Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №5. С. 126–136.
DOI: 10.7463/0515.0775760
Представлена в редакцию: 07.05.2015
© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 536.2

Квазистационарное температурное поле двухслойного полупространства с подвижной границей

Власов П. А.[1,*], Волков И. К.[1]

*pvlx@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В связи с интенсивным внедрением в инженерную практику методов математического моделирования, наряду с вычислительными методами все большую значимость приобретают аналитические методы решения задач теории теплопроводности. Несмотря на естественную ограниченность области применимости аналитических методов, наблюдаемая тенденция обусловлена многими причинами. В частности, решения соответствующих задач, полученные в аналитически замкнутом виде, позволяют тестировать новые высокопроизводительные алгоритмы, проводить параметрический анализ температурного поля изучаемой системы и исследовать специфические особенности процесса ее формирования, формулировать и решать задачи оптимизации, а также изучать возможности упрощения используемой математической модели с сохранением ее адекватности изучаемому процессу. Основная цель проведенных исследований — представление в аналитически замкнутом виде решения задачи нахождения квазистационарного температурного поля системы, имитируемой изотропным полупространством, внешняя граница которого, обладающая изотропным покрытием постоянной толщины и находящаяся под воздействием стационарного теплового потока гауссовского типа, перемещается с постоянной скоростью параллельно самой себе.

Ключевые слова: температурное поле, полупространство, подвижная граница

Введение

В связи с интенсивным внедрением в инженерную практику методов математического моделирования, наряду с вычислительными методами все большую значимость приобретают аналитические методы решения задач теории теплопроводности [1, 2, 3, 4]. Несмотря на естественную ограниченность области применимости аналитических методов, наблюдаемая тенденция обусловлена многими причинами. В частности, решения соответствующих задач, полученные в аналитически замкнутом виде, позволяют тестировать новые высокопроизводительные алгоритмы [4, 5, 6, 7], проводить параметрический анализ температурного поля изучаемой системы и исследовать специфические особенности процесса

ее формирования, формулировать и решать задачи оптимизации, а также исследовать возможности упрощения используемой математической модели с сохранением ее адекватности изучаемому процессу [8, 9].

Трудности, которые должен преодолеть исследователь при получении в аналитически замкнутом виде решения той или иной задачи математической теории теплопроводности, хорошо известны [1, 2, 3, 4, 8]. Тем не менее они еще более усугубляются, если возникает необходимость учета влияния различных физико-химических и механических процессов, приводящих к изменению во времени границ изучаемого твердого тела. При этом проблематичность нахождения решений задач такого класса в аналитически замкнутом виде сохраняется даже в тех случаях, когда закон движения границы известен [10, 11].

Основная цель проведенных исследований — представление в аналитически замкнутом виде решения задачи нахождения квазистационарного температурного поля системы, имитируемой изотропным полупространством, внешняя граница которого, обладающая изотропным покрытием постоянной толщины и находящаяся под воздействием стационарного теплового потока гауссовского типа, перемещается с постоянной скоростью параллельно самой себе.

1. Исходные допущения и математическая модель

При построении математической модели процесса формирования температурного поля $T(r, z, t)$ изучаемой системы в фиксированной цилиндрической системе координат Orz будем предполагать выполненными следующие условия.

а) В начальный момент времени $t = 0$ температура в любой точке системы постоянна: $T(r, z, 0) \equiv T_0 = \mathrm{const}$;

б) закон движения границы изотропного полупространства является линейным, т.е. $z = vt$, где $v = \mathrm{const}$;

в) изотропное покрытие имеет постоянную во времени толщину h;

г) в системе «полупространство — покрытие» реализуются условия идеального теплового контакта [1, 2, 3];

д) стационарный тепловой поток, воздействующий на внешнюю поверхность покрытия в направлении оси Oz используемой системы координат, является осесимметричным и имеет интенсивность гауссовского типа с определяющими параметрами k^2 и q_0;

е) при любых фиксированных значениях $t > 0$ и $z \geqslant vt - h$ функционал $T(r, z, t)$ интегрируем с квадратом и весом r на полубесконечном интервале $[0; +\infty)$, т.е. принадлежит пространству $L_r^2[0; +\infty)$ [12];

ж) при любых фиксированных значениях $t > 0$ и $r \geqslant 0$ функционал $T(r, z, t)$ интегрируем с квадратом на полубесконечном интервале $[vt - h; +\infty)$, т.е. принадлежит пространству $L^2[vt - h; +\infty)$ [12];

з) при любых фиксированных значениях $r \geqslant 0$ и $z \geqslant vt - h$ функционал $T(r, z, t)$ является оригиналом интегрального преобразования Лапласа [2] по временно́му переменному t, т.е. принадлежит пространству $\mathcal{L}[0, +\infty)$.

Принятие допущений а)–д) приводит к следующей математической модели изучаемого процесса, представляющей собой смешанную задачу для системы уравнений в частных производных параболического типа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial Z^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad Z > V\mathrm{Fo}, \quad \mathrm{Fo} > 0; \\ \alpha^2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial Z^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad V\mathrm{Fo} - \varepsilon < Z < V\mathrm{Fo}, \quad \mathrm{Fo} > 0; \\ \vartheta(\rho, Z, \mathrm{Fo})\Big|_{\mathrm{Fo}=0} \equiv 0; \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial Z}\Big|_{Z=V\mathrm{Fo}-\varepsilon} = -Q_0\exp(-K^2\rho^2); \\ \vartheta(\rho, V\mathrm{Fo} - 0, \mathrm{Fo}) = \vartheta(\rho, V\mathrm{Fo} + 0, \mathrm{Fo}); \\ \Lambda\dfrac{\partial\vartheta}{\partial Z}\Big|_{Z=V\mathrm{Fo}-0} = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial Z}\Big|_{Z=V\mathrm{Fo}+0}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_0}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{\lambda t}{c\gamma l^2}; \quad \rho = \frac{r}{l}; \quad Z = \frac{z}{l}; \quad \alpha^2 = \frac{c^*\gamma^*\lambda}{c\gamma\lambda^*};$$

$$Q_0 = \frac{q_0 k^2 l}{\pi T_0 \lambda^*}; \quad K = kl; \quad \varepsilon = \frac{h}{l}; \quad \Lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda}; \quad V = \frac{c\gamma l v}{\lambda};$$

l — используемая единица масштаба пространственных переменных; λ, c, γ — значения коэффициента теплопроводности Фурье, удельной теплоемкости и плотности материала соответственно. Индекс «$*$» относится к теплофизическим характеристикам покрытия. Кроме того, допущения е)–з) приводят к условиям

$$\begin{cases} \vartheta(\cdot\,, Z, \mathrm{Fo}) \in L^2_\rho[0, +\infty), \quad Z \geqslant V\mathrm{Fo} - \varepsilon, \quad \mathrm{Fo} \geqslant 0, \\ \vartheta(\rho, \cdot\,, \mathrm{Fo}) \in L^2[V\mathrm{Fo} - \varepsilon, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad \mathrm{Fo} \geqslant 0, \\ \vartheta(\rho, Z, \cdot\,) \in \mathcal{L}[0, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad Z \geqslant V\mathrm{Fo} - \varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Переход к стандартной подвижной системе координат

$$X = Z - V\mathrm{Fo}, \quad \tau = \mathrm{Fo} \tag{3}$$

позволяет привести исходную математическую модель (1) к следующему виду, более удобному для ее практического использования:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial X^2} + V\dfrac{\partial\vartheta}{\partial X}, \quad \rho \geqslant 0, \quad X > 0, \quad \tau > 0; \\ \alpha^2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial X^2} + \alpha^2 V\dfrac{\partial\vartheta}{\partial X}, \quad \rho \geqslant 0, \quad -\varepsilon < X < 0, \quad \tau > 0; \\ \vartheta(\rho, X, \tau)\Big|_{\tau=0} \equiv 0; \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial X}\Big|_{X=-\varepsilon} = -Q_0\exp(-K^2\rho^2); \\ \vartheta(\rho, 0-0, \tau) = \vartheta(\rho, 0+0, \tau); \\ \Lambda\dfrac{\partial\vartheta}{\partial X}\Big|_{X=0-0} = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial X}\Big|_{X=0+0}. \end{cases} \tag{4}$$

При этом условия (2) примут вид

$$\begin{cases} \vartheta(\cdot\,, X, \tau) \in L^2_\rho[0, +\infty), \quad X \geqslant -\varepsilon, \quad \tau \geqslant 0, \\ \vartheta(\rho, \cdot\,, \tau) \in L^2[-\varepsilon, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0, \\ \vartheta(\rho, X, \cdot\,) \in \mathcal{L}[0, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad X \geqslant -\varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

Следует заметить, что согласно математической модели (4) в подвижной системе координат (3) процесс формирования температурного поля изучаемой области представляет собой композицию кондуктивного и конвективного теплопереноса [8]. Первый из них реализует диффузионный «перенос тепла», поступающего в систему при воздействии внешнего теплового потока, от внешней границы покрытия к периферии изотропного полупространства, а второй — конвективный «перенос холода» от периферии изотропного полупространства к внешней границе его покрытия в направлении вектора внешней нормали к ней. Поскольку скорость V этого переноса является постоянной, а мощность внешнего теплового потока также не зависит от времени, то из физических соображений становится очевидным существование искомого квазистационарного поля.

2. Температурное поле

Условия (5) позволяют последовательно применить к смешанной задаче (4) сначала интегральное преобразование Ганкеля нулевого порядка [12] по пространственному переменному ρ

$$H_0[\vartheta] \equiv \int\limits_0^{+\infty} \vartheta(\rho)\rho J_0(p\rho)\,d\rho, \quad H_0^{-1}[\varkappa] \equiv \int\limits_0^{+\infty} \varkappa(p)pJ_0(p\rho)\,dp, \tag{6}$$

а затем — интегральное преобразование Лапласа [1, 2] по временно́му переменному τ. Полагая

$$A(p, X, \tau) = H_0[\vartheta(\rho, X, \tau)], \tag{7}$$

$$B(p, X, s) = L[A(p, X, \tau)], \tag{8}$$

где L — оператор прямого преобразования Лапласа, и используя свойства интегральных преобразований Ганкеля и Лапласа [1, 2, 3, 12] вкупе с таблицами «изображение-оригинал» [13], приходим к задаче для определения изображения $B(p, X, s)$:

$$\frac{d^2B}{dX^2} + V\frac{dB}{dX} - (s + p^2)B = 0, \quad X > 0; \tag{9}$$

$$\frac{d^2B}{dX^2} + \alpha^2 V\frac{dB}{dX} - (\alpha^2 s + p^2)B = 0, \quad -\varepsilon < X < 0; \tag{10}$$

$$\left.\frac{dB}{dX}\right|_{X=-\varepsilon} = -\frac{Q_0}{2K^2 s}\exp\Big(-\frac{p^2}{4K^2}\Big); \tag{11}$$

$$B(p, 0-0, s) = B(p, 0+0, s); \tag{12}$$

$$\Lambda\left.\frac{dB}{dX}\right|_{X=0-0} = \left.\frac{dB}{dX}\right|_{X=0+0}, \tag{13}$$

где в соответствии с предположениями (5) должно выполняться условие

$$B(p, \cdot\,, s) \in L^2[-\varepsilon, +\infty), \quad p \in \mathbb{R}^+,\ s \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

которое также играет роль граничного условия в бесконечности.

С учетом ограничения (14) решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (9)–(10) может быть найдено стандартными методами [14]:

$$B(p, X, s) = C_0(p, s)\exp\Big\{-\Big[\frac{V}{2} + \sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big]X\Big\}, \quad X > 0; \tag{15}$$

$$B(p, X, s) = C_1(p, s)\exp\Big\{-\Big[\alpha^2\frac{V}{2} + \sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big]X\Big\} + \\ + C_2(p, s)\exp\Big\{-\Big[\alpha^2\frac{V}{2} - \sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big]X\Big\}, \quad -\varepsilon < X < 0, \tag{16}$$

где функционалы $\delta(p, s)$ и $\Delta(p, s)$ определены равенствами

$$\delta(p, s) = s + p^2 + \frac{V^2}{4}, \quad \Delta(p, s) = \alpha^2 s + p^2 + \frac{\alpha^4 V^2}{4}, \tag{17}$$

а функционалы $C_j(p, s)$, $j = \overline{0,\,2}$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений, отвечающих граничному условию (11), условиям сопряжения (12), (13) и представлению (15)–(16) изображения $B(p, X, s)$:

$$\begin{cases} \Big[\alpha^2\frac{V}{2} + \sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big]\exp\Big(\varepsilon\sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big)C_1(p, s) + \\ \qquad + \Big[\alpha^2\frac{V}{2} - \sqrt{\Delta(p, s)}\Big]\exp\Big(-\varepsilon\sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big)C_2(p, s) = \dfrac{Q_0}{2K^2 s}\exp\Big[-\dfrac{p^2}{4K^2} - \dfrac{\alpha^2 V\varepsilon}{2}\Big]; \\ C_1(p, s) + C_2(p, s) = C_0(p, s); \\ \Lambda\Big\{\Big[\alpha^2\frac{V}{2} + \sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big]C_1(p, s) + \Big[\alpha^2\frac{V}{2} - \sqrt{\Delta(p, s)}\,\Big]C_2(p, s)\Big\} = \\ \qquad\qquad = \Big[\dfrac{V}{2} + \sqrt{\delta(p, s)}\,\Big]C_0(p, s). \end{cases} \tag{18}$$

При этом с учетом второго уравнения системы (18) ее третье уравнение может быть преобразовано к следующему виду:

$$C_1(p,s) - C_2(p,s) = D(p,s)C_0(p,s), \tag{19}$$

где использовано обозначение

$$D(p,s) = \frac{(1-\Lambda\alpha^2)V/2 + \sqrt{\delta(p,s)}}{\Lambda\sqrt{\Delta(p,s)}}. \tag{20}$$

Воспользовавшись вторым уравнением системы (18) и уравнением (19), находим, что

$$C_j(p,s) = \frac{1-(-1)^j D(p,s)}{2}, \qquad j = \overline{1,\,2}, \tag{21}$$

и для завершения процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений (18) достаточно воспользоваться ее первым уравнением и равенствами (21). Таким образом,

$$C_0(p,s) = \frac{1}{s}\varphi(p,s), \tag{22}$$

где

$$\varphi(p,s) = \frac{\dfrac{Q_0}{K^2}\,\exp\Bigl[-\dfrac{p^2}{4K^2} - \Bigl(\alpha^2\dfrac{V}{2} + \sqrt{\Delta(p,s)}\Bigr)\varepsilon\Bigr]}{\Bigl(\alpha^2 V + 2\sqrt{\Delta(p,s)}\,\Bigr)\Bigl(1+D(p,s)\Bigr)\Bigl[1+\mathcal{D}(p,s)\exp\Bigl(-2\varepsilon\sqrt{\Delta(p,s)}\,\Bigr)\Bigr]}, \tag{23}$$

$$\mathcal{D}(p,s) = \frac{\alpha^2 V - 2\sqrt{\Delta(p,s)}}{\alpha^2 V + 2\sqrt{\Delta(p,s)}}\,\frac{1-D(p,s)}{1+D(p,s)}, \tag{24}$$

и в изображениях композиции интегрального преобразования (6) и преобразования Лапласа температурное поле объекта исследований полностью определено равенствами (15)–(17), (21), (20), (22), (23), (24).

При обсуждении специфики математической модели (4) был сделан вывод о существовании квазистационарного температурного поля изучаемой области, под которым понимается ее стационарное температурное поле в подвижной системе координат (3). С учетом этого факта и предельной теоремы интегрального преобразования Лапласа [1] с использованием представления (8) имеем:

$$A(p,X,+\infty) = \lim_{s\to 0} sB(p,X,s) \equiv B(p,X,0), \tag{25}$$

где функция $B(p,X,0)$ определена равенствами (15)–(17), (21), (20),

$$C_0(p,s) \equiv \varphi(p,s) \tag{26}$$

и (23), (24) при $s = 0$.

Таким образом, согласно (7) и (6), в подвижной системе координат (3) искомое температурное поле может быть представлено в виде

$$\vartheta(\rho, X, +\infty) = \int\limits_0^{+\infty} A(p, X, +\infty) p J_0(p\rho)\, dp, \tag{27}$$

где изображение $A(p, X, +\infty)$ определено равенствами (25), (15)–(17), (21), (20), (26) и (23), (24) при $s = 0$.

Заключение

С использованием интегральных преобразований Лапласа и Ганкеля нулевого порядка в аналитически замкнутом виде получено решение задачи нахождения квазистационарного температурного поля изотропного полупространства, граница которого, перемещающаяся параллельно самой себе с постоянной скоростью, имеет изотропное покрытие постоянной толщины, которое с внешней стороны подвержено воздействию стационарного теплового потока гауссовского типа.

Список литературы

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М.: Изд-во МАИ, 2010. 308 с.
5. Nechepurenko Y.M., Ovchinnikov G.V. An estimation of voltage settling time for RC circuits // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2010. Vol. 25, no. 3. P. 253–259.
6. Olshevsky V., Tyrtyshnikov E., Zlobich P. Tellegen's principle, non-minimal realizations of systems and inversion of polynomial Vandermonde matricies // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, no. 2. P. 131–154.
7. Bella T., Olshevsky V., Zlobich P. A quasiseparable approach to five-diagonal CMV and Fiedler matricies // Linear Algebra and its Applications. 2011. Vol. 434, no. 4. P. 957–976.
8. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
9. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Иерархия математических моделей процесса формирования температурного поля в системе «изотропная пластина — термоактивная

прокладка — анизотропное покрытие» // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5, № 5. С. 224–228.

10. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Известия РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.
11. Kartashov E.M., Lyubov B.Ya. Analitic Methods in Solving Boundary Value Problems of Heat Conduction in a Region with Moving Boundaries // Heat Transfer — Soviet Research. 1976. Vol. 8, no. 2. P. 1–39.
12. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970. 328 с.
14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2015, no. 5, pp. 126–136.
DOI: **10.7463/0515.0775760**
Received: 07.05.2015
© Bauman Moscow State Technical University

Quasi-Stationary Temperature Field of Two-Layer Half-Space with Moving Boundary

Vlasov P.A.[1,*], **Volkov I.K.**[1]

[*]pvlx@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: temperature field, half-space, moving boundary

Due to intensive introduction of mathematical modeling methods into engineering practice, analytical methods for solving problems of heat conduction theory along with computational methods become increasingly important. Despite the well-known limitations of the analytical method applicability, this trend is caused by many reasons. In particular, solutions of the appropriate problems presented in analytically closed form can be used to test the new efficient computational algorithms, to carry out a parametric study of the temperature field of the analyzed system and to explore specific features of its formation, to formulate and solve optimization problems. In addition, these solutions allow us to explore the possibility for simplifying mathematical model with retaining its adequacy to the studied process.

The main goal of the conducted research is to provide an analytically closed-form solution to the problem of finding the quasi-stationary temperature field of the system, which is simulated by isotropic half-space with isotropic coating of constant thickness. The outer boundary of this system is exposed to the Gaussian-type heat flux and uniformly moves in parallel with itself.

A two-dimensional mathematical model that takes into account the axial symmetry of the studied process has been used. After the transition to a moving coordinate system rigidly associated with a moving boundary the Hankel integral transform of zero order (with respect to the radial variable) and the Laplace transform (with respect to the temporal variable) were used. Next, the image of the Hankel transform for the stationary temperature field of the system with respect to the moving coordinate system was found using a limit theorem of operational calculus. This allowed representing the required quasi-stationary field in the form of an improper integral of the first kind, which depends on the parameters. This result obtained can be used to conduct a parametric study and solve for optimization problems.

References

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford University Press, 1959. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).
2. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).
3. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytic methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985. 553 p. (in Russian).
4. Formaljov V.F., Kuznetsova E.L. *Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and mass transfer in anisotropic solids under aerogasdynamic heating]. Moscow, MAI Publ., 2010. 308 p. (in Russian).
5. Nechepurenko Y.M., Ovchinnikov G.V. An estimation of voltage settling time for RC circuits. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2010, vol. 25, no. 3, pp. 253–259.
6. Olshevsky V., Tyrtyshnikov E., Zlobich P. Tellegen's principle, non-minimal realizations of systems and inversion of polynomial Vandermonde matricies. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2012, vol. 27, no. 2, pp. 131–154.
7. Bella T., Olshevsky V., Zlobich P. A quasiseparable approach to five-diagonal CMV and Fiedler matricies. *Linear Algebra and its Applications*, 2011, vol. 434, no. 4, pp. 957–976.
8. Pudovkin M.A., Volkov I.K. *Kraevye zadachi matematicheskoi teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polei v neftyanykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary-value problems of mathematical theory of heat conduction in the annex to the calculations of temperature fields in oil reservoirs during flooding]. Kazan, Kazan University Publ., 1978. 188 p. (in Russian).
9. Attetkov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S. The Hierarchy of Mathematical Models of the Process of Temperature Field Formation in the System "Plane Isotropic Wall — Thermal Active Layer — Anisotropic Coating". *Teplovye protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*, 2013, no. 5, pp. 224–228. (in Russian).
10. Kartashov E.M. Analytical Methods of Solution of Boundary Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in Regions with Moving Boundaries. *Proceedings of the RAS. Power engineering*, 1999, no. 5, pp. 3–34. (in Russian).
11. Kartashov E.M., Lyubov B.Ya. Analitic Methods in Solving Boundary Value Problems of Heat Conduction in a Region with Moving Boundaries. *Heat Transfer — Soviet Research*, 1976, vol. 8, no. 2, pp. 1–39.

12. Koshliakov N.S., Gleaner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970. 712 p. (in Russian).
13. Erdelyi A., ed. *Tables of integral transforms. Vol. 2. Based, in part, on notes left by Harry Bateman*. McGraw-Hill, 1954. (Bateman Manuscript Project). (Russ. ed.: Bateman H., Erdelyi A. *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy. T. 2. Preobrazovaniya Besselya. Integraly ot spetsial'nykh funktsiy*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 328 p.).
14. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p. (in Russian).