НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

О приближении значений показательной функции

10, октябрь 2013

DOI: 10.7463/1013.0604020

Иванков П. Л.

УДК 511.361

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

ivankovpl@mail.ru

Введение

Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ — комплексные числа. Мерой линейной независимости этих чисел называется

$$L(\zeta_1, \ldots, \zeta_m; H) = \min |h_1\zeta_1 + \ldots + h_m\zeta_m|, \tag{1}$$

где минимум берется по всем нетривиальным наборам целых рациональных чисел $h_1, \ldots, h_m$, для которых

$$\max(|h_1|, \ldots, |h_m|) \leqslant H. \tag{2}$$

Если не все числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ являются вещественными, то часто минимум в правой части (1) рассматривают по всем нетривиальным наборам целых чисел (удовлетворяющих условию (2)) из какого-либо мнимого квадратичного поля. Поскольку найти явное выражение для функции (1) обычно не удается, то приходится ограничиваться получением для этой функции оценок снизу. Для значений показательной функции наиболее известен результат К. Малера [1]

$$L(1, e, \ldots, e^m; H) > h^{-m-c\frac{m^2 \ln m}{\ln \ln H}}, \tag{3}$$

где c — положительная постоянная, а число H достаточно велико.

Уточнить оценку (3) пока не удается (кроме случая $m = 1$). Можно, однако, получать аналогичные (и более точные) оценки для значений показательной функции в специально выбранных точках некоторого мнимого квадратичного поля (или поля рациональных чисел). Примеры результатов такого рода имеются в [2, 3, 4]. В двух последних работах рассматривается случай $k = 2$ из приводимой ниже теоремы.

1. Основные обозначения и формулировка результата

Обозначим через $\xi_1 = 1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ различные корни k-й степени из единицы ($k \geqslant 2$), и пусть алгебраическое поле $\mathbb{I}$ содержит все эти корни. Пусть, далее, $b \neq 0,\ b \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Обозначим

$$C = \sqrt{k}\left(\frac{\sqrt{2\pi}M}{|b|k\Gamma\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}\right)^{k-1}, \quad \gamma = \frac{k+1}{2} - \frac{1}{k}, \tag{4}$$

$$M = \max\left(\left|e^{-\frac{\xi_1}{b}}\right|, \ldots, \left|e^{-\frac{\xi_k}{b}}\right|\right). \tag{5}$$

При некоторых значениях k (например, при $k = 2,\ 3,\ 4,\ 6$) поле $\mathbb{I}$ может быть полем рациональных чисел или мнимым квадратичным полем.

Теорема 1. Предположим, что $\mathbb{I}$ есть поле рациональных чисел или мнимое квадратичное поле. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Неравенство

$$\left|h_1 e^{\frac{\xi_1}{b}} + \ldots + h_k e^{\frac{\xi_k}{b}}\right| < C H^{1-k}\left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\gamma},$$

где $H = \max(|h_1|, \ldots, |h_k|)$, имеет бесконечно много решений в целых числах $h_1, \ldots, h_k$ из поля $\mathbb{I}$.

2. Если $bk^{-\frac{k}{2}}$ — целое (алгебраическое) число, то при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left|h_1 e^{\frac{\xi_1}{b}} + \ldots + h_k e^{\frac{\xi_k}{b}}\right| < (C-\varepsilon) H^{1-k}\left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\gamma}$$

может иметь лишь конечное число решений указанного вида.

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi_r(\nu) = (\nu - r)(\nu - r - k)\ldots(\nu - r - k(n-1))\sum_{j=1}^{k}\xi_j^{\nu - r}, \tag{6}$$

где $r = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$; $\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; n — натуральное число.

Лемма 1. Если $0 \leqslant \nu \leqslant kn + r - 1$ или $\nu - r$ не делится на k, то $\Phi_r(\nu) = 0$. Если $\nu \geqslant kn + r$ и $\nu - r$ делится на k, то выполняется равенство

$$\Phi_r(\nu) = k^{n+1}\frac{t!}{(t-n)!},$$

где $t = \dfrac{\nu - r}{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j^{\nu-r} = \begin{cases} k, & \nu \equiv r (\operatorname{mod} k), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то справедливость утверждений леммы вытекает непосредственно из определения функции $\Phi_r(\nu)$. Лемма доказана.

Подберем многочлены

$$P_{rj}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{rjs} z^s, \quad r = 0, 1, \ldots, k-1, \quad j = 1, \ldots, k,$$

для коэффициентов которых равенство

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{n} p_{rjs} \xi_j^{\nu-s} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-s+1) = \Phi_r(\nu) \tag{7}$$

выполняется при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Для этого достаточно при $r = 0, 1, \ldots, k-1$, $j = 1, \ldots, k$, $s = 0, \ldots, n$ положить

$$p_{rjs} = \frac{\xi_j^{s-r}}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=n+1} \frac{(\zeta-r)(\zeta-r-k)\ldots(\zeta-r-k(n-1))}{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-s)}\, d\zeta, \tag{8}$$

где окружность $|\zeta| = n+1$ ориентирована положительно. Последнее утверждение очевидно: если подставить правую часть (8) вместо p_{rjs} в (7), то мы получим равенство

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j^{\nu-r} \sum_{s=0}^{n} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-s+1) \frac{p_{rjs}}{\xi_j^{s-r}} = \Phi_r(\nu),$$

которое справедливо, поскольку внутренняя сумма в левой части есть разложение в ряд Ньютона многочлена $\prod\limits_{x=0}^{n-1} (\nu - r - kx)$ от ν из правой части (6) [5, §2.2].

Рассмотрим теперь функциональную линейную форму

$$L_r(z) = \sum_{j=1}^{k} P_{rj}(z) e^{\xi_j z}. \tag{9}$$

Преобразуем выражение для коэффициента при z^ν в разложении $L_r(z)$ по степеням z. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{\min(n,\nu)} p_{rjs} \frac{\xi_j^{\nu-s}}{(\nu-s)!} = \frac{1}{\nu!} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{n} p_{rjs} \xi_j^{\nu-s} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-s+1) = \frac{\Phi_r(\nu)}{\nu!}.$$

Мы воспользовались равенством (7), а также тем, что $\prod\limits_{x=0}^{s-1} (\nu - x) = 0$ при $s > \nu$. Таким образом,

$$L_r(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Phi_r(\nu)}{\nu!} z^\nu. \tag{10}$$

Лемма 2. При $n \to \infty$

$$b^n L_r\Big(\frac{1}{b}\Big) = k^{\frac{1}{2}-r} b^{-r} (be^{-1}kn)^{(1-k)n} n^{-r} \left(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right). \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с леммой 1 и равенством (10) имеем при $n \to \infty$

$$b^n L_r\Big(\frac{1}{b}\Big) = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{k^{n+1}t!}{(t-n)!(kt+r)!}\,\frac{b^n}{b^{kt+r}} = b^{(1-k)n-r} k^{n+1} \frac{n!}{(kn+r)!} \left(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right).$$

Из этого равенства требуемое утверждение получается с помощью формулы Стирлинга. Лемма доказана.

Лемма 3. При $n \to \infty$

$$b^n P_{0j}\Big(\frac{1}{b}\Big) = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\Big(1-\dfrac{1}{k}\Big)}\,\frac{\xi_j}{bk}\, e^{-\frac{\xi_j}{b}} (be^{-1}kn)^n n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right)\right), \tag{12}$$

$$b^n P_{rj}\Big(\frac{1}{b}\Big) = (-1)^n \xi_j^{-r} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\Big(\dfrac{r}{k}\Big)}\, e^{-\frac{\xi_j}{b}} (be^{-1}kn)^n n^{-\frac{1}{2}+\frac{r}{k}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right)\right), \tag{13}$$

$j = 1, \ldots, k$, $r = 1, \ldots, k-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r > 0$. Применив теорему о вычетах к правой части (8), получим

$$b^n P_{rj}\Big(\frac{1}{b}\Big) = \frac{b^n}{\xi_j^r} \sum_{s=0}^{n} \Big(\frac{\xi_j}{b}\Big)^s \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=n+1} \frac{(\zeta-r)(\zeta-r-k)\ldots(\zeta-r-k(n-1))}{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-s)}\, d\zeta =$$

$$= \frac{b^n}{\xi_j^r} \left(\sum_{s=0}^{n} \Big(\frac{\xi_j}{b}\Big)^s \frac{-r(-r-k)\ldots(-r-k(n-1))}{(-1)\ldots(-s)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n} \Big(\frac{\xi_j}{b}\Big)^s \sum_{\mu=1}^{s} (-1)^{s-\mu} \frac{(\mu-r)(\mu-r-k)\ldots(\mu-r-k(n-1))}{\mu!(s-\mu)!} \right). \tag{14}$$

Далее, при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{s=0}^{n} \Big(\frac{\xi_j}{b}\Big)^s \frac{-r(-r-k)\ldots(-r-k(n-1))}{(-1)\ldots(-s)} =$$

$$= (-1)^n k^n \frac{\Gamma\Big(n+\dfrac{r}{k}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{r}{k}\Big)} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Big(-\frac{\xi_j}{b}\Big)^s \frac{1}{s!} - \sum_{s=n+1}^{\infty} \Big(-\frac{\xi_j}{b}\Big)^s \frac{1}{s!} \right) =$$

$$= (-1)^n k^n e^{-\frac{\xi_j}{b}} \frac{\Gamma\Big(n+\dfrac{r}{k}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{r}{k}\Big)} \left(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right).$$

Оценим двойную сумму из правой части (14). Для знаменателя дроби, входящей во внутреннюю сумму, имеем очевидную оценку

$$\mu!(s-\mu)! \geqslant \frac{s!}{2^s}.$$

Обозначим через m минимальное значение Γ-функции на $(0,\infty)$. При достаточно большом n

$$\left|(\mu-r)(\mu-r-k)\ldots(\mu-r-k(n-1))\right| = k^n \prod_{x=\left[\frac{\mu}{k}\right]+1}^{n-1}\left(\frac{r-\mu}{k}+x\right)\left|\prod_{x=0}^{\left[\frac{\mu}{k}\right]}\left(\frac{\mu-r}{k}-x\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant k^n \frac{\Gamma\left(n+\dfrac{r-\mu}{k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{r}{k}-\left\{\dfrac{\mu}{k}\right\}+1\right)}\left(\frac{2\mu}{k}+1\right)^{\frac{\mu}{k}+1} \leqslant k^n \frac{\Gamma\left(n+\dfrac{r-1}{k}\right)}{m}\left(\frac{2s}{k}+1\right)^{\frac{s}{k}+1}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{(\mu-r)(\mu-r-k)\ldots(\mu-r-k(n-1))}{\mu!(s-\mu)!}\right| \leqslant k^n \frac{\Gamma\left(n+\dfrac{r-1}{k}\right)\left(\dfrac{2s}{k}+1\right)^{\frac{s}{k}+1}2^s}{ms!},$$

откуда

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\xi_j}{b}\right)^s \sum_{\mu=1}^{s}(-1)^{s-\mu}\frac{(\mu-r)(\mu-r-k)\ldots(\mu-r-k(n-1))}{\mu!(s-\mu)!}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^n}{m}\Gamma\left(n+\frac{r-1}{k}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{2}{|b|}\right)^s \frac{\left(\dfrac{2s}{k}+1\right)^{\frac{s}{k}+1}}{(s-1)!}. \qquad (15)$$

Из формулы Стирлинга следует, что при $n\to\infty$

$$\Gamma\left(n+\frac{r}{k}-\frac{\alpha}{k}\right) = \sqrt{2\pi}\, n^{n-\frac{1}{2}+\frac{r}{k}-\frac{\alpha}{k}} e^{-n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad \alpha = 0,\,1.$$

Пользуясь этим, из (14)—(15) получаем (13). При $r=0$ имеем

$$b^n P_{0j}\left(\frac{1}{b}\right) = b^n \sum_{s=0}^{n}\left(\frac{\xi_j}{b}\right)^s \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=n+1}\frac{\zeta(\zeta-k)\ldots(\zeta-k(n-1))}{\zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-s)}\,d\zeta =$$

$$= b^n\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\xi_j}{b}\right)^s\frac{(1-k)\ldots(1-k(n-1))}{(-1)\ldots(1-s)} + \sum_{s=2}^{n}\left(\frac{\xi_j}{b}\right)^s\sum_{\mu=2}^{s}(-1)^{s-\mu}\frac{(\mu-k)\ldots(\mu-k(n-1))}{(\mu-1)!(s-\mu)!}\right).$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, дают формулу (12). Лемма доказана.

Обозначим

$$a_{rj} = a_{rj}^{(n)} = b^n P_{rj}\Big(\frac{1}{b}\Big). \tag{16}$$

Заметим, что так определенные числа a_{rj} являются целыми в поле $\mathbb{I}$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно записать интеграл из правой части (8) с помощью вычета относительно точки $\zeta = \infty$.

Из леммы 3 следует, что

$$|a_{rj}| = c_1(c_2 n)^n n^{c_3}(1 + o(1)) \quad (n \to \infty),$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные, не зависящие от n; c_1 и c_2 положительны. Поэтому при $n \to \infty$

$$\frac{\ln\ln|a_{rj}|}{\ln|a_{rj}|} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right). \tag{17}$$

Для числовой линейной формы

$$l_r = l_r^{(n)} = b^n L_r\Big(\frac{1}{b}\Big) = a_{r1}e^{\frac{\xi_1}{b}} + \ldots + a_{rk}e^{\frac{\xi_k}{b}}, \quad 0 \leqslant r \leqslant k-1, \tag{18}$$

обозначим через $H_r = H_r^{(n)}$ максимум модулей ее коэффициентов. Из (12) и (17) следует, что при $n \to \infty$

$$CH_0^{1-k}\Big(\frac{\ln\ln H_0}{\ln H_0}\Big)^{\gamma} = \sqrt{k}(|b|e^{-1}kn)^{(1-k)n}\left(1 + \gamma\frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right), \tag{19}$$

где C и γ определены равенствами (4). Сравнивая правую часть (19) с (11) при $r = 0$, видим, что при любом $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n выполняется двойное неравенство

$$(C-\varepsilon)H_0^{1-k}\Big(\frac{\ln\ln H_0}{\ln H_0}\Big)^{\gamma} < |l_0| < CH_0^{1-k}\Big(\frac{\ln\ln H_0}{\ln H_0}\Big)^{\gamma}, \tag{20}$$

из которого, в частности, следует первое утверждение теоремы.

Переходя к доказательству второй части теоремы, заметим прежде всего, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и при всех достаточно больших n

$$(C_r-\varepsilon)H_r^{1-k}\Big(\frac{\ln\ln H_r}{\ln H_r}\Big)^{\gamma_r} < |l_r| < C_rH_r^{1-k}\Big(\frac{\ln\ln H_r}{\ln H_r}\Big)^{\gamma_r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant k-1. \tag{21}$$

Соотношения (21) могут быть получены с помощью (13) и (11) по указанной выше схеме; при этом

$$C_r = k^{\frac{1}{2}-r}|b|^{-r}\left(\frac{\sqrt{2\pi}M}{\Gamma\Big(\frac{r}{k}\Big)}\max_{1\leqslant j\leqslant k}\Big|e^{-\frac{\xi_j}{b}}\Big|\right)^{k-1}, \quad \gamma_r = \frac{k-1}{2} + \frac{r}{k}, \quad r = 1, \ldots, k-1, \tag{22}$$

где число M определено равенством (5). Из (20), (21) и (22) следует, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|l_r| > (C-\varepsilon)H_r^{1-k}\Big(\frac{\ln\ln H_r}{\ln H_r}\Big)^{\gamma}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Лемма 4. Определитель, строками которого служат коэффициенты линейных форм

$$l_q^{(n)},\ l_{q+1}^{(n)},\ \ldots,\ l_{k-1}^{(n)},\ l_1^{(n+1)},\ \ldots,\ l_q^{(n+1)},\quad 0 \leqslant q \leqslant k-1,$$

отличен от нуля.

Доказательство. Рассмотрим случай $q = 0$. Заметим сначала, что порядок нуля определителя

$$\Delta(z) = |P_{rj}(z)|_{r=0,1,\ldots,k-1,\, j=1,\ldots,k}$$

при $z = 0$ не меньше kn. Это следует из леммы 1, (9) и (10). Поэтому

$$\Delta(z) = Az^{kn}, \tag{23}$$

где

$$A = |p_{rjn}|_{r=0,1,\ldots,k-1,\, j=1,\ldots,k}.$$

Из (8) следует, что

$$A = |\xi_j^{n-r}|_{r=0,1,\ldots,k-1,\, j=1,\ldots,k} = \pm q, \tag{24}$$

где

$$q = i^{\frac{(k-1)(3k-2)}{2}} k^{\frac{k}{2}}$$

По поводу вычисления последнего определителя см., например, [6, задача 532]. Из (23) и (24) следует, в частности, что $\Delta(z) \neq 0$, если $z \neq 0$. Отсюда вытекает утверждение леммы при $q = 0$. Аналогично можно доказать лемму и при $1 \leqslant q \leqslant k-1$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполнено условие $bk^{-\frac{k}{2}} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ второго утверждения теоремы и пусть $c \in \mathbb{I}$, $0 < |c| < 1$. Тогда при фиксированном r, $0 \leqslant r \leqslant k-1$, не все числа

$$ca_{rj},\quad j = 1,\ \ldots,\ k, \tag{25}$$

будут целыми в поле $\mathbb{I}$.

Доказательство. Из (16), (23) и (24) вытекает равенство

$$|a_{rj}|_{r=0,1,\ldots,k-1,\, j=1,\ldots,k} = \pm q. \tag{26}$$

Поэтому если все числа (25) являются целыми, то целым будет и число cq. Следовательно, целым является и число c, поскольку $bq^{-1} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ и

$$ca_{r1} = \sum_{s=0}^{n-1} p_{r1s} cq(bq^{-1}) b^{n-s-1} + c.$$

Однако это невозможно, так как $0 < |c| < 1$. Лемма доказана.

С помощью (12) нетрудно убедиться, что последовательность $\{H_0^{(n)}\}$ возрастает, начиная с некоторого номера (числа $H_r^{(n)}$ определены после равенства (18)). Поэтому для линейной формы

$$l = h_1 e^{\frac{\xi_1}{b}} + \ldots + h_k e^{\frac{\xi_k}{b}}$$

с целыми в поле $\mathbb{I}$ коэффициентами при достаточно большом H,

$$H = \max(|h_1|, \ldots, |h_k|),$$

найдется натуральное n, такое, что $H_0^{(n)} \leqslant H < H_0^{(n+1)}$. Будем различать два случая

$$H_0^{(n)} \leqslant H < H_{k-1}^{(n)} \quad \text{и} \quad H_{k-1}^{(n)} \leqslant H < H_0^{(n+1)}. \tag{27}$$

Рассмотрим первый случай. Так как при всех достаточно больших n

$$H_0^{(n)} < H_1^{(n)} < \ldots < H_{k-1}^{(n)},$$

то найдется r, $0 \leqslant r \leqslant k-2$, для которого

$$H_r^{(n)} \leqslant H < H_{r+1}^{(n)}. \tag{28}$$

Пусть сначала $H_0 \leqslant H < H_1$; предположим дополнительно, что

$$H \leqslant \frac{1}{\ln\ln n} H_1.$$

Поскольку линейные формы l_0, l_1, ..., l_{k-1} линейно независимы (см. (26)), то в поле $\mathbb{I}$ существуют такие числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, что

$$(h_1 \quad \ldots \quad h_k) = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_{k-1}) \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0k} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Если в последнем равенстве $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, то $l = \alpha_0 l_0$. Кроме того, так как l имеет целые коэффициенты, то, согласно лемме 5, $|\alpha_0| \geqslant 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$|l| = |\alpha_0 l_0| > |\alpha_0|(C-\varepsilon)H_0^{1-k}\left(\frac{\ln\ln H_0}{\ln H_0}\right)^{\gamma} \geqslant (C-\varepsilon)H^{1-k}\left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\gamma}.$$

Пусть теперь в (29) имеется коэффициент α_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, отличный от нуля. Тогда формы $l_0, \ldots, l_{j-1}, l, l_{j+1}, \ldots, l_{k-1}$ линейно независимы и определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \ldots & a_{j-1,k} \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_k \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{j+1,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля; в этом случае

$$|\delta| \geqslant 1.$$

Для получения оценки сверху модуля δ напишем очевидное равенство

$$\delta e^{\frac{1}{b}} = \begin{vmatrix} l_0 & a_{02} & \ldots & a_{0k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{j-1} & a_{j-1,2} & \ldots & a_{j-1,k} \\ l & h_2 & \ldots & h_k \\ l_{j+1} & a_{j+1,2} & \ldots & a_{j+1,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{k-1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{(k-1)!}\left|\delta e^{\frac{1}{b}}\right| \leqslant \sum_{\mu=0,\,\mu\neq j}^{k-1} |l_\mu| \frac{HH_0H_1\ldots H_{k-1}}{H_\mu H_j} + |l|\frac{H_0H_1\ldots H_{k-1}}{H_j}.$$

Заметим, что сумма по μ в правой части этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. В самом деле, при $\mu = 0$ имеем

$$\left|l_0\frac{HH_1\ldots H_{k-1}}{H_j}\right| \leqslant \frac{c_4}{\ln\ln n} n^{\frac{1-j}{k}},$$

где c_4 положительная постоянная, не зависящая от n. Поскольку $j \geqslant 1$, то последнее выражение стремится к нулю. Аналогично можно проверить, что при $n \to \infty$ стремятся к нулю и слагаемые, отвечающие другим значениям μ. Поэтому при всех достаточно больших n

$$|l| \geqslant c_5\frac{H_j}{H_0H_1\ldots H_{k-1}} \geqslant \frac{c_5}{H_0H_2\ldots H_{k-1}}.$$

Учитывая неравенство $H \geqslant H_0$, а также соотношения (12) и (13), получаем отсюда, что

$$|l| \geqslant c_6 H^{1-k}\left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\gamma-\varepsilon_0}, \tag{30}$$

где константа γ определена равенством (4), а $\varepsilon_0 = 2/k$.

Рассмотрим теперь случай

$$\frac{1}{\ln\ln n}H_1 \leqslant H \leqslant H_1.$$

В этой ситуации следует взять линейно независимые формы

$$l_1^{(n)}, \quad l_2^{(n)}, \quad \ldots, \quad l_{k-1}^{(n)}, \quad l_1^{(n+1)}.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, дают неравенство вида (30). Изменятся, быть может, лишь положительные постоянные c_6 и ε_0. Аналогично обстоит дело и с неравенством (28) при $r > 0$. И здесь в конечном итоге оказывается, что справедливо неравенство типа (30). Второй случай из (27) разбирается аналогично и приводит к тому же результату.

Мы видим, что при всех достаточно больших H выполняется неравенство

$$\left|h_1e^{\frac{\xi_1}{b}} + \ldots + h_ke^{\frac{\xi_k}{b}}\right| > (C-\varepsilon)H^{1-k}\left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\gamma}.$$

Отсюда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

Заключение

Аналитическая конструкция, использованная в данной работе, после внесения некоторых дополнительных усовершенствований может быть использована и для оценки линейных форм от значений обобщенных гипергеометрических функций. С некоторыми оговорками здесь ожидается результат аналогичный изложенному в настоящей работе: оценки линейных форм будут точны по высоте и в большинстве случаев возможно вычисление соответствующих констант. Во второй части доказанной в данной работе теоремы имеется ограничение на число b. От этого ограничения можно отказаться (это приведет к усложнению формулировки теоремы и к необходимости проведения дополнительных рассуждений технического характера).

Список литературы

1. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. 1. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1932. no. 166, P. 118–136.
2. Галочкин А.И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, вып. 1. С. 35–45.
3. Davis C.S. A note on rational approximation // Bull. Austral. Math. Soc. 1979. Vol. 20. P. 407–410.
4. Попов А.Ю. Приближения некоторых степеней числа e // Диофантовы приближения. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 77–85.
5. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.
7. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. 1991. Т. 182. № 2. С. 283–302.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Approximation of values of an exponential function

10, October 2013

DOI: 10.7463/1013.0604020

Ivankov P. L.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
ivankovpl@mail.ru

In order to obtain quantitative results in the theory of Diophantine approximations one uses functional linear approximating forms which have sufficiently high order of zero at $z = 0$. Such forms are constructed either by means of the Dirichlet principle or effectively. In this article, by means of effective construction of approximating linear forms, we obtain a low estimate of the modulus of a linear form in the values of an exponential function in different points of an imaginary quadratic field; numerators of these points are roots of unity. Precise estimates, with respect to the height, were obtained with computation of corresponding constants. The proposed construction could be used for obtaining analogous estimates in values of generalized hypergeometric functions.

References

1. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. 1. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1932, vol. 166, pp. 118–136.
2. Galochkin A.I. Utochnenie otsenok nekotorykh lineynykh form [The sharpening of the bounds on certain linear forms]. *Matematicheskie zametki*, 1976, vol. 20, iss. 1, pp. 35–45. (English Translation: *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1976, vol. 20, iss. 1, pp. 575–581. DOI: 10.1007/BF01152761).
3. Davis C.S. A note on rational approximation. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1979, vol. 20, pp. 407–410. DOI: 10.1017/S0004972700011114.
4. Popov A.Yu. Priblizheniya nekotorykh stepeney chisla e [Approximations of some powers of the number e]. *Diofantovy priblizheniya: sb. statey. Ch. 1* [Diophantine approximation : collection of articles. Pt. 1]. Moscow, MSU Publ., 1985, pp. 77–85.
5. Fel'dman N.I. *Sed'maya problema Gil'berta* [Seventh Hilbert's problem]. Moscow, MSU Publ., 1982. 312 p.

6. Proskuryakov I.V. *Sbornik zadach po lineynoy algebra* [Collection of problems on Linear Algebra]. Moscow, Nauka, 1984. 336 p.
7. Ivankov P.L. Ob arifmeticheskikh svoystvakh znacheniy gipergeometricheskikh funktsiy [On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions]. *Matematicheskiy sbornik*, 1991, vol. 182, no. 2, pp. 283–302. (English Translation: Mathematics of the USSR-Sbornik, 1992, vol. 72, iss. 1, pp. 267–286. DOI: 10.1070/SM1992v072n01ABEH001413).