

Дискретная марковская модель двухстороннего боя многочисленных группировок

10, октябрь 2013

DOI: 10.7463/1013.0617171

Дубограй И. В., Чуев В. Ю.

УДК 519.8

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

vacilious@mail.ruirina.dubograi@yandex.ru

Введение. Основой военно-технической оценки образцов вооружения и военной техники являются результаты математического моделирования их боевого функционирования. В качестве такой оценки необходимо использовать модели двухсторонних боевых действий, так как они более полно позволяют оценить степень приспособленности данного образца к решению поставленных боевых задач. В настоящее время разработаны различные типы моделей двухсторонних боевых действий. К ним, в первую очередь, относятся модели, построенные на основе метода динамики средних [2], [4], [9], [10].

При построении моделей этого типа, полагается, что согласно закону больших чисел численности сохранившихся боевых единиц противоборствующих сторон в каждый момент времени близки к своим средним численностям (математическим ожиданиям), что дает возможность отказаться от рассмотрения подробностей, связанных со случайным состоянием отдельно взятой боевой единицы, и рассматривать процесс боевых действий как детерминированный.

К достоинствам моделей этого типа относится, прежде всего, их простота. Однако, не учитывая стохастический характер протекания боя, модели этого типа могут привести к существенным ошибкам при вычислении его основных показателей.

Другой тип моделей боевых действий представляет собой статистические модели, построенные на основе метода статистических испытаний Монте-Карло [5], [6], [12]. Они позволяют описать бой, а также каждый фрагмент боя с любой степенью точности и полноты. Однако, из-за их громоздкости и чрезвычайно больших временных затрат при расчете на ЭВМ они не могут быть использованы при решении ряда военно-технических задач (в частности, на начальных этапах проектирования новых образцов вооружения и военной техники).

Одним из возможных способов построения вероятностных моделей боевых действий является использование теории марковских процессов [1], [7], [8], [11]. Модели этого типа существенно проще статистических моделей, но, учитывая стохастический характер протекания боя, они позволяют описать его и определить его основные показатели с большей степенью достоверности, чем модели динамики средних.

Целью настоящей работы является разработка вероятностной модели двухсторонних боевых действий на основе дискретных марковских процессов.

Основные математические зависимости и формулы. Рассмотрим бой двух группировок. Пусть первая сторона (x) имеет в начале боя x_0 однотипных боевых единиц. Вторая сторона (y) имеет в начале боя y_0 однотипных боевых единиц, не обязательно однородных с единицами стороны x . Возможны следующие варианты протекания боя. В первом случае все единицы стороны x производят выстрелы по противнику одновременно, т.е. сторона x наносит упреждающий удар, после чего уцелевшие единицы стороны y производят ответный залп по противнику. В дальнейшем уцелевшие единицы сторон производят залпы по противнику поочередно. В другом случае обе стороны наносят залпы одновременно, после чего все уцелевшие боевые единицы сторон производят залпы по противнику так же одновременно. Рассмотрим также ситуацию, когда первый залп проводит сторона y , а затем уцелевшие единицы сторон производят залпы по противнику поочередно.

Во всех случаях считаем, что обе стороны имеют полную и не запаздывающую информацию о состоянии единиц противника (поражены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам.

Также считаем, что вероятность P_x поражения боевой единицы стороны y одним выстрелом единицы стороны x и вероятность P_y поражения боевой единицы стороны x одним выстрелом единицы стороны y остаются в течение всего боя постоянными, но не обязательно равными друг другу. Бой заканчивается, когда все боевые единицы хотя бы одной из сторон будут поражены.

Рассматриваемая система опишется марковским процессом. Его состояниями являются двумерные точки

$$\{(p:q)/p = 0; 1; \dots x_0; q = 0; 1; \dots y_0\}$$

Если $p = 0$ или $q = 0$, то такое состояние является устойчивым. Важнейшей характеристикой этого процесса является матрица состояний системы:

$$A(t) = \begin{pmatrix} F_{00}(t) & F_{01}(t) & \dots & F_{0l}(t) & \dots & F_{0y_0}(t) \\ F_{10}(t) & F_{11}(t) & \dots & F_{1l}(t) & \dots & F_{1y_0}(t) \\ \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \ddots \\ F_{k0}(t) & F_{k1}(t) & \dots & F_{kl}(t) & \dots & F_{ky_0}(t) \\ \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \ddots \\ F_{x_0 0}(t) & F_{x_0 1}(t) & \dots & F_{x_0 l}(t) & \dots & F_{x_0 y_0}(t) \end{pmatrix},$$

где $F_{ij}(t)$ – вероятность того, что в момент времени t сохранилось i боевых единиц стороны x и j единиц стороны y . В начале боя ($t_0 = 0$) $F_{x_0 y_0}(0) = 1$; $F_{ij}(0) = 0$ при $i + j < x_0 + y_0$.

Состояние $(0:0)$ является состоянием данной системы только в том случае, когда существуют моменты времени боя, в которые стороны x и y проводят одновременные залпы. Если же противоборствующие стороны проводят залпы по противнику поочередно, то состояние $(0:0)$ состоянием рассматриваемой системы не является, т.е. $F_{00}(t) \equiv 0$ для любого момента времени боя. При залпе стороны x система из состояния $(k:l)$ может перейти только в состояние $(k:i)$, где

$$i = \begin{cases} l - k; l - k + 1; \dots l & \text{при } k < l \\ 0; 1; \dots l & \text{при } k \geq l. \end{cases}$$

Поскольку при залпе стороны x ее боевые единицы не уничтожаются, вероятности переходов в другие состояния равны нулю.

При рассмотрении залпов противоборствующих сторон будем полагать, что огонь ведется равномерно по всем непораженным единицам противника. Можно показать, что такое ведение огня является оптимальным, хотя доказательство этого факта достаточно громоздко.

Используя схему Бернулли [3], получаем, что вероятности переходов системы из состояния $(k:l)$ при залпе стороны x вычисляются следующим образом:

а) если $l = 1$, то

$$\begin{aligned} P(k:1 \rightarrow k:0) &= 1 - (1 - P_x)^k \\ P(k:1 \rightarrow k:1) &= (1 - P_x)^k; \end{aligned} \quad (1)$$

б) если $k < l$, то

$$P(k:l \rightarrow k:0) = 0$$

.....

$$P(k: l \rightarrow k: (l - k - 1)) = 0$$

$$P(k: l \rightarrow k: (l - k)) = P_x^k$$

.....

(2)

$$P(k: l \rightarrow k: i) = C_k^{k-l+i} P_x^{l-i} (1 - P_x)^{k-l+1}$$

.....

$$P(k: l \rightarrow k: (l - 1)) = k P_x (1 - P_x)^{k-1}$$

$$P(k: l \rightarrow k: l) = (1 - P_x)^k,$$

где $C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$

в) если $k = lr$, где r - целое число, полагая, что по каждой единице стороны y стреляют r единиц стороны x , получаем:

$$P(k: l \rightarrow k: 0) = P_{xr}^l$$

$$P(k: l \rightarrow k: 1) = l P_{xr}^{l-1} (1 - P_{xr})$$

.....

$$P(k: l \rightarrow k: i) = C_l^i P_{xr}^{l-i} (1 - P_{xr})^i \quad (3)$$

.....

$$P(k: l \rightarrow k: (l - 1)) = l P_{xr} (1 - P_{xr})^{l-1}$$

$$P(k: l \rightarrow k: l) = (1 - P_{xr})^l,$$

где $P_{xr} = 1 - (1 - P_x)^r$.

Если $k = rl + s$, где r, s - целые числа, считаем, что по каждой из s единиц стороны y стреляют по $r + 1$ единице стороны x , а по каждой из оставшихся $l - s$ единиц стороны y стреляют по r единиц стороны x . Тогда имеем следующее:

г) при $2s < l$

$$\begin{aligned}
P(k: l \rightarrow k: i) &= \\
&= \begin{cases} \sum_{j=0}^i C_s^j C_{l-s}^{i-j} P_{x(r+1)}^{s-j} (1 - P_{x(r+1)})^j P_{xr}^{l-i-s+j} (1 - P_{xr})^{i-j} \text{ при } 0 \leq i \leq s \\ \sum_{j=0}^s C_s^j C_{l-s}^{i-j} P_{x(r+1)}^{s-j} (1 - P_{x(r+1)})^j P_{xr}^{l-i-s+j} (1 - P_{xr})^{i-j} \text{ при } s < i \leq l-s \\ \sum_{j=0}^{l-i} C_{l-s}^j C_s^{l-i-j} P_{x(r+1)}^{l-i-j} (1 - P_{x(r+1)})^{i-l+s+j} P_{xr}^j (1 - P_{xr})^{l-s-j} \text{ при } l-s < i \leq l, \end{cases} \quad (4)
\end{aligned}$$

где $P_{x(r+1)} = 1 - (1 - P_x)^{r+1}$;

д) при $2s = l$

$$\begin{aligned}
P(k: l \rightarrow k: i) &= \\
&= \begin{cases} \sum_{j=0}^i C_s^j C_s^{i-j} P_{x(r+1)}^{s-j} (1 - P_{x(r+1)})^j P_{xr}^{s-i+j} (1 - P_{xr})^{i-j} \text{ при } 0 \leq i \leq s \\ \sum_{j=0}^{l-i} C_s^j C_s^{l-i-j} P_{x(r+1)}^j (1 - P_{x(r+1)})^{s-j} P_{xr}^{l-i-j} (1 - P_{xr})^{i-s+j} \text{ при } s < i \leq l, \end{cases} \quad (5)
\end{aligned}$$

е) при $2s > l$

$$\begin{aligned}
P(k: l \rightarrow k: i) &= \\
&= \begin{cases} \sum_{j=0}^i C_s^j C_{l-s}^{i-j} P_{x(r+1)}^{s-j} (1 - P_{x(r+1)})^j P_{xr}^{l-i-s+j} (1 - P_{xr})^{i-j} \text{ при } 0 \leq i \leq l-s \\ \sum_{j=0}^{l-s} C_{l-s}^j C_s^{l-i-j} P_{x(r+1)}^{l-i-j} (1 - P_{x(r+1)})^{i-l+s+j} P_{xr}^j (1 - P_{xr})^{l-s-j} \text{ при } l-s < i < s \\ \sum_{j=0}^{l-i} C_{l-s}^j C_s^{l-i-j} P_{x(r+1)}^{l-i-j} (1 - P_{x(r+1)})^{i-l+s+j} P_{xr}^j (1 - P_{xr})^{l-s-j} \text{ при } s \leq i \leq l, \end{cases} \quad (6)
\end{aligned}$$

где P_x - вероятность поражения боевой единицы стороны y одним выстрелом единицы стороны x .

Вероятности состояний системы после залпа стороны x примут следующие значения:

а) если $k = 1; 2 \dots x_0, l = 1; 2 \dots y_0$, то

$$F_{kl}(t) = P(k:l) = \sum_{i=l}^{y_0} P_0(k:i)P(k:i \rightarrow k:l) - P_0(k:l) \sum_{j=0}^{l-1} P(k:l \rightarrow k:j), (7)$$

где $P_0(i:j)$ - вероятность того, что до залпа стороны x система находилась в состоянии $(i:j)$;

б) если $k = 1; 2 \dots x_0, l = 0$, то

$$F_{k0}(t) = P(k:0) = P_0(k:0) + \sum_{i=1}^{y_0} P_0(k:i)P(k:i \rightarrow k:0) \quad (8)$$

Если же $k = 0$, т.е. все единицы стороны x уничтожены, то она не может произвести залп по противнику, поэтому вероятности состояний $(0:j)$, где $j = 0; 1; \dots y_0$ остаются без изменений.

Аналогичным образом определяются вероятности перехода из состояния $(k:l)$ в состояние $(i:l)$ при залпе стороны y ($i = 0; 1; \dots k$), а также вероятности состояний системы после проведения залпа стороной y .

При одновременном залпе обеих сторон вероятности перехода из состояния $(k:l) P^*(k:l \rightarrow i:j)$ ($i \leq k; j \leq l$) вычисляются следующим образом:

$$P^*(k:l \rightarrow i:j) = P(k:l \rightarrow k:j)P(k:l \rightarrow i:l), \quad (9)$$

где $P(k:l \rightarrow k:j)$ - вероятность перехода из состояния $(k:l)$ в состояние $(k:j)$ при залпе стороны x , $P(k:l \rightarrow i:l)$ - вероятность перехода из состояния $(k:l)$ в состояние $(i:l)$ при залпе стороны y .

Выражения для вычисления вероятностей состояний системы после одновременных залпов сторон имеют следующий вид:

а) если $k = 1; 2 \dots x_0, l = 1; 2 \dots y_0$, то

$$F_{kl}(t) = P(k;l) = \sum_{i=k}^{x_0} \sum_{j=l}^{y_0} P_0(i;j)P^*(i:j \rightarrow k:l) - P_0(k;l) \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq k+l}}^k \sum_{j=0}^l P^*(k:l \rightarrow i:j); \quad (10)$$

б) если $k = 0, l = 1; 2 \dots y_0$, то

$$F_{0l}(t) = P(0;l) = P_0(0;l) + \sum_{i=1}^{x_0} \sum_{j=l}^{y_0} P_0(i;j)P^*(i:j \rightarrow 0:l); \quad (11)$$

в) если $k = 1; 2 \dots x_0, l = 0$, то

$$P(k; 0) = P_0(k; 0) + \sum_{i=k}^{x_0} \sum_{j=1}^{y_0} P_0(i; j) P^*(i; j \rightarrow k; 0); \quad (12)$$

г) если $k = 0, l = 0$, то

$$P(0; 0) = P_0(0; 0) + \sum_{i=1}^{x_0} \sum_{j=1}^{y_0} P_0(i; j) P^*(i; j \rightarrow 0; 0). \quad (13)$$

Математическое ожидание M_x относительного количества сохранившихся к концу боя единиц стороны x находится следующим образом:

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^{x_0} i F_{i0}(\infty)}{x_0}, \quad (14)$$

а математическое ожидание M_y относительного количества сохранившихся к концу боя единиц стороны y :

$$M_y = \frac{\sum_{j=1}^{y_0} j F_{0j}(\infty)}{y_0} \quad (15)$$

Зависимости (1)-(15) легли в основу алгоритма описания боя многочисленных группировок с помощью дискретной марковской модели. Некоторые результаты расчетов приведены в таблицах 1 – 7.

Анализ результатов расчетов. Дискретные марковские модели двухстороннего боя позволяют учесть ряд факторов, учет которых невозможен при описании боя моделями, построенными на основе непрерывных случайных процессов. К таким факторам относится, прежде всего, возможность одновременного поражения двух и более боевых единиц.

Появляется отличная от нуля вероятность $F_{00}(\infty)$ полного уничтожения противоборствующих группировок (состояния 0:0), причем, эта вероятность может быть весьма существенной. Это иллюстрируют таблицы 1-3 вероятностей $F_{00}(\infty)$ полного уничтожения группировок при различных значениях вероятностей P_x и P_y для боев «2:3», «4:6» и «16:24» в случае, когда противоборствующие стороны производят залпы по противнику одновременно. Вероятность F_{00} может принимать большие значения ($F_{00}(\infty) > 0,2$) при исследовании боя малочисленных группировок при значениях вероятностей P_x и P_y ($P_x > 0,4$ или $P_y > 0,4$). С ростом начальных численностей противоборствующих сторон вероятность $F_{00}(\infty)$ убывает и становится пренебрежимо малой при исследовании боя многочисленных группировок

$$(x_0 \geq 20; y_0 \geq 20).$$

Разработанные модели позволяют также учесть влияние на исход боя упреждающего удара одной из сторон, что отражено в таблицах 4-7 для боев равных по численности группировок «2:2», «5:5», «10:10» и «20:20» при различных значениях вероятностей P_x и P_y .

Таблицы составлены следующим образом. В верхней строке каждой клетки таблиц – значения M_x при упреждающем залпе стороны x , в средней строке – значения M_x при одновременных залпах сторон, в нижней строке – значения M_x при упреждающем залпе стороны y .

Таблица 1-Вероятности полного уничтожения сторон (бой «2:3»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,010	0,005	0,002	0,001	0,000
0,3	0,026	0,035	0,022	0,011	0,003
0,5	0,028	0,075	0,068	0,042	0,013
0,7	0,027	0,109	0,132	0,098	0,035
0,9	0,026	0,138	0,208	0,182	0,072

Таблица 2- Вероятности полного уничтожения сторон (бой «4:6»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,003	0,000	0,000	0,000	0,000
0,3	0,010	0,011	0,003	0,000	0,000
0,5	0,008	0,035	0,021	0,005	0,000
0,7	0,005	0,054	0,061	0,025	0,002
0,9	0,003	0,060	0,113	0,069	0,007

Таблица 3-Вероятности полного уничтожения сторон (бой «16:24»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,3	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,000	0,007	0,000	0,000	0,000
0,7	0,000	0,012	0,008	0,000	0,000
0,9	0,000	0,005	0,030	0,004	0,000

Таблица 4-Математические ожидания относительного количества сохранившихся боевых единиц стороны x к концу боя (бой «2:2»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,447	0,146	0,069	0,039	0,024
	0,391	0,091	0,027	0,008	0,002
	0,378	0,079	0,020	0,004	0,001
0,3	0,809	0,519	0,349	0,245	0,178
	0,717	0,334	0,147	0,055	0,012
	0,700	0,294	0,108	0,030	0,003
0,5	0,916	0,749	0,610	0,499	0,412
	0,818	0,497	0,270	0,121	0,030
	0,804	0,442	0,200	0,064	0,007
0,7	0,963	0,884	0,806	0,733	0,667
	0,863	0,601	0,374	0,193	0,054
	0,852	0,540	0,279	0,101	0,011
0,9	0,990	0,968	0,946	0,924	0,902
	0,890	0,671	0,461	0,264	0,084
	0,880	0,609	0,346	0,136	0,016

Таблица 5-Математические ожидания относительного количества сохранившихся боевых единиц стороны x к концу боя (бой «5:5»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,375	0,046	0,009	0,003	0,001
	0,307	0,019	0,001	0,000	0,000
	0,281	0,013	0,001	0,000	0,000
0,3	0,830	0,471	0,247	0,131	0,071
	0,727	0,251	0,062	0,011	0,001
	0,700	0,178	0,025	0,002	0,000
0,5	0,928	0,763	0,594	0,448	0,332
	0,826	0,467	0,197	0,057	0,007
	0,810	0,358	0,087	0,009	0,000
0,7	0,967	0,897	0,821	0,742	0,662
	0,866	0,594	0,337	0,140	0,026
	0,855	0,485	0,164	0,024	0,000
0,9	0,990	0,970	0,949	0,929	0,907
	0,890	0,670	0,451	0,244	0,068
	0,880	0,569	0,239	0,045	0,001

Таблица 6-Математические ожидания относительного количества сохранившихся боевых единиц стороны x к концу боя (бой «10:10»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,335	0,011	0,001	0,000	0,000
	0,257	0,025	0,000	0,000	0,000
	0,221	0,001	0,000	0,000	0,000
0,3	0,846	0,456	0,183	0,067	0,025
	0,740	0,203	0,023	0,001	0,000
	0,715	0,110	0,004	0,000	0,000
0,5	0,923	0,781	0,604	0,432	0,291
	0,831	0,464	0,153	0,024	0,001
	0,818	0,318	0,035	0,001	0,000
0,7	0,968	0,903	0,833	0,759	0,681
	0,868	0,597	0,323	0,107	0,010
	0,858	0,472	0,100	0,004	0,000
0,9	0,990	0,970	0,950	0,930	0,910
	0,890	0,670	0,449	0,233	0,053
	0,880	0,567	0,180	0,012	0,000

Таблица 7-Математические ожидания относительного количества сохранившихся боевых единиц стороны x к концу боя (бой «20:20»)

$P_x \backslash P_y$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,305	0,001	0,000	0,000	0,000
	0,214	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,168	0,000	0,000	0,000	0,000
0,3	0,853	0,456	0,128	0,025	0,004
	0,748	0,163	0,001	0,000	0,000
	0,727	0,058	0,000	0,000	0,000
0,5	0,934	0,791	0,622	0,430	0,259
	0,833	0,469	0,119	0,007	0,000
	0,821	0,292	0,009	0,000	0,000
0,7	0,969	0,905	0,839	0,771	0,698
	0,868	0,601	0,320	0,080	0,002
	0,859	0,475	0,052	0,000	0,000
0,9	0,990	0,970	0,950	0,930	0,910
	0,890	0,670	0,450	0,229	0,040
	0,881	0,574	0,134	0,001	0,000

Выводы.

1) На основе дискретных марковских процессов разработана модель двухсторонних боевых действий. Проведенные расчеты показали работоспособность построенной модели.

2) Доказано существенное влияние на исход боя упреждающего удара одной из сторон при больших значениях вероятностей P_x и P_y , причем это влияние увеличивается при пропорциональном увеличении начальных численностей противоборствующих сторон (т.е. при $\frac{y_0}{x_0} = \text{const}$). При малых значениях вероятностей P_x и P_y это влияние заметно только для боя близких по силам группировок.

3) Показано существование возможности полного уничтожения противоборствующих группировок к концу боя, причем вероятность этого может быть в отдельных случаях достаточно велика.

Разработанный алгоритм позволяет также учесть изменение в процессе боя вероятностей P_x и P_y , а также ограниченность времени протекания боя. В дальнейшем предполагается разработать алгоритм, позволяющий учесть изменение в процессе боя временных интервалов между залпами каждой из сторон, а также алгоритм для отображения боя группировок, состоящих каждая из разнотипных боевых единиц.

Список литературы.

1. Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Марковские модели боя. М.: Министерство обороны СССР, 1985. 85 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: УРСС, 2006. 432 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1999. 576 с.
4. Пашков Н.Ю., Строгалева В.П., Чуев В.Ю. Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок // Оборонная техника, 2000. № 9-10. С. 19-21.
5. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1968. 64 с.
6. Ткаченко П.Н. Математические модели боевых действий. М.: Советское радио, 1969. 240 с.
7. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. М.: Воениздат, 1970. 270 с.
8. Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование». С. 223-232.
9. Jaswal N.K. Military Operations Research: Quantitative Decision Making. Kluwer Academic Publishers, 1997. P. 388.

10. Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. London: Constable and Co., 1916. P. 243.
11. Shanahan L. Dynamics of Model Battles. New York: Physics Department, State University of New York, 2003. P. 1-43.
12. Bretnor R. Decisive Warfare – A Study in Military Theory. New York: Stackpole Books, 1969. P. 192.

Discrete Markov model of a double-sided battle of numerous groups

10, October 2013

DOI: **10.7463/1013.0617171**

Dubograi I.V., Chuev V.Yu.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

vacilious@mail.ru

irina.dubograi@yandex.ru

The purpose of this work is to design a model of double-sided battles of numerous groups on the basis of discrete Markov processes. Mathematical relations which allow one to calculate probabilities of fighting strength preserved on each side during the battle and at the end of one. The present study addresses the question of influence of various factors on the battle outcome and main indicators of the mission. The proposed model may be used not only for development of new weapon models and defense equipment but also for estimation of their adequacy for execution of assigned missions.

Publications with keywords: [discrete Markov process](#), [both – sided model of a battle](#)

Publications with words: [discrete Markov process](#), [both – sided model of a battle](#)

References

1. Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. *Markovskie modeli boya* [Markov models of battle]. Moscow, Publ. of Ministry of defense of USSR, 1985. 85 p.
2. Venttsel' E.S. *Issledovanie operatsiy* [Operations research]. Moscow, URSS Publ., 2006. 432 p.
3. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1999. 576 p.
4. Pashkov N.Yu., Strogalev V.P., Chuev V.Yu. *Smeshannaya model' dinamiki srednikh dlya mnogochislennykh gruppirovok* [Mixed average dynamic model for numerous groups]. *Oboronnaya tekhnika*, 2000, no. 9-10, pp. 19-21.

5. Sobol' I.M. *Metod Monte-Karlo* [The Monte Carlo Method]. Moscow, Nauka, 1968. 64 p.
6. Tkachenko P.N. *Matematicheskie modeli boevykh deystviy* [Mathematical models of military operations]. Moscow, Sovetskoe radio, 1969. 240 p.
7. Chuev Yu.V. *Issledovanie operatsiy v voennom dele* [Operations research in military affairs]. Moscow, Voenizdat, 1970. 270 p.
8. Chuev V.Yu. Veroyatnostnaya model' boya mnogochislennykh gruppirovok [Probabilistic model of battle of numerous groups]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science]. 2011, Spets. vyp. "Matematicheskoe modelirovanie" [Spec. iss. "Mathematical modeling"], pp. 223-232.
9. Jaswal N.K. *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 388.
10. Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London, Constable and Co., 1916, p. 243.
11. Shanahan L. *Dynamics of Model Battles*. New York, Physics Department, State University of New York, 2003, pp. 1-43.
12. Bretnor R. *Decisive Warfare – A Study in Military Theory*. New York, Stackpole Books, 1969, p. 192.