НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических ёмкостях

11, ноябрь 2013
DOI: 10.7463/1113.0623923

Дьяченко М. И., Орлов В. В., Темнов А. Н.

УДК 621.3

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
antt45@mail.ru
s_masyanya@mail.ru

Введение.

Исследованию задач о колебаниях жидкости в баках ракет-носителей посвящено много работ [1-11]. В предыдущих работах авторов [12, 13] приведена постановка модельной задачи о малых движениях несжимаемой жидкости, вытекающей из топливного бака с заборными устройствами (ЗУ). Исследование рассматриваемой задачи в этих работах, проведенные методами функционального анализа и спектральной теории операторных пучков, показало, что спектр нормальных движений несжимаемой жидкости (движений, подчиняющихся закону $e^{-\lambda t}$) обладает двумя ветвями собственных значений: дискретным множеством вещественных чисел, расположенных на положительной части вещественной оси и дискретным множеством комплексно сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Действительным собственным значениям отвечают апериодические режимы движения жидкости, происходящие преимущественно вблизи дна топливного отсека, а комплексно сопряженным числам отвечает режимы затухающих колебаний, преобладающих в основном на свободной поверхности жидкости.

В предлагаемой статье приведены примеры рассматриваемых задач о движении несжимаемой жидкости, вытекающей из наиболее распространенных на практике топливных отсеков в виде цилиндра и конуса.

1. Постановка задачи.

Пусть несжимаемая жидкость, частично заполняющая неподвижный бак произвольной формы вытекает через ЗУ и может совершать малые движения. Рассматриваемая проблема малых движений жидкости может быть описана уравнениями гидродинамики, линеаризованными вблизи невозмущённого состояния. Подробная постановка задачи приведена в работах [12-14].

Предполагая возмущенное движение жидкости потенциальным, сформулируем краевую задачу о колебаниях вытекающей жидкости для потенциала скоростей $\Phi(x,r,\eta,t)$ в виде

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в области, заполненной жидкостью, } Q,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на смачиваемой поверхности } S,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\cdot V_0(H) + g\,w_\Gamma = f_1 \quad \text{на свободной поверхности } \Gamma_0, \qquad (1)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\cdot V_0(0) - \gamma\dot{w}_\Sigma = f_2 \quad \text{на поверхности слива } \Sigma,$$
$$\Phi\ (\ x_1.\ x_2.\ x_3.0\ ) = \Phi^{(0)}, \ \text{при } t = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к поверхности S; $w_\Gamma = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} dt,$

$\dot{w}_\Sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$ - малые смещения и скорость частиц жидкости на поверхностях Γ_0 и Σ соответственно, $\gamma = \varsigma V_\Sigma = \varsigma V_0(0)$ - обобщенный коэффициент сопротивления поверхности слива, ς – коэффициент гидравлического сопротивления поверхности слива, g - величина интенсивности внешнего однородного поля массовых сил, f_1, f_2 - заданные поля внешних воздействий соответственно на поверхностях Γ_0 и Σ.

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объёму, занимаемому жидкостью, для любого момента времени t, получим дополнительное интегральное условие $\int\limits_{\Gamma} \vec{V}\cdot\vec{n}_{\Gamma}d\Gamma = \int\limits_{\Sigma}\vec{V}\cdot\vec{n}_{\Sigma}dS,$ которому должны подчиняться поле скоростей и поле смещений в рассматриваемой задаче.

Впервые исследование колебаний жидкости с учетом вытекания было предложено Кирилловым В.В. [15] и продолжено в работах [5], [11], [16]. В упомянутых работах рассматривались задачи для жидкости, занимающей часть цилиндрического бака, на дне которого ставилось кинематическое условие вытекания.

2. Колебания жидкого топлива в цилиндрической ёмкости

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости, вытекающей через заборное устройство из цилиндрической ёмкости при наличии свободной поверхности. Используя цилиндрические координаты r, η, x с началом на поверхности слива, получим задачу для определения потенциала скоростей $\Phi(x,r,\eta,t)$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0 \quad \text{в Q}, \; m=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}V_0(H)+g\int\frac{\partial\Phi}{\partial x}dt=0 \quad \text{на } \Gamma_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}V_0(0)-\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \quad \text{на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \quad \text{на S},$$

$$\Phi(x,r,\eta,t)=\Phi^{(0)} \text{ при } t=0.$$

Функцию $\Phi(x,r,\eta,t)$ представим в виде суммы двух функций

$$\Phi(x,r,\eta,t)=\Phi_1(x,r,\eta,t)+\Phi_2(x,r,\eta,t),$$

и будем искать каждый потенциал $\Phi_1(x,r,\eta,t)$ и $\Phi_2(x,r,\eta,t)$ в виде произведения четырёх функций:

$$\Phi_1(x,r,\eta,t)=Z^{(1)}(x)R\,(r)H(\eta)\dot{S}\,(t),\quad \Phi_2(x,r,\eta,t)=Z^{(2)}(x)R\,(r)H(\eta)\dot{\lambda}\,(t),$$

где $H(\eta)$ - функция периода 2π, функция $R\,(r)$ удовлетворяют уравнению Бесселя, а функции $Z^{(1)}(x)$, $Z^{(2)}(x)$ есть решения задач

$$\begin{aligned}&\frac{d^2Z^{(1)}}{d\,x^2}-k^2Z^{(1)}=0,\ (0\le x\le H),\\ &\frac{d}{dx}Z^{(1)}=0,\, x=0,\qquad \frac{d}{dx}Z^{(1)}=1,\, x=H,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2Z^{(2)}}{d\,x^2}-k^2Z^{(2)}=0,\ (0\le x\le H),\\ &\frac{d}{dx}Z^{(2)}=1,\, x=0,\qquad \frac{d}{dx}Z^{(2)}=0,\, x=H\ .\end{aligned}\tag{4}$$

Используя метод разделения переменных, находим выражения для потенциалов скоростей

$$\Phi_1(x,r,\eta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}r)e^{im\eta}\frac{ch(k_{mn}x)}{sh(k_{mn}H)}\dot{S}_{mn}(t)\,,\tag{5}$$

$$\Phi_2(x,r,\eta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}r)e^{im\eta}\frac{ch(k_{mn}(x-H(t))}{sh(k_{mn}H)}\dot{\lambda}_{mn}(t)\,,\tag{6}$$

где $J_m(k_{mn}r)$ - функция Бесселя 1-го рода, m-го порядка, $k_{mn}=\xi_{mn}$ - корни уравнения $dJ_m(\xi)/d\xi=0$, а функции $S_{mn}(t),\ \lambda_{mn}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}&\ddot{S}_{mn}+\alpha_{mn}\ddot{\lambda}_{mn}+V_0\varepsilon_{mn}\dot{\lambda}_{mn}+V_0\delta_{mn}\dot{S}_{mn}+\omega^2{}_{mn}S_{mn}=0,\\ &\ddot{\lambda}_{mn}+\alpha_{mn}\ddot{S}_{mn}+V_0\varepsilon_{mn}\dot{S}_{mn}+(V_0\varepsilon'_{mn}+\gamma_{mn})\dot{\lambda}_{mn}=0,\\ &m=0,1,2...,\quad n=1,2,3...,\end{aligned}\tag{7}$$

где α_{mn}, ε_{mn}- коэффициенты инерционных и диссипативных связей, $\omega^2{}_{mn}$, γ_{mn}, δ_{mn}, ε'_{mn} - динамические характеристики парциальных подсистем

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{ch(k_{mn}H)}, \ \varepsilon_{mn} = k_{mn} sh^{-1}(k_{mn}H), \ \gamma_{mn} = \gamma k_{mn} th(k_{mn}H),$$

$$\varepsilon'_{mn} = k_{mn} th^{-1}(k_{mn}H), \delta_{mn} = 2k_{mn} / sh(2k_{mn}H), \omega^2{}_{mn} = gk_{mn} th(k_{mn}H).$$

Для определения собственных частот рассматриваемой механической системы, положим $S_{mn} = A_{1mn} e^{\Omega\, t}$, $\lambda_{mn} = A_{2mn} e^{\Omega\, t}$. Из уравнений (7) получаем характеристической уравнение

$$\Omega^3 th(k_{mn}H) + \Omega^2 k_{mn}(V_0 + \gamma) + \Omega k_{mn}(V_0 \delta_{mn} \gamma + g) + gk_{mn}(V_0 \varepsilon'_{mn} + \gamma_{mn}) = 0. \quad (8)$$

Здесь Ω - комплексный коэффициент затухания волновых движений жидкости $m = 0,1,2...,$ $n = 1,2,3...,$.

Уравнение (8) имеет две ветви решений: действительные корни и ветвь комплексно сопряженных корней. Для исследования уравнения введём безразмерные параметры

$$\bar{\Omega} = \Omega \ / \sqrt{g / r_0}, \ \bar{\gamma} = \gamma / \sqrt{g\, r_0}. \quad \xi_{mn} = k_{mn} r_0, \quad \bar{H} = H / r_0, V_0^* = V_0 / \sqrt{g\, r_0}$$

и перепишем уравнение (8) в безразмерном виде

$$\begin{gathered} \bar{\Omega}^3 th(\xi_{mn}\bar{H}) + \bar{\Omega}^2 \xi_{mn}(V_0^* + \bar{\gamma}) + \bar{\Omega}\xi_{mn}\left(\frac{2V_0^* \xi_{mn}}{sh 2\xi_{mn}\bar{H}}\bar{\gamma} + 1\right) + \\ + \xi_{mn}^2 (V_0^* cth(\xi_{mn}\bar{H}) + \bar{\gamma} th(\xi_{mn}\bar{H})) = 0. \end{gathered} \quad (9)$$

Результаты вычислений корней кубического уравнения (9) приведены в таблице (1).

В случае глубокой жидкости $(H > 1, th(\xi_{mn}\bar{H}) \to 1, sh(2\xi_{mn}\bar{H}) \to \infty)$ уравнение (19) принимает вид

$$\bar{\Omega}^3 + \bar{\Omega}^2 \xi_{mn}(V_0^* + \bar{\gamma}) + \bar{\Omega}\xi_{mn} + \xi_{mn}^2 (V_0^* + \bar{\gamma}) = 0$$

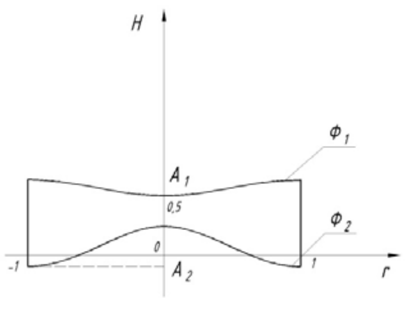
и имеет корни

$$\bar{\Omega}_0^{(1,2)} = \pm i\sqrt{\xi_{mn}}, \quad \bar{\Omega}_0^{(3)} = -(V_0^* + \bar{\gamma})\xi_{mn}. \quad (10)$$

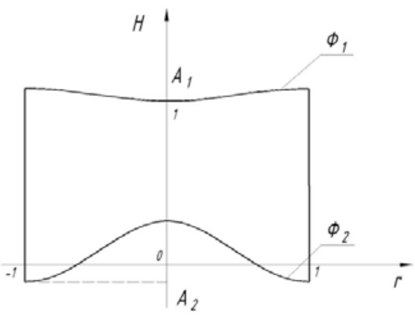
В таблице № 1 представлены результаты вычислений безразмерных собственных частот и коэффициентов распределения $\chi^{(k)} = A_1 / A_2$ при $\bar{H} = 1$, m=1, n=1, $\bar{\omega}_{11} = 1{,}323$ для различных значений V_0^*, $\bar{\beta} = \bar{\gamma}^{-1}$, а на рис. 1-4 показаны формы колебаний.

Таблица № 1 - Собственные частоты колебаний жидкости в цилиндрической емкости при перераспределении жидкости из бака

V_0^*	$\bar{\beta}=\bar{\gamma}^{-1}$	$\bar{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_{2,3}$	$\chi^{(1)}$	$\frac{1}{\chi^{(2,3)}}$
0	0,05	-12,348	-0,00742±1,324i	-0,306	-0,00408±0,036i
0	0,15	-4,080	-0,021±1,330i	-0,280	-0,0338±0,0990i
0,04	0,01	-61,834	-0,00268±1,32318i	-0,309	-0,0003±0,0073i
0,04	0,05	-12,37	-0,00857±1,32413i	-0,305	-0,0047±0,0360i
0,04	0,1	-6,175	-0,01544±1,3266i	-0,295	-0,0170±0,0690i
0,04	0,15	-4,103	-0,02143±1,330i	-0,279	-0,0340±0,0980i
0,07	0,01	-61,85	-0,00357±1,32322i	-0,309	-0,0004±0,0073i
0,07	0,05	-12,387	-0,00942±1,32432i	-0,305	-0,0052±0,0360i
0,07	0,1	-6,192	-0,0162±1,326946i	-0,294	-0,0178±0,0690i
0,07	0,15	-4,12	-0,022±1,3307167i	-0,278	-0,036±0,097i
0,1	0	-6,181e-9	-0,003±1,323i	-0,309	-3,26e(-12) ±7,33e(-11)i
0,1	0,01	-61,867	-0,00445±1,3232i	-0,309	-0,0005±0,0073i
0,1	0,05	-12,404	-0,0103±1,3245i	-0,305	-0,0056±0,036i
0,1	0,1	-6,209	-0,0169±1,3272i	-0,293	-0,019±0,069i
0,1	0,15	-4,137	-0,0227±1,3311i	-0,276	-0,037±0,096i

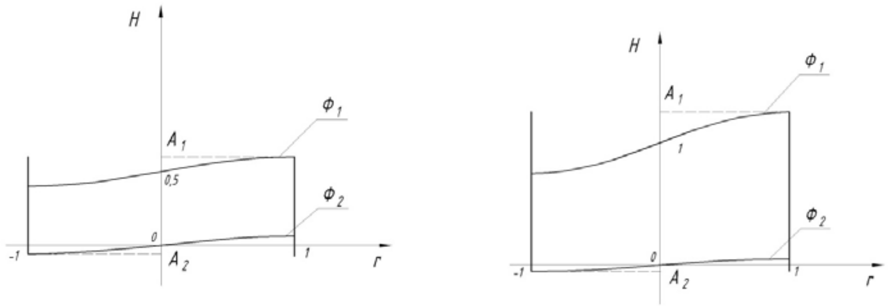


H=0.5



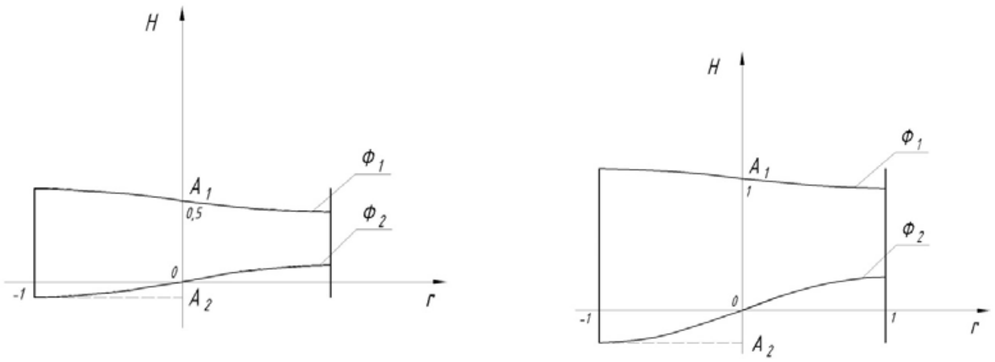
H =1

Рис. 1. Формы колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде при Ω*=-61.834, , m=0, n=1, ξ_{01}=3. 83, A1/A2=-0.309.



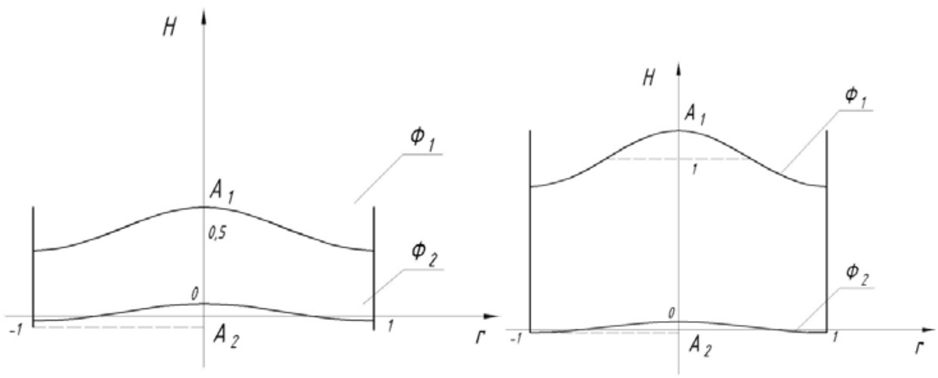
H=0.5 H=1

Рис. 2. Формы колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде при различных H при **Ω***=-0.0027+1.32i, m=1, n=1, ξ_{11}=1.841, A2/A1=0.007.



H=0.5 H=1

Рис. 3. Формы колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде при различных H при **Ω***=-122.45, m=1, n=1, ξ_{11}=1.841, A1/A2=-0.043.



H=0.5 H=1

Рис. 4. Формы колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде при различных H при **Ω***=-0.000076+1.96i, m=0, n=1, ξ_{01}=3. 83, A2/A1=0.0007.

3. Колебания жидкого топлива в конической ёмкости

Рассмотрим круговой конус, частично заполненный жидкостью. Введем сферическую систему координат R, ϑ, η с центром в вершине конуса (рис. 5). Угол ϑ отсчитывается от положительного направления оси *OZ,* угол η измеряется в плоскости *OXY* от оси *OX,* сторону оси *OY* . Из рис. 5 следует. что $Z = R\cos\vartheta$, $y = R\sin\vartheta\sin\eta$, $x = R\sin\vartheta\cdot\cos\eta$. Если ограничиться малым углом конусности. то оказывается правомерным граничное условие для плоской невозмущённой свободной поверхности рассматривать на части сферической поверхности $R=R_1$. Очевидно, что уравнение для конической полости $R=R_2$, боковой поверхности - $\vartheta = \vartheta_0$. Условием применимости полученных формул для плоской свободной поверхности является следующее ограничение, накладываемое на угол конусности: $\sin\vartheta_0 >> 1 - \cos\vartheta_0$. Наиболее полное исследование колебаний жидкости в усечённых конических баках без учёта эффекта вытекания приведено в работе [18].

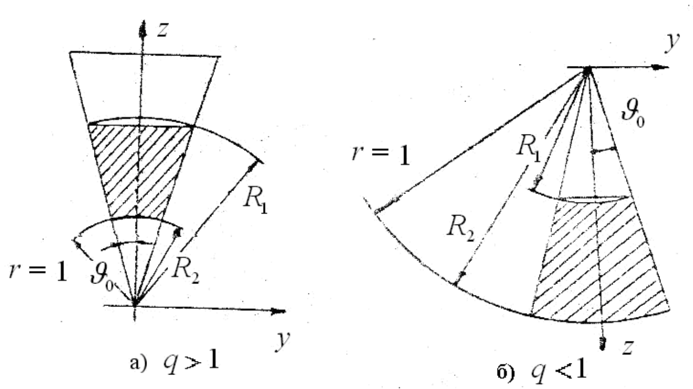


Рис. 5. Геометрические характеристики обратного и прямого конусов

Примем за характерный размер радиус дна конической полости $R=R_2$ и введем безразмерный радиус $r = R/R_2$. Обозначим q = R_1/R_2. Допустим далее, что жидкость либо достигает вершины конуса, либо конус усеченный и имеет дно $R=R_2$ (рис. 5 а, б). Для сокращения будем называть полость на рис. 5 а - обратным усеченным (не усеченным) конусом (q > 1).

Краевая задача о свободных колебаниях жидкости в конической полости имеет вид

$$\Delta\Phi = 0\,.\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}V_0(q) + \frac{g}{R_2}\int\frac{\partial\Phi}{\partial r}dt = 0 \ \text{ на } \Gamma_0\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}V_0(1) - \frac{\gamma}{R_2}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \ \text{ на } \Sigma\,, \tag{11}$$

где Δ - лапласиан, записываемый в сферических координатах [17].

Потенциал скоростей $\Phi(r,\vartheta,\eta,t)$ для конической полости представим в виде суммы потенциалов

$$\Phi(r,\vartheta,\eta,t) = \Phi_1(r,\vartheta,\eta,t) + \Phi_2(r,\vartheta,\eta,t)\,, \tag{12}$$

каждый из которых есть произведение функций

$$\Phi_1(r,\vartheta,\eta,t) = Y(\vartheta)R^S(r)H(\eta)S(t)\,,\ \ \Phi_2(r,\vartheta,\eta,t) = Y(\vartheta)R^\lambda(r)H(\eta)\lambda(t)\,,$$

где $Y(\vartheta)$-присоединённая функция Лежандра, а функции $R^{(S)}(r), R^{(\lambda)}(r)$, есть решения краевых задач

$$\begin{gathered}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}(R^S(r))) - \nu(\nu+1)R^S(r) = 0,\\ \frac{d}{dr}(R^S(r)) = 0, r = 1,\quad \frac{d}{dr}(R^S(r)) = 1, r = q,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}(R^\lambda(r))) - \nu(\nu+1)R^\lambda(r) = 0,\\ \frac{d}{dr}(R^\lambda(r)) = 1, r = 1,\quad \frac{d}{dr}(R^\lambda(r)) = 0, r = q.\end{gathered} \tag{14}$$

Используя метод разделения переменных, находим представления решений поставленных краевых задач

$$\Phi_1(r,\vartheta,\eta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}(\vartheta)e^{im\eta}R_{mn}^{s}(r)\dot{S}_{mn}(t)\,, \tag{15}$$

$$\Phi_2(r,\vartheta,\eta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}(\vartheta)e^{im\eta}R_{mn}^{\lambda}(r)\dot{\lambda}_{mn}(t)\ ,$$

где $Y_{mn}(\vartheta)=\dfrac{P_{\nu_{mn}}^{m}(\cos\vartheta)}{P_{\nu_{mn}}^{m}(\cos\vartheta_0)}$, - присоединенные функции Лежандра первого рода, ν-го порядка, ν_{mn} - n –ый корень уравнения

$$\frac{d}{d\vartheta}(P_{\nu_{mn}}^{m}(\cos\vartheta_0))=0\ .$$

Функции $R_{mn}^{s}(r)$. $R_{mn}^{\lambda}(r)$ соответственно равны

$$R_{mn}^{S}(r)=\frac{q^{\nu_{mn}+2}}{q^{2\nu_{mn}+1}-1}\frac{(\nu_{mn}+1)r^{\nu_{mn}}+\nu_{mn}\,r^{-(\nu_{mn}+1)}}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)}\,, \tag{16}$$

$$R_{mn}^{\lambda}(r)=\frac{q^{2}}{q^{(2\nu_{mn}+1)}-1}\frac{(\nu_{mn}+1)r^{\nu_{mn}}+\nu_{mn}q^{(2\nu_{mn}+1)}r^{-(\nu_{mn}+1)}}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)}.$$

Подставив полученные решения (16) в граничные условия (11), и предполагая, что $S_{mn}=S_0e^{\Omega t}$, $\lambda_{mn}=\lambda_0e^{\Omega t}$, получим уравнение для определения собственных чисел:

$$a_0\Omega^3+a_1\Omega^2+a_2\Omega+a_3=0, \tag{17}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
a_0&=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21},\\
a_1&=\alpha_{11}\beta_{22}+\alpha_{22}\beta_{11}-\alpha_{12}\beta_{21}-\alpha_{21}\beta_{21},\\
a_2&=\beta_{11}\beta_{22}+\alpha_{22}\omega^2-\beta_{12}\beta_{21},\\
a_3&=\beta_{22}(\omega_{mn}^{*})^2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты инерционных и диссипативных связей и квадрат парциальной частоты $\omega_{mn}^2=(\omega_{mn}^{*})^2/R_{mn}^{S}(q)$ колебаний свободной поверхности жидкости в коническом баке представлены в таблице 2.

Таблица № 2 – Коэффициенты α_{ij}, β_{ij}, $(\omega^*_{mn})^2$ при обобщенных координатах для вычисления a_k при $i, j = 1,2$, $k = 0,1,2,3$

α_{11}	$R^s_{mn}(q)$	$\dfrac{q(q^{2\nu_{mn}+1}\cdot(\nu_{mn}+1)+\nu_{mn})}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)(q^{2\nu_{mn}+1}-1)}$
α_{12}	$R^\lambda_{mn}(q)$	$\dfrac{q^{\nu_{mn}+2}(2\nu_{mn}+1)}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)(q^{2\nu_{mn}+1}-1)}$
α_{21}	$R^s_{mn}(1)$	$\dfrac{q^{\nu_{mn}+2}(2\nu_{mn}+1)}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)(q^{2\nu_{mn}+1}-1)}$
α_{22}	$R^\lambda_{mn}(1)$	$\dfrac{q^2\left[(\nu_{mn}+1)+\nu_{mn}q^{2\nu_{mn}+1}\right]}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)(q^{2\nu_{mn}+1}-1)}$
β_{11}	$R^s_{mn}(q)-\dot{q}$	$\dot{q}\left[\dfrac{(1-\nu_{mn}{}^2)q^{4\nu_{mn}+2}-2(\nu_{mn}{}^2+\nu_{mn}+1)q^{2\nu_{mn}+1}-\nu_{mn}(\nu_{mn}+2)}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)(q^{2\nu_{mn}+1}-1)}-1\right]$
β_{12}	$\dot{R}^\lambda_{mn}(q)$	$\dot{q}\dfrac{2\nu_{mn}+1}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)}\cdot\dfrac{q^{3\nu_{mn}+2}(1-\nu_{mn})-q^{\nu_{mn}+1}(\nu_{mn}+2)}{(q^{2\nu_{mn}+1}-1)^2}$
β_{21}	$\dot{R}^s_{mn}(1)$	$\dot{q}\dfrac{2\nu_{mn}+1}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)}\cdot\dfrac{q^{3\nu_{mn}+2}(1-\nu_{mn})-q^{\nu_{mn}+1}(\nu_{mn}+2)}{(q^{2\nu_{mn}+1}-1)^2}$
β_{22}	$\dot{R}^\lambda_{mn}(1)-\dot{q}+\dfrac{\gamma q^2}{R_2}$	$\dot{q}\dfrac{2\nu_{mn}q^{4\nu_{mn}+3}+q^{2\nu_{mn}+2}\left[1-4\nu_{mn}-4\nu_{mn}{}^2\right]-2q(\nu_{mn}+1)}{\nu_{mn}(\nu_{mn}+1)(q^{2\nu_{mn}+1}-1)^2}-\dot{q}+q^2\dfrac{\gamma}{R_2}$
$(\omega^*_{mn})^2$	$\dfrac{g}{R_2}$	$\dfrac{g}{R_2}$

В таблице 3 представлены результаты расчетов собственных чисел в зависимости от скорости $\overline{V}_0$ и параметра $\overline{\beta}$.

Таблица № 3 - Собственные частоты колебаний жидкости в конической емкости при $\vartheta_o = 45^o, \nu = 2,\ q = 2$, m=1, n=1.

$\overline{V}_0$	$\overline{\beta}$	$\overline{\Omega_1}$	$\overline{\Omega_{2,3}}$
0	0	0	0,000 ± 0,974i
0	0,2	-15,798	-0,004 ± 0,974i
0,05	0,2	-15,704	-0,008 ± 0,975i
0,1	0,2	-15,610	-0,012 ± 0,975i
0	0,5	-6,302	-0,010 ± 0,976i
0,05	0,5	-6,208	-0,014 ± 0,976i
0,1	0,5	-6,114	-0,018 ± 0,977i
0	1	-3,123	-0,019 ± 0,980i
0,05	1	-3,028	-0,023 ± 0,981i
0,1	1	-2,934	-0,027 ± 0,982i

Также рассматриваемая модельная задача для конической области была решена вариантом метода конечных элементов (МКЭ), численно реализующим нахождение обобщённого решения некоторого интегрального тождества, полученного методом Галёркина. В следующих таблицах приведены результаты расчетов для конусов, аналогично изображенных на рисунке 5, но с плоским дном (таблица № 4) и с плоской свободной поверхностью (таблица № 5).

Таблица № 4 - Собственные частоты колебаний жидкости в конической емкости с плоским дном при $\vartheta_o = 45^o, \nu = 2,\ q = 2$, m=1, n=1.

$\overline{V}_0$	$\overline{\beta}$	$\overline{\Omega}_1$	$\overline{\Omega}_{2,3}$
0	0	0	0,00 ± 0,9909i
0	0,2	-17,569	-0,001861 ± 0,9909i
0	0,5	-7,02015	-0,004585 ± 0,99142i
0	1	-3,4977	-0,008707 ± 0,99316i

Таблица № 5 - Собственные частоты колебаний жидкости в конической емкости с плоской свободной поверхностью при $\vartheta_o = 45^o$, $\nu = 2$, $q = 0.5$, m=1, n=1.

$\overline{V}_0$	$\overline{\beta}$	$\overline{\Omega}_1$	$\overline{\Omega}_{2,3}$
0	0	0	0,00 ± 2,5746i
0	0,2	-10,47867	-0,01931 ± 2,57469i
0	0,5	-4,11859	-0,03727 ± 2,59303i
0	1	-2,011915	-0,0401 ± 2,62067i

В заключение необходимо отметить, что полученные результаты подтверждают выводы, сформулированные ранее в работах авторов [12, 13], то есть спектр нормальных движений несжимаемой жидкости, вытекающей из ограниченной области, обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества вещественных чисел, и дискретного множества комплексно-сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси.

Список литературы

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 500 с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.
3. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 416 с.
4. Микишев Г.Н.. Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563 с.
5. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчёта собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 270 с.
6. Моисеев Н.Н. Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
7. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 232 с.

8. Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наукова думка, 1969. 250 с.
9. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 203 с.
10. Колесников К.С., Шкапов П.М., Пожалостин А.А. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спец. вып. № 8. С. 15-30.
11. Лимарченко О.С., Матараццо Д., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. Киев: ГНОЗИС, 2002. 304 с.
12. Степанова М.И., Темнов А.Н. Малые движения жидкости с поверхностной диссипацией энергии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 4. С. 99-110.
13. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. № 3. С. 31-38.
14. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. Спец. вып. С. 164-174.
15. Кириллов В.В. Исследование колебаний жидкости в неподвижном сосуде с учётом её вытекания // Труды МФТИ. 1960. Вып. 5. С. 19-25.
16. Орлов В.В., Темнов А.Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез. докладов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. С. 124.
17. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математикой физики. М.: Физматлит, 1962. 767 с.

18. Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н. Собственные колебания жидкости в усеченных конических баках // Акустический вестник. 2006. Т. 9, № 3. С. 42-61.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

A problem of propellant oscillations in cylindrical and conical tanks

11, November 2013
DOI: 10.7463/1113.0623923

D'yachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation
antt45@mail.ru
s_masyanya@mail.ru

A problem of fluid oscillations in tanks of space launch vehicles is quite well known and has been investigated extensively during the last decades. This is caused by the fact that the major mass of a liquid-propellant rocket is fluid and its forced motion affects vehicle controllability significantly. In their recent works the authors considered small oscillations in tanks with a propellant intake and with fuel reallocation inside a vehicle. Such problems have arisen due to the purpose of increasing efficiency and output performance of multistage cluster rockets by central stage fueling from side stages of a cluster. The problem of propellant free oscillations in cylindrical and conical tanks was considered, and solutions were presented with boundary conditions on a free surface and the surface of intake that, figuratively speaking, provides resistance to the fluid descent. Eigen-frequencies and Eigen-values of perturbed motion equations with dissipation on boundary surfaces were found. It was shown that slow fluid decent and intake surface boundary conditions may affect both oscillating and damped terms of the solution.

Publications with keywords: the cylindrical and conical tanks, rearrangement, cluster configuration, eigen values and eigenvibrations
Publications with words: the cylindrical and conical tanks, rearrangement, cluster configuration, eigen values and eigenvibrations

References

1. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of missiles]. Moscow, Mashinostroenie, 2003. 500 p.

2. Lukovskiy I.A. *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela* [Introduction to nonlinear rigid body dynamics]. Kiev, Naukova dumka, 1990. 296 p.

3. Rabinovich B.I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov* [Introduction to the dynamics of carrier rockets of space vehicles]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 416 p.

4. Mikishev G.N.. Rabinovich B.I. *Dinamika tonkostennykh konstruktsiy s otsekami, soderzhashchimi zhidkost'* [Dynamics of thin-walled structures with compartments containing liquid]. Moscow, Mashinostroenie, 1971. 563 p.

5. Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob'ema zhidkosti* [Numerical methods of calculation of natural frequencies of oscillations of limited volume of fluid]. Moscow, Publ. of VTs AN SSSR, 1966. 270 p.

6. Moiseev N.N. Rumyantsev V.V. *Dinamika tel s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* [Dynamics of bodies with cavities containing liquid]. Moscow, Nauka, 1965. 440 p.

7. Chernous'ko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu zhidkost'* [Motion of rigid body with cavities containing viscous fluid]. Moscow, Publ. of VTs AN SSSR, 1968. 232 p.

8. Feshchenko S.F., Lukovskiy I.A., Rabinovich B.I., Dokuchaev L.V. *Metody opredeleniya prisoedinennykh mass zhidkosti v podvizhnykh polostyakh* [Methods of determination of added mass of liquid in moving cavities]. Kiev, Naukova dumka, 1969. 250 p.

9. Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskiy I.A. *Nelineynaya dinamika letatel'nogo apparata s zhidkost'yu* [Nonlinear dynamics of aircraft with liquid]. Moscow, Mashinostroenie, 1977. 203 p.

10. Kolesnikov K.S., Shkapov P.M., Pozhalostin A.A. Zadachi dinamiki gidromekhanicheskikh sistem v trudakh kafedry teoreticheskoy mekhaniki imeni professora N.E.Zhukovskogo [Problems of hydromechanical systems dynamics in proceedings of the zhukovsky theoretical mechanics department]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2012, spec. iss. no. 8, pp. 15-30.

11. Limarchenko O.S., Mataratstso D., Yasinskiy V.V. *Dinamika vrashchayushchikhsya konstruktsiy s zhidkost'yu* [Dynamics of rotating structures with liquid]. Kiev, GNOZIS, 2002. 304 p.

12. Stepanova M.I., Temnov A.N. Malye dvizheniya zhidkosti s poverkhnostnoy dissipatsiey energii [Small motions of liquid with surface energy dissipation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2011, no. 4, pp. 99-110.

13. D'yachenko M.I., Temnov A.N. Sobstvennye kolebaniya zhidkogo topliva v usloviyakh pereraspredeleniya [Natural oscillations of liquid propellant under redistribution conditions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2012, no. 3, pp. 31-38.

14. D'yachenko M.I., Temnov A.N. Problemy dinamiki pereraspredeleniya topliva v krupnogabaritnykh raketno-kosmicheskikh ob'ektakh [Problems of fuel redistribution dynamics in large-sized rocket and space objects]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2012, spec. iss., pp. 164-174.

15. Kirillov V.V. Issledovanie kolebaniy zhidkosti v nepodvizhnom sosude s uchetom ee vytekaniya [Study of oscillations of liquid in stationary vessel taking into account its leakage]. *Trudy MFTI*, 1960, iss. 5, pp. 19-25.

16. Orlov V.V., Temnov A.N. Malye dvizheniya zhidkosti, vytekayushchey iz baka [Small movement of the fluid flowing out of the tank]. *Sovremennye Metody Teorii Funktsiy I Smezhnye Problemy : tez. dokladov* [Modern Methods of the Theory of Functions and Related Problems: abstracts]. Voronezh, VSU Publ., 1997, p. 124.

17. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Osnovnye differentsial'nye uravneniya matematikoy fiziki* [Basic differential equations of mathematics physics]. Moscow, Fizmatlit, 1962. 767 p.

18. Lukovskiy I.A., Solodun A.V., Timokha A.N. Sobstvennye kolebaniya zhidkosti v usechennykh konicheskikh bakakh [Natural vibrations of a liquid in truncated conical tanks]. *Akusticheskiy vestnik*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 42-61.