много меньше радиуса орбитали валентных электронов, а сами поправки имеют порядок малости квадрата постоянной тонкой структуры, с приемлемой для магнитометрии точностью можно принимать интеграл в (3) в смысле главного значения, когда стягиваемые к точке $\mathbf{r}$ области являются шарами [15].

Если по ферромагнетику D не протекают токи проводимости, то полное магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ во всем пространстве создано спиновыми магнитными моментами $\mathbf{m}_i$ всех валентных электронов, локализованных в элементарных ячейках с центрами в точках $\mathbf{r}_j \in D$. Тогда во всем пространстве поле может быть выражено в виде несобственного интеграла

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{b}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \left\{ \frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} d^3 r', \quad (4)$$

где введена полная плотность магнитного момента как

$$\mathbf{m}(\mathbf{r} \in D) = \sum_i \mathbf{m}_i \rho_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{m}(\mathbf{r} \notin D) \equiv 0. \quad (5)$$

В современной электродинамике сплошных сред рассматриваются макроскопические поля, плотности зарядов и токов как средние по макроскопически малому объему, содержащему при этом большое количество элементарных ячеек, от микроскопических, то есть локальных полей, плотностей зарядов и токов [11]. При этом следует иметь в виду, что определенные таким образом макроскопические величины являются в известном смысле феноменологическими, в отличие от микроскопических величин они зависят от выбора области усреднения.

Из определения (5) следует, что полная плотность магнитного момента $\mathbf{m}(\mathbf{r})$, которая является квантовым средним, – непрерывная гладкая во всем пространстве функция. Она, как и микроскопические плотности заряда и тока, существенно меняется на расстояниях порядка

размера атома, в частности близка к нулю вблизи ядра атома, поэтому ее по аналогии с микроскопическими плотностями заряда и тока можно формально рассматривать как микроскопическую намагниченность. Однако для анализа магнитостатической задачи удобно ввести микроскопическую намагниченность $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$ как среднее от полной плотности магнитного момента $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ по микроскопически малому объему одной элементарной ячейки v :

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \iiint_v \mathbf{m}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (6)$$

Поскольку для ферромагнетика элементарная ячейка определена однозначно [12, 14], микроскопическая намагниченность (6) также определена однозначно, в отличие от макроскопической намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, которая обычно вводится как среднее вида (6) по макроскопическому объему домена V .

В формуле (5) можно выделить суммирование по элементарным ячейкам

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \sum_j \sum_k \mathbf{m}_{j,k} \rho_{j,k}(\mathbf{r}),$$

где $\rho_{j,k}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{m}_{j,k}$ плотность вероятности и магнитный момент k -го электрона в j -й элементарной ячейке, соответственно. В силу правила Гунда [13] электроны, локализованные на d -орбиталях атома, имеют параллельные спины, поэтому можно полагать, что $\mathbf{m}_{j,k} = \mathbf{m}_j$. Орбитали же электронов ориентированы в пространстве произвольно, что и обеспечивает нулевой средний орбитальный момент [14]. Обозначим полную плотность вероятности в j -й элементарной ячейке как

$$\rho_j(\mathbf{r}) = \sum_k \rho_{j,k}(\mathbf{r}).$$

Эта функция, как и все вводимые далее, нормирована не на единицу, как

одноэлектронная плотность вероятности $\rho_i(\mathbf{r})$, а на полное число электронов в объеме D . Тогда

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \sum_j \mathbf{m}_j \tilde{\rho}_j(\mathbf{r}), \quad \tilde{\rho}_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \iiint_v \rho_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{\rho}_j(\mathbf{r})$ – усредненная по объему элементарной ячейки v полная плотность вероятности, гладкая функция, почти постоянная в пределах j -й элементарной ячейки и плавно уменьшающаяся до нуля на расстоянии порядка $2d$ от центра ячейки, где $d = \sqrt[3]{v}$ – характерный размер элементарной ячейки. Заметим, что определенные таким образом функции $\tilde{\rho}_j(\mathbf{r})$ для соседних элементарных ячеек существенно перекрываются

В формуле (7) можно выделить суммирование по областям магнитных доменов V_n :

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_l \mathbf{m}_{n,l} \tilde{\rho}_{n,l}(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где $\tilde{\rho}_{n,l}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{m}_{n,l}$ плотность вероятности и магнитный момент для l -й элементарной ячейки в n -м домене, соответственно. Обменное взаимодействие в ферромагнетиках ориентирует параллельно спиновые моменты атомов в соседних элементарных ячейках в пределах одного домена. Считая элементарные ячейки одинаковыми, можно положить $\mathbf{m}_{n,l} = \mathbf{m}_n$, $\tilde{\rho}_{n,l}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)$, где $\mathbf{r}_l$ – координата центра l -й элементарной ячейки в n -м домене. Тогда внутреннее суммирование в формуле (8) можно заменить интегрированием по объему домена V_n , введя усредненную по домену плотность вероятности $\rho_n(\mathbf{r})$:

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{m}_n \rho_n(\mathbf{r}), \quad \rho_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \iiint_V \tilde{\rho}_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (9)$$

Введенная соотношением (9) функция $\rho_n(\mathbf{r})$ плавно меняется на расстоянии порядка характерного размера домена $l = \sqrt[3]{V}$. Поэтому можно положить, что

$$\left| \frac{\partial \rho_n(\mathbf{r})}{\partial r_\alpha} \right| \leq \frac{\rho_n(\mathbf{r})}{l}, \quad \left| \frac{\partial \tilde{m}_\beta(\mathbf{r})}{\partial r_\alpha} \right| \leq \frac{|\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})|}{l}, \quad \alpha, \beta = x, y, z. \quad (10)$$

Эффективным методом решения обратных задач, к которым относится восстановление намагниченности тела по измеренному вне его, например, на поверхности S магнитному полю является регуляризация по А.Н. Тихонову [10]. Ее применение к магнитостатической задаче предполагает определение множества функций, в котором ищется квазирешение, и параметров регуляризации из физических оснований. В рассматриваемой задаче ими может быть условие ограничения вариации [16]. Так, для вариации микроскопической намагниченности на расстоянии $\delta \mathbf{r}$ в первом порядке малости получаем

$$|\delta \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})| = \left| \left(\delta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) \right| \leq \delta r \sqrt{\sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial \tilde{m}_\beta}{\partial r_\alpha} \right)^2}. \quad (11)$$

Поскольку элементарные ячейки в пределах домена полагаются одинаковыми, максимальная вариация микроскопической намагниченности соответствует вариации расстояния δr порядка размера d элементарной ячейки. Тогда, учитывая, что число элементарных ячеек в домене достаточно велико, из соотношений (10) и (11) получаем условие ограничения вариации в виде

$$|\delta \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})| \leq \frac{3d}{l} |\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})| \ll |\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})|. \quad (12)$$

Обратную задачу восстановления намагниченности тела D по нормальной компоненте индукции $B_n(\mathbf{r})$, измеренной на поверхности S можно свести к СЛАУ. С учетом формулы (4) получаем

$$B_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left\{ \frac{3((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \tilde{\mathbf{m}}_i)((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_j)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^5} - \frac{\tilde{\mathbf{m}}_i \cdot \mathbf{n}_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \right\} v_i, \quad (13)$$

где обозначено $B_j = B_n(\mathbf{r}_j \in S)$, $\tilde{\mathbf{m}}_i = \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}_i \in D)$, $\mathbf{n}_j = \mathbf{n}(\mathbf{r}_j \in S)$ – внешняя нормаль к поверхности S в точке $\mathbf{r}_j$, v_i – объем элементарной ячейки с центром в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$. Рассматривая СЛАУ (13) как переопределенную можно решать ее методами регуляризации, использующими условие ограничения вариаций вида (12) [10, 16]. Таким образом можно однозначно определить микроскопическую намагниченность $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$ внутри тела D как квазирешение СЛАУ (13) при условии, что она является сильно переопределенной, то есть число точек на поверхности S тела D , в которых измеряется нормальная компонента магнитной индукции, намного больше числа элементарных ячеек внутри тела D . Понятно, что такой математически корректный способ решения обратной магнитостатической задачи превосходит возможности современной измерительной и вычислительной техники.

Микроскопическая намагниченность $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$, входящая в уравнения (4) – (13), существенно меняется в пределах элементарной ячейки v . Для магнитного микроструктурного анализа более информативной величиной является макроскопическая намагниченность, усредненная по физически малому объему $V \gg v$, например, по объему домена [12]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{m}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (14)$$

Для однородного ферромагнетика можно считать, что отклонение микроскопической намагниченности $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$ от усредненной намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ обусловлено локализованными в окрестностях точек $\mathbf{r}_k$ дефектами микроструктуры, с которыми связаны намагниченности $\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}(\mathbf{r})$, причем $\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}(\mathbf{r} \notin V_k) \equiv 0$, и флуктуационной составляющей намагниченности $\mathbf{M}^{(f)}(\mathbf{r})$, создаваемой дислокациями и междоменными границами. Тогда

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \sum_k \tilde{\mathbf{m}}^{(k)}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}^{(f)}(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Соответственно, уравнение (4) принимает вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \left\{ \frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} d^3 r' + \mathbf{B}^{(d)}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^{(f)}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

где $\mathbf{B}^{(d)}(\mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{B}^{(k)}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{B}^{(k)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_k} \left\{ \frac{3(\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} d^3 r' \quad (17)$$

– магнитное поле, создаваемое дефектами микроструктуры, расположенными областях $V_k \in D$,

$$\mathbf{B}^{(f)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \left\{ \frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}^{(f)}(\mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{M}^{(f)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} d^3 r' \quad (18)$$

– флуктуационная составляющая магнитного поля.

Если локализованным дефектом является внутренняя полость V_k диаметром много меньше расстояния до поверхности тела, можно в пределах области V_k положить в подынтегральном выражении (17) $\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{M}(\mathbf{r}_k)$ и воспользоваться мультипольным разложением [11]. Тогда в первом приближении

$$\mathbf{B}^{(k)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 V_k}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} - \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}_k) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^5} \right\}. \quad (19)$$

Для магнитомягкого ферромагнетика с редкими и малыми дефектами микроструктуры можно положить

$$\int_D |\mathbf{M}^{(d)}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}^{(f)}(\mathbf{r})| d^3 r \ll \int_D |\mathbf{M}(\mathbf{r})| d^3 r.$$

Тогда $|\mathbf{B}^{(d)}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^{(f)}(\mathbf{r})| \ll |\mathbf{B}(\mathbf{r})|$. Поэтому при решении методом регуляризации обратной задачи восстановления медленно меняющейся намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ по измеренному распределению магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ величину $|\mathbf{B}^{(d)}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}^{(f)}(\mathbf{r})|$ можно рассматривать как невязку [16].

Для обоснования связи магнитного поля с макроскопической намагниченностью вида (14) необходимы определенные предположения о микроструктуре тела D . Будем считать его магнитомягким и рассмотрим процесс намагничивания. Динамика намагниченности может быть описана уравнением Гильберта [17]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \left\{ \mathbf{M} \times \left(\mathbf{B}_{ef} - \frac{\alpha}{\gamma M} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) \right\}, \quad (20)$$

где α – коэффициент затухания, $\mathbf{B}_{ef}$ – эффективное магнитное поле, действующее на магнитный

диполь.

Анализ решения уравнения (20) показывает, что при $\alpha \ll 1$ вектор намагниченности приближается к направлению поля $\mathbf{B}_{ef}$, совершая несколько витков вокруг него [17]. Тогда квазилинейное решение уравнения (20) можно приближенно представить в виде интеграла Дюамеля

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^t \chi(\mathbf{r}, t') \mathbf{B}_{ef}(\mathbf{r}, t - t') dt', \quad (21)$$

где $\chi(\mathbf{r}, t)$ – функция отклика, учитывающая гистерезис как запаздывание.

Если токи, намагничивавшие тело D , не протекали через само тело, можно положить, что $\mathbf{B}_{ef}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – магнитное поле, создаваемое внешними источниками, причем $\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r} \in D, t) \equiv 0$, $\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t)$ – магнитное поле вида (4), создаваемое магнитными диполями тела D , кроме рассматриваемого, то есть

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{D-d} \left\{ \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} d^3 r'. \quad (22)$$

Здесь d – шаровая полость диаметром порядка размера элементарной ячейки с центром в точке $\mathbf{r}$.

Интеграл (22) является собственным, и $\text{div } \mathbf{B}'(\mathbf{r} \in D, t) \equiv 0$, $\text{rot } \mathbf{B}'(\mathbf{r} \in D, t) \equiv 0$ [15]. Тогда из уравнения (21) следует, что

$$\text{div } \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t')}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{ef}(\mathbf{r}, t - t') dt'. \quad (23)$$

$$\text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t')}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{ef}(\mathbf{r}, t - t') dt'. \quad (24)$$

Если микроструктура ферромагнетика достаточно однородная, можно положить, что во всех точках области D

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t')}{\partial \mathbf{r}} \right| dt' \ll \frac{1}{D}, \quad (25)$$

где D – диаметр (характерный размер) области D . Тогда из уравнений (23) и (24) следует, что после выключения источников намагничивающих полей и установления стационарной намагниченности будут выполняться условия

$$\int_D |\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r})| d^3r \ll \frac{B_{cp}}{\mu_0 D}, \quad \int_D |\operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r})| d^3r \ll \frac{B_{cp}}{\mu_0 D}, \quad (26)$$

где B_{cp} – среднее по объему тела D значение модуля магнитной индукции. Соотношения (26) можно назвать условием магнитной мягкости ферромагнетика, придать им локальную форму

$$|\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r})| \ll |\mathbf{M}(\mathbf{r})|/D, \quad |\operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r})| \ll |\mathbf{M}(\mathbf{r})|/D. \quad (27)$$

которую можно рассматривать как условие медленного изменения намагниченности.

Следует отметить, что разделение намагниченности (15) проведено феноменологически, оно зависит от выбора физически малого объема V . Области, в которых нарушается условие (25) и, соответственно, не выполняются соотношения (26) и (27), рассматриваются как дефекты микроструктуры. Локализованными при этом считаются дефекты микроструктуры, имеющие размеры много меньше l и разделенные расстоянием много большим, чем l .

2. Обратная магнитостатическая задача для ферромагнетиков

Рассмотрим восстановление макроскопической намагниченности ферромагнетика по измеренным на его поверхности значениям компонент макроскопического магнитного поля на примере квазидвумерного объекта – пластины, толщина которой h много меньше поперечного размера L .

Пусть $m_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$ – компоненты микроскопической намагниченности пластины, причем

$$m_i(x \notin [-L/2, L/2], y \notin [-L/2, L/2], z \notin [-h/2, h/2]) \equiv 0, \quad M_i(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} m_i(x, y, z) dz - \text{усредненная по}$$

толщине компонента намагниченности.

Тогда тензорная связь между вектором намагниченности и магнитной индукции имеет вид свертки

$$B_i(x, y) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} K_{ij}(x - x', y - y') M_j(x', y') dx' dy', \quad (28)$$

где $K_{ij}(x, y)$ – тензор системных функций намагниченности (рисунки 1 – 3):

$$\begin{aligned}
K_{xx}(x, y) &= \frac{d-h}{4\pi(x^2+y^2)\left[x^2+y^2+(d-h)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2+(h-z)^2} \right] + \\
&+ \frac{z}{4\pi(x^2+y^2)\left[x^2+y^2+h^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2+h^2} \right]; \\
K_{yy}(x, y) &= \frac{d-h}{4\pi(x^2+y^2)\left[x^2+y^2+(d-h)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{x^2-y^2}{y^2+x^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2+(d-h)^2} \right] + \\
&+ \frac{h}{4\pi(x^2+y^2)\left[x^2+y^2+h^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{x^2-y^2}{y^2+x^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2+h^2} \right]; \\
K_{xy}(x, y) = K_{yx}(x, y) &= \frac{-xy(d-h)}{4\pi(x^2+y^2)\left[x^2+y^2+(d-h)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{2}{y^2+x^2} + \frac{1}{x^2+y^2+(d-h)^2} \right] + \\
&+ \frac{-xyh}{4\pi(x^2+y^2)\left[x^2+y^2+h^2\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{2}{y^2+x^2} + \frac{1}{x^2+y^2+h^2} \right]; \\
K_{xz}(x, y) = K_{zx}(y, x) &= \frac{x}{4\pi} \left[\frac{1}{\left[x^2+y^2+(h-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2+y^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]; \\
K_{yz}(x, y) = K_{zy}(x, y) &= \frac{y}{4\pi} \left[\frac{1}{\left[x^2+y^2+(h-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2+y^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right]; \\
K_{zz}(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{h}{\left[x^2+y^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{h-d}{\left[x^2+y^2+(h-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right].
\end{aligned} \tag{29}$$

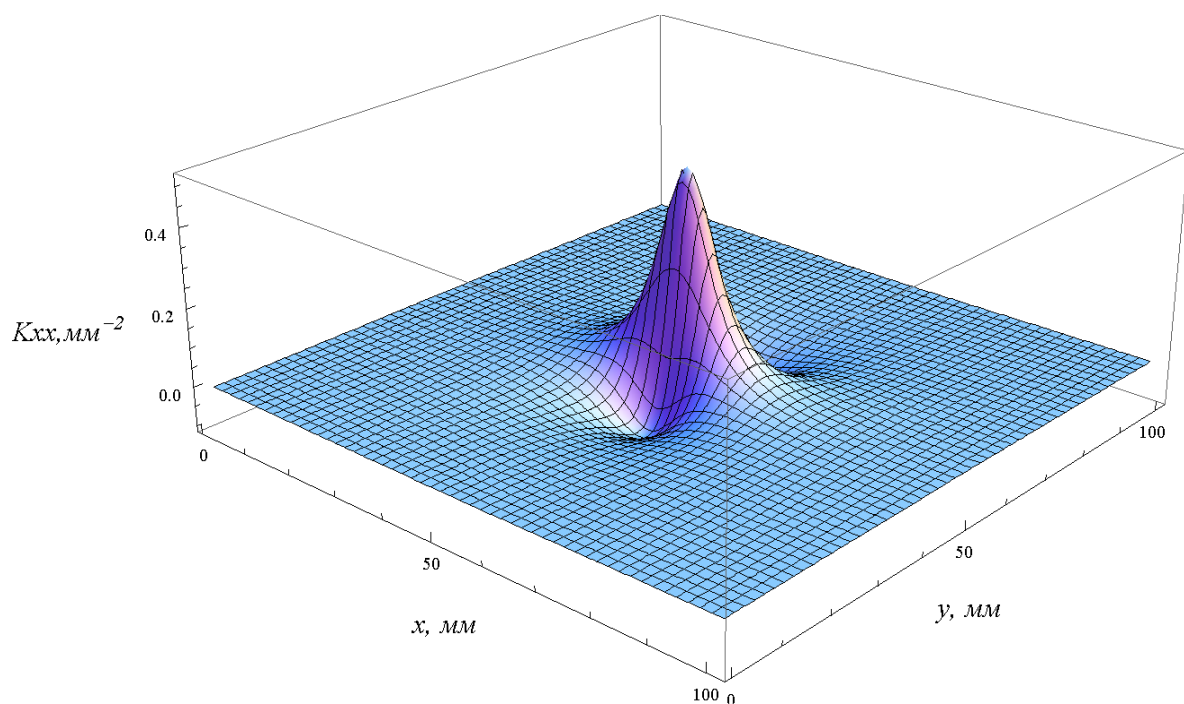


Рисунок 1 – График компоненты $K_{xx}(x, y, h)$ тензора системных функций, $h = 1$ мм, $d = 0,3$ мм

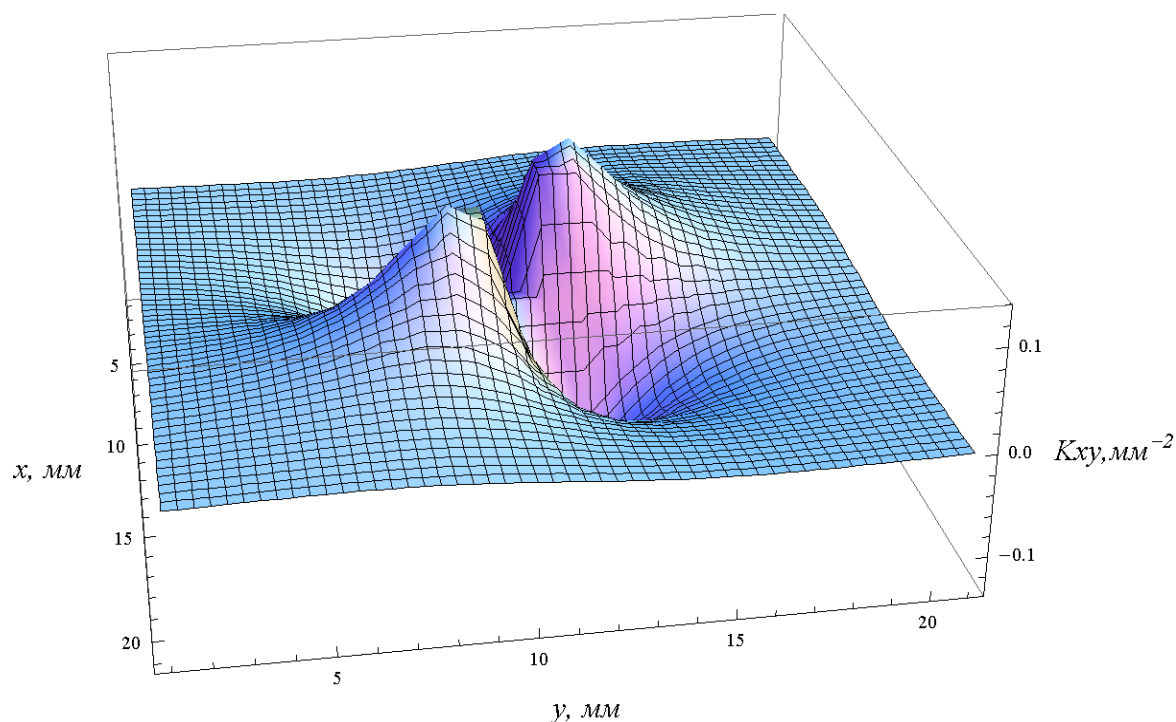


Рисунок 2 – График компоненты $K_{xy}(x, y, h)$ тензора системных функций $h = 1$ мм, $d = 0,3$ мм

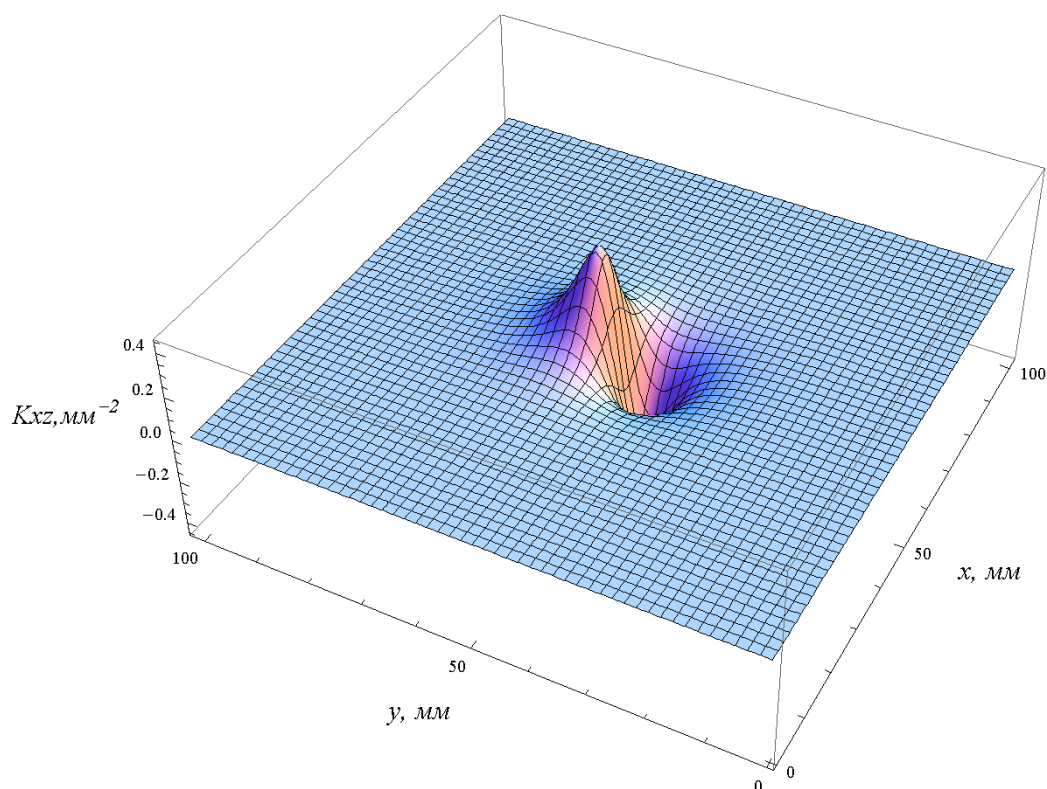


Рисунок 3 – График компоненты $K_{zz}(x, y, h)$ тензора системных функций $h = 1$ мм, $d = 0,3$ мм

Рассмотрим значения компонент индукции макроскопического поля, усредненного по квадрату со стороной $l \ll L$:

$$\tilde{B}_i(x, y) = \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} B_i(x - x'', y - y'', z) dx'' dy'' . \quad (30)$$

Поскольку $M_i(x \notin [-L/2, L/2], y \notin [-L/2, L/2]) \equiv 0$, пределы интегрирования в формуле (28) можно расширить до $\pm\infty$ и переписать ее в виде

$$B_i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x', y') M_j(x - x', y - y') dx' dy' .$$

Тогда соотношение (30) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x', y') \tilde{M}_j(x - x', y - y') dx' dy' = \\ &= \int_{-L'/2}^{L'/2} \int_{-L'/2}^{L'/2} K_{ij}(x - x', y - y') \tilde{M}_j(x', y') dx' dy' , \end{aligned} \quad (31)$$

$$\tilde{M}_i(x, y) = \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} m_i(x - x'', y - y'', z - z'') dx'' dy'' dz'' - \quad (32)$$

компоненты макроскопической намагниченности вида (14) – медленно меняющиеся функции координат x и y , где $L' = L + l$ и учтено, что

$$\tilde{M}_i(x \notin [-L/2 - l/2, L/2 + l/2], y \notin [-L/2 - l/2, L/2 + l/2]) \equiv 0 .$$

Таким образом, усредненная (макроскопическая) индукция связана с макроскопической намагниченностью такими же интегральными соотношениями, как и микроскопическая индукция с микроскопической намагниченностью с соответствующим расширением пределов

интегрирования. Продолжим функции $M_i(x, y)$ и $\tilde{M}_i(x, y)$ периодически на двумерной плоскости:

$$M_i'(x, y) = M_i(x, y), \quad M_i''(x, y) = \tilde{M}_i(x, y) \quad \text{при}$$

$x \in [-L'/2, L'/2], y \in [-L'/2, L'/2], M_i'(x - L'n, y - L'k) = M_i(x, y), M_i''(x - L'n, y - L'k) = M_i''(x, y)$ для остальных значений координат x, y . Тогда периодическое разложение в ряд Фурье для функций $M_i'(x, y)$ и $M_i''(x, y)$ имеет вид

$$\begin{aligned} M_i'(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_i[n, k] \exp(2\pi i n x / L') \exp(2\pi i k y / L'), \\ M_i''(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{m}_i[n, k] \exp(2\pi i n x / L') \exp(2\pi i k y / L'), \end{aligned} \quad (33)$$

где в соответствии с формулой (32)

$$\begin{aligned}\tilde{m}_i[n, k] &= \frac{m_i[n, k]}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} \exp(-2\pi i n x''/L') dx'' \int_{-l/2}^{l/2} \exp(-2\pi i n y''/L') dy'' = \\ &= \frac{m_i[n, k] a' b'}{\pi n k l^2} \sin\left(\frac{\pi n l}{L'}\right) \sin\left(\frac{\pi k l}{L'}\right).\end{aligned}$$

Если $L/l = N$, то $\tilde{m}_i[N+1, N+1] = 0$. Кроме того, так как

$$\int_{-s/2}^{a+s/2} \int_{-s/2}^{b+s/2} M_i^2(x, y) dx dy = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |m_i[n, k]|^2 < \infty,$$

то коэффициенты ряда (33) ограничены, и ряд Фурье, описывающий медленно меняющуюся намагниченность быстро сходится, следовательно, его можно оборвать на N -м члене. Для компонент медленно меняющейся намагниченности формула (33) принимает вид

$$\begin{aligned}M_i''(x, y) &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N c_{ink} \cos(2\pi n x / L') \cos(2\pi k y / L') + s_{ink} \sin(2\pi n x / L') \cos(2\pi k y / L') + \\ &+ f_{ink} \cos(2\pi n x / L') \sin(2\pi k y / L') + g_{ink} \sin(2\pi n x / L') \sin(2\pi k y / L').\end{aligned}\quad (34)$$

Для определения коэффициентов разложения c_{ink} , s_{ink} , f_{ink} , g_{ink} подставим (34) в (28) в пределах области координат, где располагается исследуемый образец:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_i(x, y) &= \int_{-L'/2}^{L'/2} \int_{-L'/2}^{L'/2} K_{ij}(x-x', y-y') \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N [c_{jnk} \cos(2\pi n x / L') \cos(2\pi k y / L') + \\ &+ s_{jnk} \sin(2\pi n x / L') \cos(2\pi k y / L') + f_{jnk} \cos(2\pi n x / L') \sin(2\pi k y / L') + \\ &+ g_{jnk} \sin(2\pi n x / L') \sin(2\pi k y / L')] dx' dy'.\end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, раскрывая скобки, получаем

$$\tilde{B}_i(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N (c_{jnk} C_{jnk}(x, y) + s_{jnk} S_{jnk}(x, y) + f_{jnk} F_{jnk}(x, y) + g_{jnk} G_{jnk}(x, y)), \quad (35)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
C_{jink}(x, y) &= \int_{-L'/2}^{L'/2} \int_{-L'/2}^{L'/2} \cos(2\pi nx' / L') \cos(2\pi ky' / L') K_{ij}(x - x', y - y') dx' dy'; \\
S_{jink}(x, y) &= \int_{-s/2}^{L'/2} \int_{-s/2}^{L'/2} \sin(2\pi nx' / L') \cos(2\pi ky' / L') K_{ij}(x - x', y - y') dx' dy'; \\
F_{jikk}(x, y) &= \int_{-L'/2}^{L'/2} \int_{-L'/2}^{L'/2} \cos(2\pi nx' / L') \sin(2\pi ky' / L') K_{ij}(x - x', y - y') dx' dy'; \\
G_{jikk}(x, y) &= \int_{-L'/2}^{L'/2} \int_{-L'/2}^{L'/2} \sin(2\pi nx' / L') \sin(2\pi ky' / L') K_{ij}(x - x', y - y') dx' dy'.
\end{aligned} \tag{36}$$

На основании выражений (35) и (36) для большого произвольного числа отсчетов поля можно получить переопределенную СЛАУ, решением которой будут являться значения коэффициентов Фурье c_{ink} , s_{ink} , f_{ikk} , g_{ikk} . При этом медленно меняющаяся намагниченность может быть найдена в любой точке в области расположения тела из формулы (34).

Идентификация параметров локализованных нарушений микроструктуры пленки основана на обнаружение областей с быстрым изменением поля, соответствующих разрывным значениям намагниченности, т.е. дефектам сплошности. В соответствии с формулой (17) магнитное поле рассеяния, создаваемое дефектом сплошности, размер которого много меньше расстояния до поверхности тела, имеет дипольный характер, причем магнитный момент связанного с дефектом диполя пропорционален вектору медленно меняющейся намагниченности в точке локализации дефекта. Исходными данными для восстановления локальных нарушений микроструктуры в соответствии с (18) являются значения быстро меняющихся компонент поля рассеяния

$$B_i''(x, y) = B_i(x, y) - \tilde{B}_i(x, y) = B_i^{(d)}(x, y) + B_i^{(f)}(x, y), \quad i = x, y, z.$$

Особенностью алгоритмов идентификации параметров магнитного диполя, соответствующего дефектам микроструктуры является то, что они должны работать с областью локализацией диполя. Поэтому получаемые данные необходимо предварительно обрабатывать, разделяя исходную последовательность данных на области, где предположительно располагается дефект. Для одномерных распределений магнитного поля было предложено использование дисперсии Алана [9, 18] в качестве детектора расположения магнитных диполей. В случае, когда данные представляют собой двумерный массив данных k -ой компоненты магнитного поля $B_k[i, j]$, оказалось наиболее эффективно использование детектора, основанного на дискретном операторе Лапласа

$$D_k[i, j] = \frac{\sum_{i'=-L_x}^{L_x} \sum_{j'=-L_y}^{L_y} \Delta B_k[i - i', j - j']}{S_k[i, j]}. \tag{37}$$

Здесь L_x, L_y – длины окна усреднения по соответствующей координате, $S_k[i, j]$ – нормирующая последовательность усредненного магнитного поля:

$$S_k[i, j] = \sum_{i'=-L_x}^{L_x} \sum_{j'=-L_y}^{L_y} B_k[i-i', j-j']. \quad (38)$$

Дискретный оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta B_k[i, j] = 4B_k[i, j] - B_k[i+1, j] - B_k[i-1, j] - B_k[i, j+1] - B_k[i, j-1].$$

Найденные области с быстрым изменением магнитного поля, анализируются путем подбора параметров теоретической модели, адекватно описывающей реальное поле дефекта, используя алгоритмы минимизации функционала квадратичной ошибки.

Если диаметр области высокого значения детектора (37) не превосходит толщины пластины h , то в качестве модели принимается поле диполя вида (19). При этом в качестве первого приближения за координаты диполя (x_k, y_k) принимается координата экстремума величины (37), варьируемыми параметрами являются объем V_k области локального дефекта и его координата z_k . По полученным параметрам строится дипольная составляющая поля, которая вычитается из поля $\mathbf{B}''(x, y)$, в результате остается только шумовая составляющая $\mathbf{B}^{(f)}(x, y)$ и поле $\mathbf{B}^{(k)}(x, y)$, созданное распределенными нарушениями микроструктуры.

Для распределенных дефектов микроструктуры, например областей напряженно-деформированного состояния, адекватной моделью является интегральное соотношение (17), которое легко сводится к уравнению свертки вида (28). Для поля рассеяния $\mathbf{B}^{(k)}(x, y) = \mathbf{B}(x, y, z = h/2)$, создаваемого k -м распределенным дефектом микроструктуры на поверхности пластины получим

$$B_i^{(k)}(x, y) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} K_{ij}(x-x', y-y') m_j^{(k)}(x', y') dx' dy', \quad i, j = x, y, z, \quad (39)$$

где

$$\mathbf{m}^{(k)}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\mathbf{m}}_k(x, y, z) dz - \quad (40)$$

– усредненная по толщине компонента намагниченности, создаваемая k -м распределенным дефектом микроструктуры, тензор системных функций K_{ij} определен соотношением (29).

Возьмем от поля рассеяния одиночного распределенного дефекта $\mathbf{B}^{(k)}(x, y)$ вида (39) двумерное

преобразование Фурье. С учетом теоремы о спектре свертки получаем

$$b_i^{(k)}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_i^{(k)}(x, y) \exp(-ipx - iqu) dx dy = \frac{\mu_0}{4\pi} M_j^{(k)}(p, q) k_{ij}(p, q), \quad (41)$$

где обозначено

$$k_{ij}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x, y) \exp(-ipx - iqu) dx dy. \quad (42)$$

Вычисление спектра системных функций (29), т.е. интеграла (42) может быть произведено численно при помощи быстрого преобразования Фурье. Тогда для компонент намагниченности распределенного дефекта имеем

$$m_j^{(k)}(x, y) = \frac{1}{\pi\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_i^{(k)}(p, q) k_{ij}^{-1}(p, q) \exp(ipx + iqu) dp dq. \quad (43)$$

Обращение матрицы (42) в уравнении (43) может привести к большим численным ошибкам в связи с плохой определенностью матрицы $k_{ij}(p, q)$. В связи с этим, при вычислении обращенной матрицы в уравнении (43), следует применять методы регуляризации Тихонова [16].

На четвертом этапе микромагнитного анализа определяются корреляционные величины случайной составляющей намагниченности $\mathbf{M}_f$, которая быстро образом меняется на расстояниях порядка диаметра элементарной ячейки. Поэтому дивергенция случайной намагниченности не имеет особенностей вблизи границы тела D , а вне его равна нулю. Тогда формулу (18) можно записать в виде

$$\mathbf{B}^{(f)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \iiint \frac{F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (44)$$

где введено скалярное поле $F(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{M}_f(\mathbf{r})$ и тройной интеграл берется по всему пространству.

Для нормальной составляющей случайного поля рассеяния на внешней поверхности пластины толщиной h из формулы (38) получаем

$$B_{\pm}(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \int_{-h/2}^{-h/2} \frac{F(x', y', z') (\pm h/2 - z') dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (\pm h/2 - z')^2]^{3/2}}, \quad (45)$$

где обозначено $B_{\pm}(x, y) = B_z(x, y, z = \pm h/2)$. Обозначим

$$f(p, q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) \exp(-ipx - iqy) dx dy dz -$$

– пространственный спектр случайной намагниченности. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z) \exp(-ipx - iqy) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(p, q, t) \exp(itz) dt.$$

Возьмем от поля $B_{\pm}(x, y)$ вида (45) двумерное преобразование Фурье. С учетом теоремы о спектре свертки получаем

$$b_{\pm}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\pm}(x, y) \exp(-ipx - iqy) dx dy = \frac{\mu_0}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(p, q, t) K_{\pm}(p, q, t) dt,$$

где обозначено

$$K_{\pm}(p, q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_{-h/2}^{-h/2} \frac{(z \pm h/2) \exp(-ipx - iqy - itz)}{[x^2 + y^2 + (z \pm h/2)^2]^{3/2}} dz.$$

Для спектральной интенсивности случайной составляющей поля рассеяния с учетом известной теоремы о дельта-коррелированности спектров случайных процессов [19] получаем

$$\begin{aligned} G_{\pm}(p, q) &= \left(\frac{\mu_0}{8\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(p, q, t) f^*(p, q, t') \rangle K_{\pm}(p, q, t) K_{\pm}^*(p, q, t') dt dt' = \\ &= \left(\frac{\mu_0}{8\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(p, q, t) \tilde{k}_{\pm}(p, q, t) dt \approx \left(\frac{\mu_0}{8\pi} \right)^2 \Phi(p, q) k_{\pm}(p, q), \end{aligned}$$

где с учетом теоремы о среднем обозначено

$$\begin{aligned} G_{\pm}(p, q) &= \langle b_{\pm}(p, q) b_{\pm}^*(p, q) \rangle, \quad \tilde{\Phi}(p, q, t) = \langle f(p, q, t) f^*(p, q, t) \rangle, \\ \tilde{k}_{\pm}(p, q, t) &= (p, q, t) K_{\pm}^*(p, q, t), \quad k_{\pm}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{\pm}(p, q, t) dt, \quad \Phi(p, q) = \tilde{\Phi}(p, q, 0). \end{aligned}$$

Таким образом, функция

$$\Phi(p, q) = \left(\frac{8\pi^2}{\mu_0} \right)^2 \frac{G_{\pm}(p, q)}{k_{\pm}(p, q)}$$

характеризует корреляционные свойства случайной намагниченности.

3. Исследование микротопологии магнитного поля рассеяния стальных пластин

Для экспериментальной проверки указанных методов были проведены измерения полей рассеяния на образце из стали 3, размерами $200 \times 150 \times 8$ мм. Магнитограммы были получены при помощи трехкомпонентного Холловского магнитометра, интегрированного с двухкоординатной системой перемещения. Управление процессом измерения осуществлялось при помощи интерфейсной программы для персонального компьютера. Полученные данные выводились на экран в виде трехмерной поверхностной диаграммы.

В эксперименте исследовался образец стали Ст3, предоставленный предприятием ОАО "Криогенмаш" г. Балашиха в рамках испытаний разрабатываемого комплекса магнитной дефектоскопии. В образце было просверлено сквозное цилиндрическое отверстие диаметром 1 мм. На рисунке 4 показана z-компонента магнитной индукции.

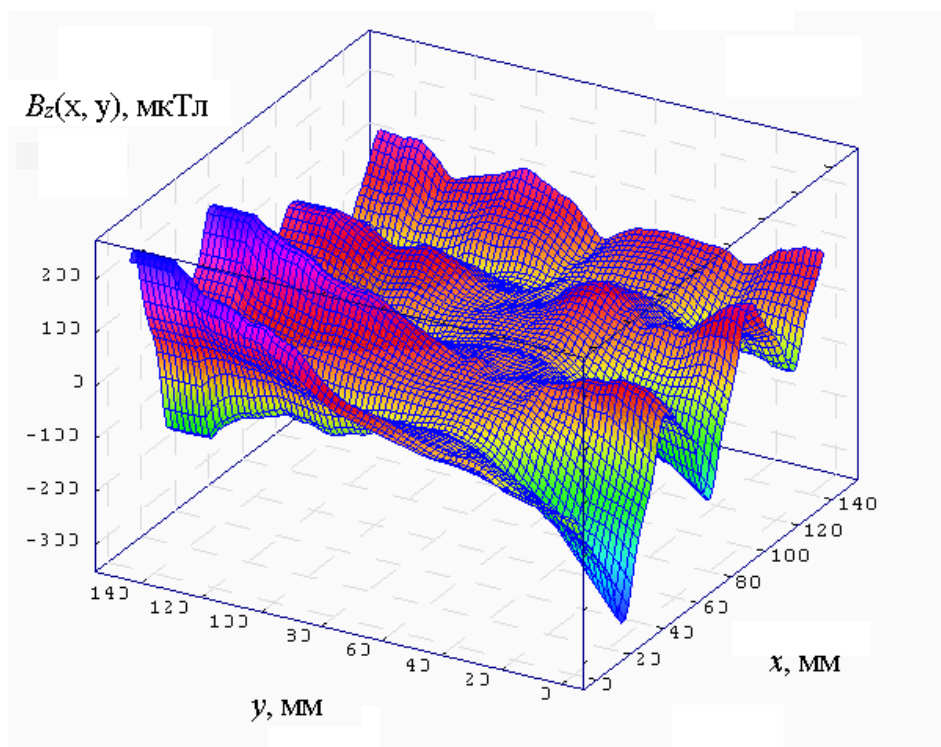


Рисунок 4 – Значение $B_z(x, y)$ на высоте 2 мм над исследуемым образцом стали 3 с отверстием

Для удобства работы детектора (37) применяется пространственная фильтрация с помощью окна, позволяя получить сглаженное поле, которое вычитается из исходных данных. Полученное в результате быстроменяющееся $B_z^{(1)}(x, y)$ магнитное поле показано на рисунке 5. Как видно из рисунка 6, выбранный детектор выделил малозаметный локальный диполь (см. рисунок 4 в сравнении с рисунком 6) по координатам (60 мм, 60 мм). Именно в этой точке располагается искусственно созданный дефект.

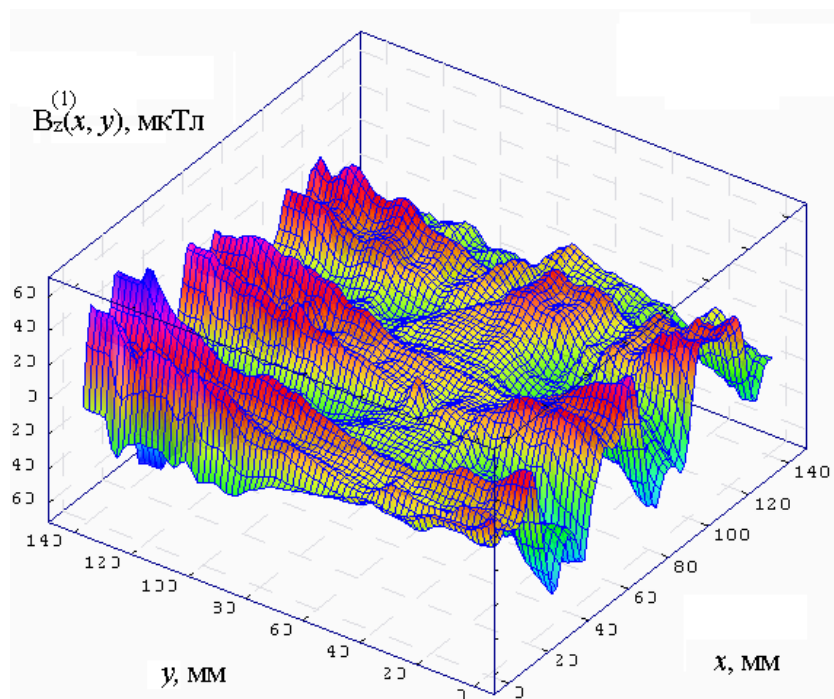


Рисунок 5 – График z-компоненты быстроменяющегося магнитного поля

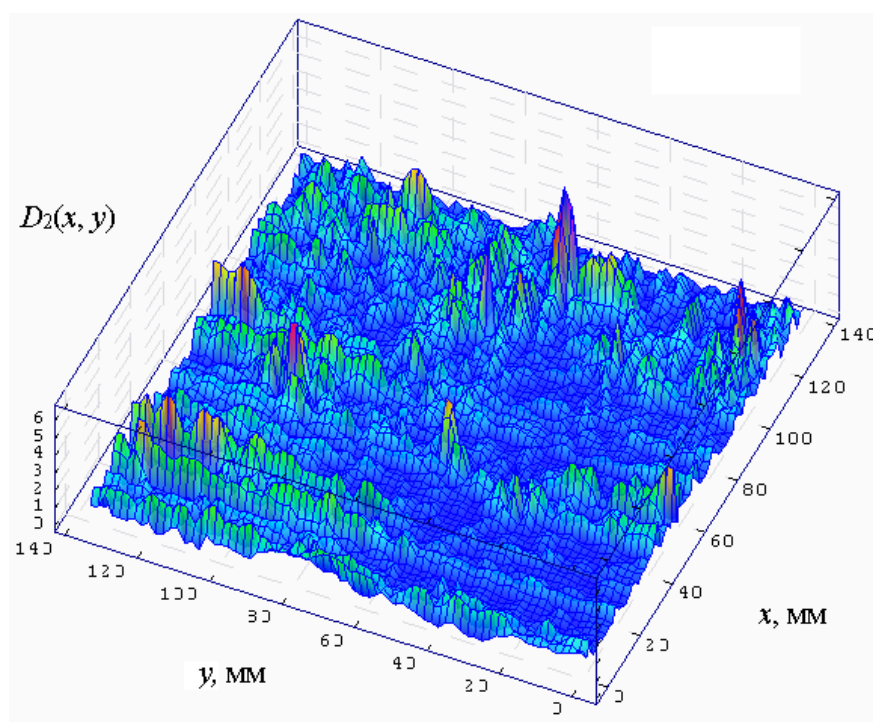


Рисунок 6 – График зависимости показания детектора (33) от координаты. Длина окна усреднения составляет 3 мм по обоим координатам

Заключение

Проведенное исследование показало эффективность предложенного метода параметризации обратной магнитостатической задачи путем разделения по физическим признакам информации, получаемой из исходных данных микротопологии магнитного поля. Полученные интегральные соотношения (28) с тензором системных функций (29) позволяют связать медленно меняющуюся намагниченность образца с микротопологией магнитного поля. Метод определения месторасположения дефекта, основанный на двумерном детекторе вида (37), является эффективным при определении местоположения локальных структурных неоднородностей. Дальнейшее исследование параметров дефектов, может быть осуществлено при помощи алгоритмов поиска глобального минимума [20]. Проведенные эксперименты на искусственных дефектах в плоских ферромагнитных образцах показывают работоспособность изложенного метода.

Список литературы

1. Янус Р.И. Некоторые вопросы теории магнитной дефектоскопии // Журнал технической физики. 1945. Т. 15, № 1-2. С. 3-14.
2. Аркадьев В.К. О развитии теоретических основ дефектоскопии // Известия АН. 1937. № 2. С. 233-239.
3. Вонсовский С.В. Простейшие расчеты для задач магнитной дефектоскопии // Журнал технической физики. 1938. Т. 8, № 16. С. 1453-1467.
4. Сапожников А.Б., Мирошин Н.В. К вопросу о роли магнитной нелинейности среды при формировании поля скрытого дефекта // Труды ИФМ АН СССР. 1967. Вып. 26. С. 189-198.
5. Загидуллин Р.В. К расчету магнитного поля дефекта сплошности с учетом нелинейности магнитных свойств ферромагнетика // Дефектоскопия. 2000. № 3. С. 43-54.
6. Чернышев А.В. О характере зависимости обратимой магнитной проницаемости стальных образцов от напряженности смещающего поля // Физика металлов и металловедение. 2001. Т. 92, № 5. С. 49-54.
7. Зацепин Н.Н. Магнитостатика деформированных тел. 1. Вывод дифференциальных уравнений, описывающих закономерности относительных напряжений и обобщенной коэрцитивной силы // Контроль. Диагностика. 2006. № 11. С. 70-74.
8. Печенков А.Н., Щербинин В.Е. Некоторые прямые и обратные задачи технической магнитостатики. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. 177 с.
9. Игнатьев В.К., Козин Д.А., Орлов А.А., Станкевич Д.А. Микромагнитный метод микроструктурного анализа ферромагнитных цилиндрических образцов // Физические основы приборостроения. 2012. № 4. С. 44-57.

10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
11. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. 400 с.
12. Боровик Е.С., Еременко В.В., Мильнер А.С. Лекции по магнетизму. М.: Физматлит, 2005. 512 с.
13. Дайсон Ф. Релятивистская квантовая механика: пер. с англ. М.- Ижевск: ИКИ, НИЦ "РХД", 2009. 248 с.
14. Уайт Р.М. Квантовая теория магнетизма: пер. с англ. М.: Мир, 1972. 306 с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 742 с.
16. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
17. Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практическое применение: пер. с япон. М.: Мир, 1987. 419 с.
18. Allan D.W., Barnes Y.A. A modified «Allan variance» with increased oscillator characterization ability // Proc. 35th Ann. Frequency Control Symposium. May 1981. P. 470-475.
19. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
20. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы / Под ред. В.М. Курейчика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 320 с.

Inverse magnetostatic problem for ferromagnets

01, January 2014

DOI: **10.7463/0114.0695966**

Ignat'ev V.K., Orlov A.A.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

ignatjev@vlpost.ru

orlwork@inbox.ru

We consider the problem of multi-parameter analysis of the magnetic microtopology to determine the structure of the material and finding defects. We propose a method for the analysis of raw data by dividing the obtained information on a priori criteria, determined by the physical model of a ferromagnet. We show the integral connection between the slowly varying magnetization and the stray field with tensor system functions. We calculate limits of heterogeneity of the magnetization and the external field. The analysis of experimental data for magnetic microtopology steel flat specimens with artificially created defect. The above approach to magnetostatic problem can be used in the microarray analysis and inspection.

Publications with keywords: [inverse problem](#)

Publications with words: [inverse problem](#)

References

1. Yanus R.I. Nekotorye voprosy teorii magnitnoy defektoskopii [Some questions of the theory of magnetic inspection]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1945, vol. 15, no. 1-2, pp. 3-14.
2. Arkad'ev V.K. O razvitii teoreticheskikh osnov defektoskopii [On development of theoretical foundations of inspection]. *Izvestiya Akademii Nauk* [Proceedings of Academy of Sciences], 1937, no. 2, pp. 233-239.
3. Vonsovskiy S.V. Prosteyshie raschety dlya zadach magnitnoy defektoskopii [The simplest calculations for magnetic inspection tasks]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1938, vol. 8, no. 16, pp. 1453-1467.
4. Sapozhnikov A.B., Miroshin N.V. K voprosu o roli magnitnoy nelineynosti sredy pri formirovanii polya skrytogo defekta [Role of magnetic nonlinearity in the formation of latent defect field]. *Trudy IFM AN SSSR*, 1967, is. 26, pp. 189-198.

5. Zagidullin R.V. K raschetu magnitnogo polya defekta sploshnosti s uchetom nelineynosti magnitnykh svoystv ferromagnetika [Calculation of magnetic field of defect and taking into account nonlinear magnetic properties of ferromagnetic]. *Defektoskopiya*, 2000, no. 3, pp. 43-54. (English translation: *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2000, vol. 36, no. 3, pp. 190-199. DOI: 10.1007/BF02759330).
6. Chernyshev A.V. O kharaktere zavisimosti obratimoy magnitnoy pronitsaemosti stal'nykh obraztsov ot napryazhennosti smeshchayushchego polya [The nature of dependence of reversible magnetic permeability steel samples on strength of bias field]. *Fizika metallov i metallovedenie*, 2001, vol. 92, no. 5, pp. 49-54.
7. Zatsepin N.N. Magnitostatika deformirovannykh tel. 1. Vyvod differentsial'nykh uravneniy, opisyyvayushchikh zakonomernosti otnositel'nykh napryazheniy i obobshchennoy koertsitivnoy sily [Magnetostatics of deformed bodies. 1. Derivation of differential equations describing the patterns of relative stress and generalized coercive force]. *Kontrol'. Diagnostika* [Testing. Diagnosis], 2006, no. 11, pp. 70-74.
8. Pechenkov A.N., Shcherbinin V.E. *Nekotorye pryamye i obratnye zadachi tekhnicheskoy magnitostatiki* [Some direct and inverse problems of magneto technology]. Ekaterinburg, Ural Branch of RAS Publ., 2004. 177 p.
9. Ignat'ev V.K., Kozin D.A., Orlov A.A., Stankevich D.A. Mikromagnitnyy metod mikrostrukturnogo analiza ferromagnitnykh tsilindricheskikh obraztsov [Micromagnetic method of microstructural analysis of ferromagnetic cylindrical samples]. *Fizicheskie osnovy priborostroeniya* [Physical bases of instrumentation], 2012, no. 4, pp. 44-57.
10. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1979. 285 p.
11. Bredov M.M., Rumyantsev V.V., Toptygin I.N. *Klassicheskaya elektrodinamika* [Classical Electrodynamics]. Moscow, Nauka, 1985. 400 p.
12. Borovik E.S., Eremenko V.V., Mil'ner A.S. *Leksii po magnetizmu* [Lectures on magnetism]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 512 p.
13. Dyson F.J. *Advanced Quantum Mechanics*. World Scientific, 2007. (Russ. ed.: Dyson F. *Relyativistskaya kvantovaya mekhanika*. Moscow – Izhevsk, Publ. of IKI, NITs "RKhD", 2009. 248 p.).
14. White R.M. *Quantum Theory of Magnetism*. New York, McGraw-Hill, 1970. (Russ. ed.: White R.M. *Kvantovaya teoriya magnetizma*. Moscow, Mir, 1972. 306 p.).
15. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1966. 742 p.
16. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1990. 232 p.
17. Tikadzumi S. *Fizika ferromagnetizma. Magnitnye kharakteristiki i prakticheskoe primeneniye* [Physics of ferromagnetism. Magnetic characteristics and practical applications]. Transl. from Japanese. Moscow, Mir, 1987. 419 p.

18. Allan D.W., Barnes Y.A. A modified “Allan variance” with increased oscillator characterization ability. In: *Proc. 35th Ann. Frequency Control Symposium*, May 1981, pp. 470-475.
19. Rytov S.M. *Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku. Ch. 1. Sluchaynye protsessy* [Introduction to Statistical Radiophysics. Part 1. Random processes]. Moscow, Nauka, 1976. 496 p.
20. Gladkov L.A., Kureychik V.V., Kureychik V.M. *Geneticheskie algoritmy* [Genetic Algorithms]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 320 p.