

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Стабилизация движения двухколесного робота с дифференциальным приводом по заданному пути

04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0547786

Нефедов Г. А.

УДК 517.93

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
mastergrig90@gmail.com

Введение

Синтез закона управления плоским движением двухколесного робота с дифференциальным приводом, стабилизирующего его движение по заданному пути, является типичной задачей для робототехнических систем на колесной платформе, таких как мобильные роботы, сельскохозяйственные машины, грузовые автомобили, легковые автомобили (самоуправляемые автомобили).

Известны различные подходы к задаче стабилизации движения вдоль заданной кривой. Один из них состоит в преобразовании системы с помощью замены координат и преобразования выходов к так называемой цепной форме [9, 10]. Еще один подход состоит в преобразовании системы к нормальной форме [6] и переходе к дифференцированию по новой независимой переменной [1, 2]. Для этого модель записывают в новых переменных, называемых путевыми координатами, которые напрямую связаны с заданной траекторией и определяют возможные отклонения от заданного пути [3, 10].

Для аффинных систем с векторным управлением известны условия приводимости к каноническому [4] или квазиканоническому [7] видам, с использованием которых возможно как нахождение программного управления, так и построение нелинейной обратной связи, обеспечивающей стабилизацию движения вдоль заданной кривой. Например, в [5] для мобильного робота с автомобильной компоновкой колес было получено описание функций, по которым модель преобразуется к квазиканоническому виду.

Колесные роботы относятся к классу неголономных систем, которые, как известно, не могут быть стабилизированы в окрестности положения равновесия непрерывно дифференцируемой стационарной обратной связью по состоянию [8]. Однако задача стабилизации движения вдоль заданной кривой формулируется как задача стабилизации по части переменных, поэтому использование стационарной обратной связи оказывается возможным.

Исследуем приводимость модели колесного робота с дифференциальным приводом к квазиканоническому виду, определим все возможные функции, позволяющие его получить, на основе этого вида решим задачу стабилизации движения вдоль заданного пути.

1. Кинематическая модель двухколесного робота

Робот состоит из абсолютно твердой платформы и соосной колесной системы с дифференциальным приводом колес (рис. 1). Предполагается, что колеса находятся в точечном контакте с поверхностью и движутся без проскальзывания.

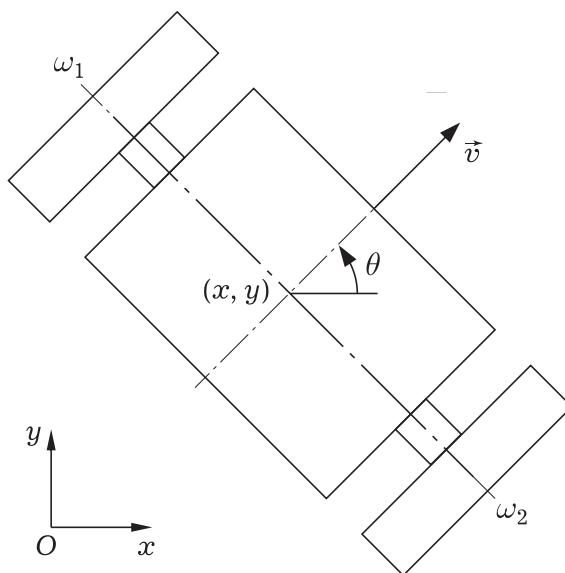


Рис. 1. Колесный робот

В качестве переменных состояния колесного робота рассмотрим следующие величины:
 x, y — координаты базовой точки робота (середина оси вращения колес) в земной неподвижной системе координат xOy ;

ϑ — угол между вектором скорости робота и положительным направлением оси Ox ;

ω_1, ω_2 — угловые скорости вращения левого и правого колес соответственно.

Кинематическая модель робота имеет вид [9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = R \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cos \vartheta, \\ \dot{y} = R \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \frac{R}{L} (\omega_1 - \omega_2), \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Линейная скорость v движения робота связана с угловыми скоростями вращения колес соотношением

$$v = R \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

а угловая скорость вращения платформы вокруг вертикальной оси —

$$w = \frac{R}{L}(\omega_1 - \omega_2).$$

Последние два уравнения в (1) можно опустить, поскольку они не используются при управлении движением робота. С учетом этого в новых обозначениях модель запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \vartheta, \\ \dot{y} = v \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = w. \end{cases} \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу выведения робота на заданную кривую и движение по ней с постоянной скоростью $v = \text{const} > 0$. В этом случае система (2) имеет одно управление — w .

2. Преобразование системы к квазиканоническому виду

В рамках дифференциально-геометрического подхода [4] системе (2) в \mathbb{R}^3 можно поставить во взаимно-однозначное соответствие гладкие векторные поля A и B , которые в координатах $X = (x, y, \vartheta)^T$ имеют вид

$$A(X) = \begin{pmatrix} v \cos \vartheta \\ v \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следуя [7], найдем максимальный индекс приводимости к квазиканоническому виду. Векторное поле B постоянно и не равно нулю \mathbb{R}^3 . Следовательно, распределение $F_1 = \text{span}(B)$ регулярно и инволютивно \mathbb{R}^3 .

Перейдем к анализу распределения $F_2 = \text{span}(B, \text{ad}_A B)$ и найдем

$$\text{ad}_A B(X) = \begin{pmatrix} v \sin \vartheta \\ -v \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} B(X) & \text{ad}_A B(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \sin \vartheta \\ 0 & -v \cos \vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен двум для любой точки $X \in \mathbb{R}^3$, распределение F_2 регулярно. Для анализа инволютивности распределения F_2 вычислим координаты векторного поля

$$G(X) = [B, ad_A B](X) = \begin{pmatrix} v \cos \vartheta \\ v \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

и сформируем функциональную матрицу

$$\begin{pmatrix} B(X) & ad_A B(X) & G(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \sin \vartheta & v \cos \vartheta \\ 0 & -v \cos \vartheta & v \sin \vartheta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Поскольку ранг матрицы (3) равен 3 для любой точки $X \in \mathbb{R}^3$, распределение F_2 не является инволютивным. Процесс поиска инволютивного и регулярного распределения, имеющего размерность $r < 3$, завершен — искомым распределением является F_1 .

Поскольку ранг матрицы (3) равен 3 в любой точке $X \in \mathbb{R}^3$, то $ad_A B(X) \notin F_1$. Следовательно, у системы (2) в окрестности любой точки X существует регулярный квазиканонический вид с индексом приводимости $r = 2$.

Пусть целевая кривая задается уравнениями $x_s = x_s(s)$, $y_s = y_s(s)$, где s — натуральный параметр кривой. Обозначим через ϑ_s угол наклона касательного вектора τ к опорной кривой, через d — расстояние от базовой точки робота до целевой траектории, через ψ — угол между вектором скорости платформы и касательным вектором к целевой траектории в ближайшей к роботу точке.

Запишем систему в путевых координатах. Для этого сделаем следующую замену переменных [3]:

$$\begin{cases} x = x_s - y'_s d, \\ y = y_s + x'_s d, \\ \vartheta = \psi + \vartheta_s. \end{cases} \quad (4)$$

Замена переменных (4) является диффеоморфизмом из некоторой окрестности Σ опорной кривой, где любая точка $(x, y) \in \Sigma$ имеет единственную ближайшую точку на опорной кривой и выполняется условие $1 - k(s)d \neq 0$, в образ области Σ при отображении (4). Здесь $k(s)$ — кривизна целевой кривой.

В новых координатах система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{v \cos \psi}{1 - k(s)d}, \\ \dot{d} = v \sin \psi, \\ \dot{\psi} = \frac{vk(s) \cos \psi}{k(s)d - 1} + w, \end{cases} \quad (5)$$

а векторные поля A и B запишутся следующим образом:

$$A(z) = \begin{pmatrix} \frac{v \cos \psi}{1 - k(s)d} \\ v \sin \psi \\ \frac{vk(s) \cos \psi}{k(s)d - 1} \end{pmatrix}, \quad B(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений для нахождения первых интегралов распределения F_1 . Она состоит из одного уравнения $B\varphi(z) = 0$, имеющего вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0. \quad (6)$$

Система (6) имеет два функционально независимых интеграла: s и d . В качестве ее решения можно брать функции вида $\gamma(s, d)$, где γ — произвольная гладкая функция двух переменных.

Для стабилизации движения вдоль заданного пути целесообразно в качестве переменной z_1 выбрать расстояние до целевой кривой: $z_1 = \varphi(s, d) = d$. Тогда $z_2 = \dot{z}_1 = v \sin \psi$. В качестве η необходимо выбрать функционально независимую с z_1 и z_2 функцию. Например, положим $\eta = s$. В результате замена переменных $(z_1, z_2, \eta) = \Phi(d, \psi, s)$, преобразующая систему (5) в окрестности опорной кривой к квазиканоническому виду, имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = d, \\ z_2 = v \sin \psi, \\ \eta = s. \end{cases} \quad (7)$$

Обратная замена переменных $(d, \psi, s) = \Phi^{-1}(z_1, z_2, \eta)$ имеет вид:

$$\begin{cases} d = z_1, \\ \psi = \arcsin \frac{z_2}{v}, \\ s = \eta. \end{cases} \quad (8)$$

При $v > 0$ прямая и обратная замены задаются гладкими функциями на всей своей области определения. Якобиан отображения Φ отличен от нуля при $\psi \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Можно видеть, что Φ является диффеоморфизмом некоторой окрестности опорной кривой на соответствующий образ.

Дифференцируя z_2 в силу системы (5), получим

$$\dot{z}_2 = v \cos \psi \dot{\psi} = \left(\frac{v^2 \cos^2 \psi k(s)}{k(s)d - 1} + wv \cos \psi \right)_{(d,\psi,s)=\Phi^{-1}(z_1,z_2,\eta)} = k(\eta) \frac{v^2 - z_2^2}{k(s)d - 1} + w \sqrt{v^2 - z_2^2}.$$

Получен регулярный квазиканонический вид системы (5):

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = k(\eta) \frac{v^2 - z_2^2}{k(s)d - 1} + w \sqrt{v^2 - z_2^2}, \\ \dot{\eta} = \frac{\sqrt{v^2 - z_2^2}}{1 - k(\eta)z_1}, \end{cases} \quad (9)$$

определенный в некоторой окрестности опорной кривой.

3. Стабилизация движения по заданному пути

Исследуем нулевую динамику [6] системы (9). Она имеет вид

$$\dot{\eta}|_{z=0} = v = \text{const},$$

что соответствует движению по целевой кривой с постоянной скоростью v .

Линеаризуем систему (9) обратной связью

$$w = \frac{\sqrt{v^2 - z_2^2}}{1 - k(\eta)z_1} k(\eta) - \frac{C_1 z_1 + C_2 z_2}{\sqrt{v^2 - z_2^2}}$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные.

Тогда исходные управления ω_1, ω_2 запишутся следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{2v + w}{2R}, \quad \omega_2 = \frac{2v - w}{2R}.$$

4. Примеры

Стабилизация движения по окружности. Пусть целевая траектория — единичная окружность $x(s) = \cos(s), y(s) = \sin(s)$ с центром в начале координат. Начальное положение примем $(x_0, y_0, \vartheta_0) = (2, -2, \frac{\pi}{2})$.

На рис. 2–5 приведены графики, показывающие, что задача стабилизации успешно решается с использованием приведенного алгоритма.

Стабилизация движения по прямой. Пусть целевая траектория — прямая $x(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}, y(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Начальное положение примем $(x_0, y_0, \vartheta_0) = (2, -2, \frac{\pi}{2})$.

На рис. 6–9 приведены графики изменения координат на плоскости, расстояния до прямой и модуля скорости от времени. Видно, что задача стабилизации успешно решена.

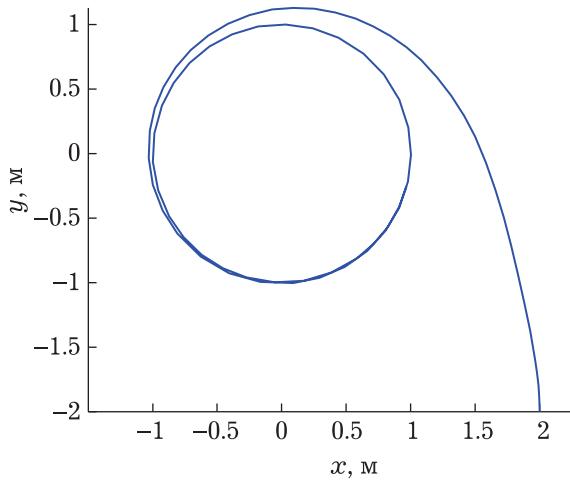


Рис. 2. Траектория движения робота на плоскости, случай движения по окружности

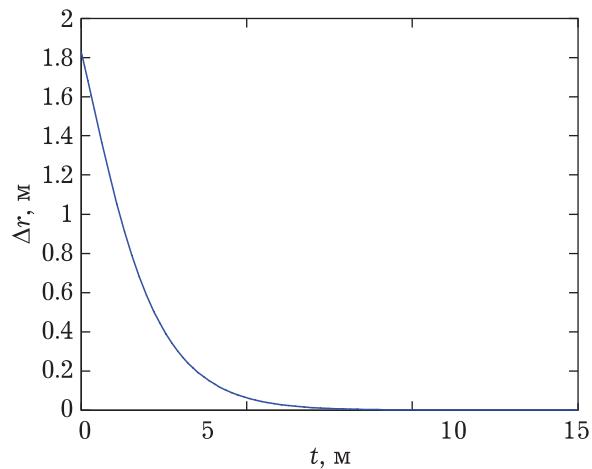


Рис. 3. Зависимость от времени расстояния Δr до целевой траектории

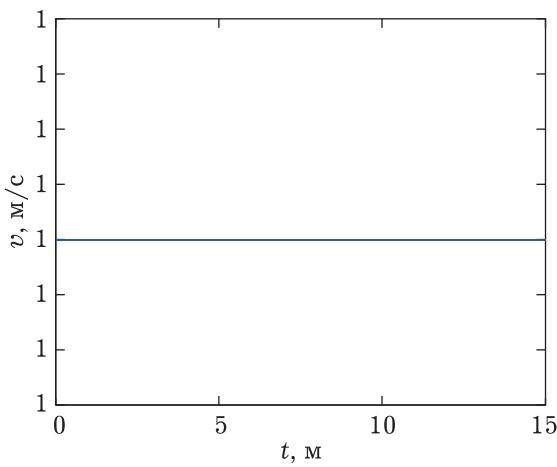


Рис. 4. Зависимость от времени модуля вектора скорости v робота

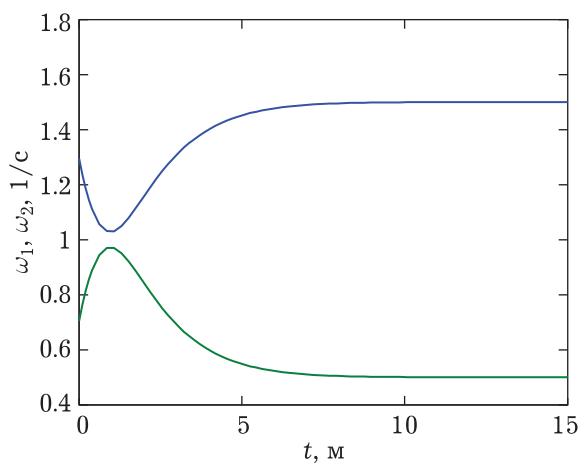


Рис. 5. Зависимость от времени угловых скоростей ω_1, ω_2 колес робота

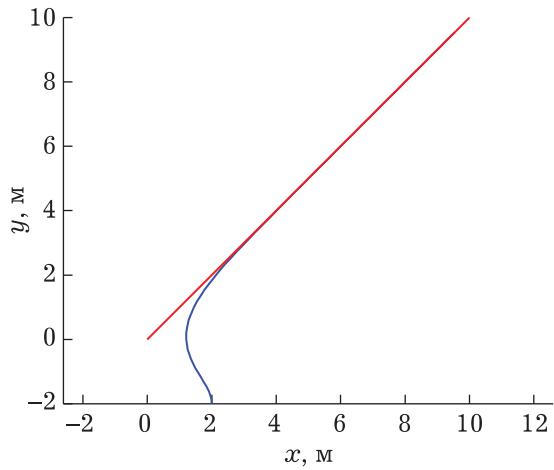


Рис. 6. Траектория движения робота на плоскости, случай движения по прямой

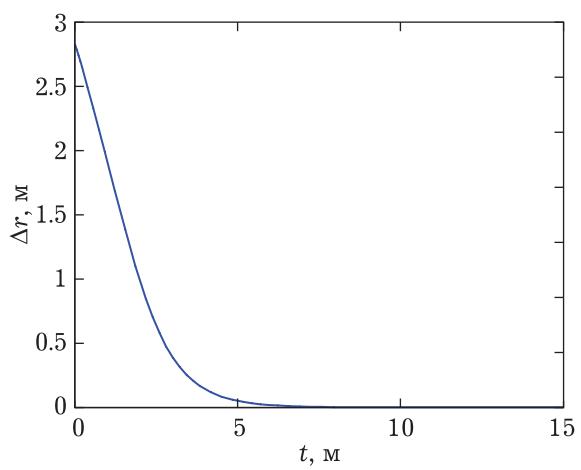


Рис. 7. Зависимость от времени расстояния Δr до целевой траектории

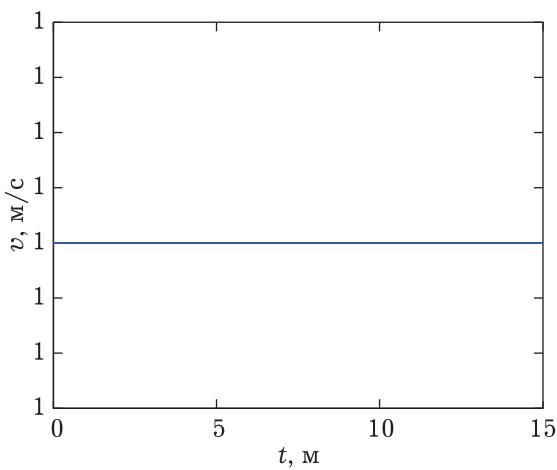


Рис. 8. Зависимость от времени модуля вектора скорости v робота

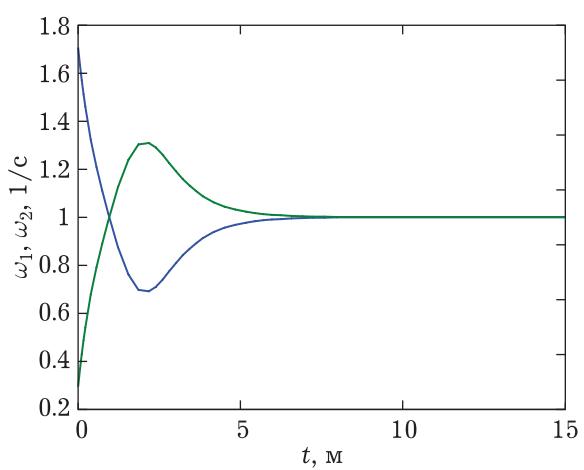


Рис. 9. Зависимость от времени угловых скоростей ω_1, ω_2 колес робота

Заключение

Исследована приводимость модели двухколесного робота с дифференциальным приводом к квазиканоническому виду, определены все возможные функции, позволяющие его получить. С использованием расстояния до целевой кривой получена нормальная форма системы. На основе этого вида с помощью линеаризации обратной связью решена задача стабилизации движения вдоль заданного пути. Проведено компьютерное моделирование системы с полученным управлением для частных случаев вида предписанной кривой: окружности и прямой. Результаты моделирования подтверждают работоспособность управления.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-00329.

Список литературы

1. Андрианова О.Г. Моделирование движения колесного робота по заданному пути // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/239840.html> (дата обращения: 20.02.2013).
2. Гилимьянов Р.Ф., Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Управление движением колесного робота в задаче следования вдоль криволинейного пути // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. Т. 47, № 6. С. 158–165.
3. Канатников А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 7. DOI: 10.7463/0712.0445496.
4. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2005. 520 с.
5. Ткачев С.Б. Реализация движения колесного робота по заданной траектории // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 2. С. 33–55.
6. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с векторным управлением // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 8. DOI: 10.7463/0812.0450613.
7. Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Преобразование аффинных систем со скалярным управлением к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. № 1. С. 3–16.
8. Brockett R.W. Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential Geometric Control Theory. USA, Boston: Birkhauser, 1983. P. 181–191.
9. Robot Motion Planning and Control / J.-P. Laumond (Ed.). Springer Berlin Heidelberg. 1998. 343 p. (Lectures Notes in Control and Information Sciences; vol. 229.) DOI: 10.1007/BFb0036069.
10. Morin P., Samson C. Motion Control of Wheeled Mobile Robots // Springer Handbook of Robotics / B. Siciliano, O. Khatib (Eds.). Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 799-826. DOI: 10.1007/978-3-540-30301-5_35.

Movement stabilization along the given path for the two-wheeled robot with a differential drive

04, April 2013

DOI: [10.7463/0413.0547786](https://doi.org/10.7463/0413.0547786)

Nefedov G. A.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
mastergrig90@gmail.com

The author considers the problem of movement stabilization along the given path for a two-wheeled robot with a differential drive. Wheeled robots belong to the class of non-holonomic systems, which, as it is generally known, cannot be stabilized in the vicinity of the equilibrium position of a continuously differentiable stationary state feedback. But the task of stabilizing the motion along the given curve is formulated only for part of the variables, so that the use of stationary feedback is possible. The robot model was transformed into a quasi-canonical form, all possible functions which allow one to obtain it were determined. The normal form for the system was built with the use of the distance to the target curve; its zero dynamics was investigated. On the basis of this form the problem of movement stabilization along the path was solved with the use of feedback linearization. The results of computer modeling are presented for particular cases: a circle and a line.

References

1. Andrianova O.G. Modelirovanie dvizheniya kolesnogo robota po zadannomu puti [Path following simulation of wheeled vehicle]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 10. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/239840.html>, accessed 20.02.2013.
2. Gilim'ianov R.F., Pesterev A.V., Rapoport L.B. Upravlenie dvizheniem kolesnogo robota v zadache sledovaniia vdol' krivolineinogo puti [Motion control for a wheeled robot following a curvilinear path]. *Izv. RAN. Teoriia i sistemy upravleniia*, 2008, vol. 47, no. 6, pp. 158–165. (Trans. version: Journal of Computer and Systems Sciences International, 2008, vol. 47, no. 6, pp. 987–994.)

3. Kanatnikov A.N., Kasatkina T.S. Osobennosti perekhoda k putevym koordinatam v zadache putevoi stabilizatsii [Features of transition to path coordinates in a problem of path stabilization]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 7. DOI: 10.7463/0712.0445496.
4. Krasnoshchekchenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinyye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods for analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.
5. Tkachev S.B. Realizatsiia dvizheniiia kolesnogo robota po zadannoi traektorii [Realization of wheeled robot motion along specified trajectory]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2008, no. 2, pp. 33–55.
6. Tkachev S.B. Stabilizatsiia neminimal'no fazovykh affinnykh sistem s vektornym upravleniem [Stabilization of nonminimum-phase multi-input affine systems]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 8. DOI: 10.7463/0812.0450613.
7. Tkachev S.B., Shevliakov A.A. Preobrazovanie affinnykh sistem so skaliarnym upravleniem k kvazikanonicheskому виду [Conversion of affine systems with scalar control to quasi-canonical form]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2013, no. 1, pp. 3–16.
8. Brockett R.W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In book: Brockett R.W., Millman R.S., Sussman H.J., eds. *Differential Geometric Control Theory*. USA, Boston, Birkhauser, 1983, pp. 181–191.
9. Laumond J.-P., ed. *Robot Motion Planning and Control*. Springer Berlin Heidelberg, 1998. 343 p. (Ser. Lectures Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). DOI: 10.1007/BFb0036069.
10. Morin P, Samson C. Motion Control of Wheeled Mobile Robots. In book: Siciliano B., Khatib O., eds. *Springer Handbook of Robotics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 799–826. DOI: 10.1007/978-3-540-30301-5_35.