

УДК 519.6

Динамическая модель манипулятора платформенного типа с шестью степенями свободы

Лапиков А. Л.^{1,*}, Пащенко В. Н.¹,
Середин П. В.², Артемьев А. В.²

* anton.lapikov@inbox.ru

¹КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия

²Филиал ФГУП "НПО им. С.А. Лавочкина", Калуга, Россия

В статье рассмотрены актуальные вопросы, связанные с построением динамических моделей манипуляторов платформенного типа с шестью степенями свободы. Существующие динамические модели платформенных механизмов, наиболее известным примером которых является платформа Гю-Стьюарта, подробно описывают динамику подвижной платформы механизма, в то время как динамикой приводящих штанг зачастую пренебрегается. Кроме того, при выводе моделей для подобных механизмов остро стоит вопрос выбора обобщенных координат, поскольку зачастую связь между обобщенными координатами и положением выходного звена механизма представляется неявной зависимостью. Предложенная в работе модель, во-первых, описывается только явными зависимостями, что позволяет исключить необходимость численного дифференцирования при выводе соотношений и, во-вторых, учитывает динамику штанг механизма и ранее внесенные кинематические модификации.

Ключевые слова: динамическая модель, манипуляторы параллельной кинематики, платформа Гю-Стьюарта, гексапод

Введение

При проектировании технологического оборудования на основе механизмов параллельной кинематики и синтеза систем управления для него крайне необходима точная динамическая модель. Построение динамической модели параллельного манипулятора весьма затруднительно из-за замкнутой кинематической структуры, взаимовлияния параметров, нелинейности динамических и кинематических ограничений системы. Сложная кинематика и динамика системы приводят к необходимости упрощения модели, что в свою очередь ведет к уменьшению точности.

Динамическая модель используется для решения следующих задач:

- прямая задача динамики: по заданным траектории движения, скоростям и ускорениям рабочего органа определить силы в приводных кинематических парах.

– обратная задача динамики: по заданным силам/моментам в приводных кинематических парах определить траекторию, скорости и ускорения рабочего органа.

Классический метод вывода динамической модели замкнутой кинематической цепи состоит в рассмотрении эквивалентной древовидной структуры и ограничений, накладываемых на систему, посредством множителей Лагранжа или принципа Даламбера [1], применимость которого доказана в [2]. Другие подходы основаны на применении теории винтов [3] принципа виртуальной работы [4,5], формализма Лагранжа [6,7], выводе уравнений Ньютона-Эйлера [8-11].

Метод Ньютона-Эйлера требует вычисления всех действующих на звенья сил и моментов. Например, исследование динамической модели гексапода было представлено Дасгуптой и Мрутхьюнджайей. В своей работе они выявили уравнения динамики для платформы Стюарта с шестью универсальными призматическо-шарнирными штангами (6-УПШ) в рабочем пространстве и пространстве конфигураций на основе подхода Ньютона-Эйлера. Выведенные динамические уравнения были применены для решения прямой и обратной задач динамики платформы Стюарта; результаты моделирования показали, что данная модель полностью отражает динамику платформы Стюарта. Более того, результаты данной работы продемонстрировали эффективность метода Ньютона-Эйлера для механизмов параллельной структуры и указали эффективный способ вывода динамических уравнений на основе данного подхода [12]. Этот метод был также применен Халилом и Ибрагимом [13]. Они продемонстрировали простое общее аналитическое решение для прямой и обратной задач динамики роботов параллельной структуры.

Хариб и Шринивасан выполнили анализ кинематики и динамики основанных на платформе Стюарта механизмов с обратной и прямой кинематикой, сингулярностью, прямой и обратной динамикой [11]. Для вывода уравнений динамики твердого тела ими был использован метод Ньютона-Эйлера. До и Ян [10], а также Ребуле и Бертомье [14] представили динамическую модель гексапода на основе метода Ньютона-Эйлера. Они предложили несколько упрощений модели штанг. Метод был также использован в работах Го и Ли [15], Карвальо и Чеккарелли [16], Рибе и Ульбриха [17].

Другим подходом к выводу динамической модели платформы Стюарта является метод Лагранжа. Данный метод используется для описания динамики системы через понятия работы и энергии. Абделлатиф и Хайманн выявили наглядную точную систему дифференциальных уравнений, описывающих задачу обратной динамики статически неопределенного манипулятора параллельной структуры с шестью степенями свободы. Они продемонстрировали, что вывод наглядной, вычислительно эффективной модели, не требующей упрощений, возможен при использовании формализма Лагранжа [18]. Ли и Шах вывели обратную динамическую модель в пространстве конфигурации для манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы на основе формализма Лагранжа. Кроме того, ими был представлен численный пример отслеживания винтовой траектории для демонстрации влияния динамики связей на требуемое значение силы привода [19].

Иногда формализмы смешиваются: например, Занганех [20] использует одновременно формализмы Лагранжа и Ньютона-Эйлера. Го и Ли вывели наглядные компактные аналитические уравнения платформы Стюарта с шестью степенями свободы с призматическими приводами, используя комбинированный метод на основе формализма Ньютона-Эйлера и Лагранжа [15]. Чтобы подтвердить предложенное описание, ими были изучены численные методы, использованные в других работах. Результаты моделирования показали, что возможен вывод наглядных динамических уравнений для манипулятора на основе платформы Стюарта при использовании комбинации методов Ньютона-Эйлера и Лагранжа. Лебрэ и его соавторы изучали динамические уравнения манипулятора на основе платформы Стюарта. Динамическая модель была представлена в виде пошагового алгоритма [7].

Важнейшим вопросом при решении задач динамики является вычислительная сложность, так как, хотя теоретически все формализмы эквивалентны [21], их вычислительная сложность существенно различается.

Анализируя работы, представленные по данной тематике, отметим, что в связи с рядом кинематических допущений и ограничений использование большинства ранее предложенных динамических моделей манипуляторов платформенного типа малоэффективно для создания динамических моделей многосекционных механизмов параллельной кинематики. В связи с этим, в качестве цели данной работы обозначим создание динамической модели платформенного манипулятора с шестью степенями свободы, учитывающей модификации, внесенные в кинематическую модель в работе [22].

1. Постановка задачи

Рассматриваемый в данной работе механизм (рис. 1) состоит из подвижной платформы, моделируемой круглым тонким диском. Диск соединяется штангами с неподвижным основанием. Штанги рассматриваются как стержни, способные изменять свою длину. Согласно дополнениям, внесенным в кинематику механизма в работе [22], крепление штоков к основанию и диску осуществляется в точках $A_i, i = \overline{1..6}$ и $B_i, i = \overline{1..6}$ соответственно, отстоящих от плоскостей основания и диска на некоторую величину. Подразумевается, что крепление штоков к основанию осуществляется с помощью шарниров Гука, а к платформе - с помощью сферических шарниров.

Для однозначного описания любой модели были определены следующие параметры:

- 1) радиус описанной окружности шестиугольника основания R ;
- 2) угловая координата первого шарнира основания φ_b ;
- 3) обобщенный параметр расстояния от плоскости основания до оси вращения в шарнирах основания h_b ;
- 4) радиус описанной окружности шестиугольника подвижной платформы r ;
- 5) угловая координата первого шарнира подвижной платформы φ_{mp} ;

- б) обобщенный параметр расстояния от плоскости подвижной платформы до оси вращения в шарнирах подвижной платформы h_{mp} .

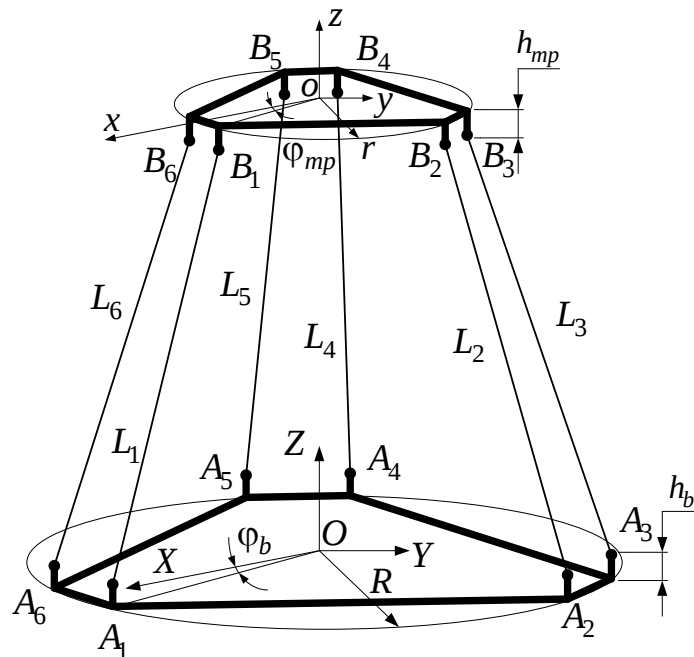


Рис. 1. Структура платформенного манипулятора

Ставится следующая задача: разработать математическое описание динамики манипулятора платформенного типа с шестью степенями свободы, учитывающее модификации, внесенные в кинематическую модель в работе [22].

2. Предлагаемая модель

Вывод математического описания механической системы платформенного манипулятора является важным этапом разработки системы управления. Обычно подобная модель включает в себя соотношения кинематики, выражающие координаты схвата в неподвижной системе координат через обобщенные координаты манипулятора, и динамики, связывающие обобщенные координаты с действующими на систему движущими и противодействующими силами.

Выберем систему координат $OXYZ$ с началом в центре шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ в качестве неподвижной; подвижную систему координат $oxyz$ свяжем с центром платформы.

Для вывода уравнений динамики механической системы воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, Q_i – обобщенная сила.

В качестве обобщенных координат для записи уравнения динамики выберем элементы вектора $[x_o \ y_o \ z_o \ \alpha \ \beta \ \gamma]$, где x_o, y_o, z_o – декартовы координаты центра подвижной платформы в неподвижной системе координат, а α, β, γ – углы поворота осей подвижной системы координат относительно неподвижной на углы прецессии, нутации и собственного вращения. Переобозначим однородные координаты следующим образом

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad q_4 = \alpha, \quad q_5 = \beta, \quad q_6 = \gamma.$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех ее звеньев. Во многих работах, например [23, 24], придерживаются допущения о невесомости штанг, и, как следствие, их влияние на кинетическую энергию системы не учитывается. Поскольку в настоящей работе не было принято допущение о невесомости штанг, кинетическая энергия системы представляется следующим образом:

$$T = T_{pl} + \sum_{i=1}^6 \tilde{T}_i, \quad (2)$$

где T_{pl} – кинетическая энергия платформы, $\tilde{T}_i$ – кинетическая энергия штанги.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщенные координаты. Кинетическая энергия подвижной платформы будет складываться из двух составляющих: кинетической энергии движения центра масс диска и кинетической энергии вращения относительно центра масс. Обозначим через M массу платформы, а через J_x, J_y, J_z главные центральные моменты инерции диска относительно осей подвижной системы координат. Тогда выражение для кинетической энергии платформы примет вид

$$T_{pl} = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) \quad (3)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – составляющие вектора мгновенной угловой скорости подвижной платформы.

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера для выражения компонентов вектора мгновенной угловой скорости платформы через обобщенные координаты

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(q_5) \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 \\ \sin(q_5) \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ \cos(q_5) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим динамику штанг. При вычислении кинетической энергии данного элемента примем следующие допущения:

- 1) кинетическая энергия вращения штанги вокруг центра масс значительно меньше кинетической энергии движения центра масс штанги и при расчете учитываться не будет;

- 2) при вычислении линейной скорости центра масс каждой штанги составляющей, определяемой угловой скоростью вращения штанги в шарнире A_i , пренебрегаем в связи с малостью.

С учетом принятых допущений кинетическая энергия штанги примет вид

$$\tilde{T}_i = \frac{1}{2} m \dot{L}_i^2, i = \overline{1..6}, \quad (4)$$

где m – масса штанги, $\dot{L}_i$ – скорость раздвижения штанги.

Для вычисления скорости раздвижения штанги рассмотрим рис. 2.

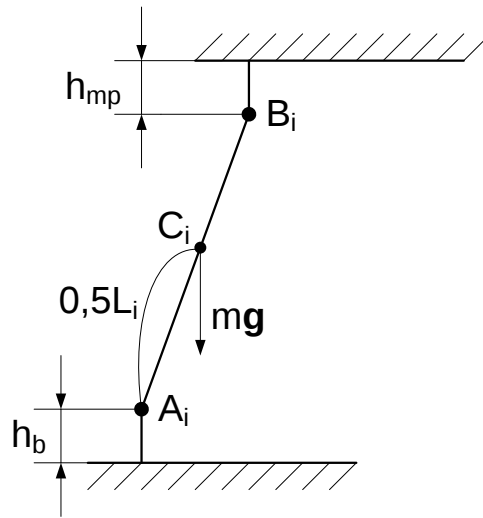


Рис. 2. К вычислению кинетической энергии штанги

Необходимую величину длины штанги нетрудно выразить через обобщенные координаты посредством кинематических ограничений, накладываемых на механизм. При выражении длин штанг через однородные координаты используем аппарат однородных преобразований. Запишем однородные координаты шарниров основания в неподвижной системе координат

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3 \quad \mathbf{A}_4 \quad \mathbf{A}_5 \quad \mathbf{A}_6],$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R c(\varphi_b) & R c\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi_b\right) & R c\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi_b\right) & R c\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi_b\right) & R c\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi_b\right) & R c(-\varphi_b) \\ R s(\varphi_b) & R s\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi_b\right) & R s\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi_b\right) & R s\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi_b\right) & R s\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi_b\right) & R s(-\varphi_b) \\ h_b & h_b & h_b & h_b & h_b & h_b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

где $s(\alpha) = \sin(\alpha)$, $c(\alpha) = \cos(\alpha)$. Аналогичным образом получим соотношения для однородных координат шарниров платформы в подвижной системе координат

$$\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\mathbf{B}}_1 \quad \tilde{\mathbf{B}}_2 \quad \tilde{\mathbf{B}}_3 \quad \tilde{\mathbf{B}}_4 \quad \tilde{\mathbf{B}}_5 \quad \tilde{\mathbf{B}}_6],$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi_{mp}) & r \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi_{mp}\right) & r \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi_{mp}\right) & r \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi_{mp}\right) & r \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi_{mp}\right) & r \cos(-\varphi_{mp}) \\ r \sin(\varphi_{mp}) & r \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi_{mp}\right) & r \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi_{mp}\right) & r \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \varphi_{mp}\right) & r \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi_{mp}\right) & r \sin(-\varphi_{mp}) \\ -h_{mp} & -h_{mp} & -h_{mp} & -h_{mp} & -h_{mp} & -h_{mp} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Переход из подвижной системы координат в неподвижную в общем случае описывается матрицей однородного преобразования следующего вида

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11}(q_4, q_5, q_6) & t_{12}(q_4, q_5, q_6) & t_{13}(q_4, q_5) & t_{14}(q_1) \\ t_{21}(q_4, q_5, q_6) & t_{22}(q_4, q_5, q_6) & t_{23}(q_4, q_5) & t_{24}(q_2) \\ t_{31}(q_5, q_6) & t_{32}(q_5, q_6) & t_{33}(q_5) & t_{34}(q_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где составляющие матрицы выражаются через однородные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \cos(q_4)\cos(q_6) - \sin(q_4)\cos(q_5)\sin(q_6), & t_{13} &= \sin(q_4)\sin(q_5), \\ t_{12} &= -\cos(q_4)\sin(q_6) - \sin(q_4)\cos(q_5)\cos(q_6), & t_{14} &= q_1, \\ t_{21} &= \sin(q_4)\cos(q_6) + \cos(q_4)\cos(q_5)\sin(q_6), & t_{23} &= -\cos(q_4)\sin(q_5), \\ t_{22} &= -\sin(q_4)\sin(q_6) + \cos(q_4)\cos(q_5)\cos(q_6), & t_{24} &= q_2, \\ t_{31} &= \sin(q_5)\sin(q_6), & t_{32} &= \sin(q_5)\cos(q_6), \\ t_{33} &= \cos(q_5), & t_{34} &= q_3. \end{aligned}$$

Однородные координаты шарниров подвижной платформы в неподвижной системе координат могут быть вычислены

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}$$

Выполним операцию матричного умножения и в общем виде получим выражение зависимости координат шарниров подвижной платформы от вектора обобщенных координат

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

где элементы матрицы с учетом незначительных тригонометрических преобразований равны

$$\begin{aligned} b_{11} &= r \cos(\varphi_{mp})t_{11} + r \sin(\varphi_{mp})t_{12} - h_{mp}t_{13} + t_{14}, \\ b_{21} &= r \cos(\varphi_{mp})t_{21} + r \sin(\varphi_{mp})t_{22} - h_{mp}t_{23} + t_{24}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{31} &= r \cos(\varphi_{mp}) t_{31} + r \sin(\varphi_{mp}) t_{32} - h_{mp} t_{33} + t_{34}, \\
b_{12} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{11} + r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{12} - h_{mp} t_{13} + t_{14}, \\
b_{22} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{21} + r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{22} - h_{mp} t_{23} + t_{24}, \\
b_{32} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{31} + r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{32} - h_{mp} t_{33} + t_{34}, \\
b_{13} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{11} + r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{12} - h_{mp} t_{13} + t_{14}, \\
b_{23} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{21} + r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{22} - h_{mp} t_{23} + t_{24}, \\
b_{33} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{31} + r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{32} - h_{mp} t_{33} + t_{34}, \\
b_{14} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{11} - r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{12} - h_{mp} t_{13} + t_{14}, \\
b_{24} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{21} - r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{22} - h_{mp} t_{23} + t_{24}, \\
b_{34} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{31} - r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_{mp}\right) t_{32} - h_{mp} t_{33} + t_{34}, \\
b_{15} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{11} - r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{12} - h_{mp} t_{13} + t_{14}, \\
b_{25} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{21} - r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{22} - h_{mp} t_{23} + t_{24}, \\
b_{35} &= -r \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{31} - r \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi_{mp}\right) t_{32} - h_{mp} t_{33} + t_{34}, \\
b_{16} &= r \cos(\varphi_{mp}) t_{11} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{12} - h_{mp} t_{13} + t_{14}, \\
b_{26} &= r \cos(\varphi_{mp}) t_{21} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{22} - h_{mp} t_{23} + t_{24}, \\
b_{36} &= r \cos(\varphi_{mp}) t_{31} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{32} - h_{mp} t_{33} + t_{34}.
\end{aligned}$$

Вычислим искомые величины длин штанг, как евклидово расстояние между точками A_i и B_i

$$L_i = \sqrt{(A_{1,i} - B_{1,i})^2 + (A_{2,i} - B_{2,i})^2 + (A_{3,i} - B_{3,i})^2}, \quad i = \overline{1..6}. \quad (5)$$

В связи с большим объемом выкладок здесь и далее будем приводить полученные соотношения только для первой штанги

$$L_1 = \sqrt{\left(R \cos(\varphi_b) - r \cos(\varphi_{mp}) t_{11} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{12} + h_{mp} t_{13} - t_{14}\right)^2 + \left(R \sin(\varphi_b) - r \cos(\varphi_{mp}) t_{21} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{22} + h_{mp} t_{23} - t_{24}\right)^2 + \left(h_b - r \cos(\varphi_{mp}) t_{31} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{32} + h_{mp} t_{33} - t_{34}\right)^2}.$$

Для вычисления величины скорости движения центра масс каждой штанги продифференцируем соотношение (5) по времени. Отметим, что величина длины штанги явно не зависит от времени. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, получим следующее выражение

$$\dot{L}_j = \frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right)}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2}}. \quad (6)$$

Поскольку элементы матрицы **B** зависят только от части вектора обобщенных координат, то в вычислении всех частных производных нет необходимости. Так, например, соотношение (6) для вычисления $\dot{L}_1$ может быть упрощено следующим образом

$$\dot{L}_1 = \frac{\left(\left(R \cos(\varphi_b) - r \cos(\varphi_{mp}) t_{11} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{12} + h_{mp} t_{13} - t_{14} \right) \times \left(-r \cos(\varphi_{mp}) \sum_{i=4}^6 \frac{\partial t_{11}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} - r \sin(\varphi_{mp}) \sum_{i=4}^6 \frac{\partial t_{12}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + h_{mp} \sum_{i=4}^5 \frac{\partial t_{13}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial t_{14}}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} \right) + \left(R \sin(\varphi_b) - r \cos(\varphi_{mp}) t_{21} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{22} + h_{mp} t_{23} - t_{24} \right) \times \left(-r \cos(\varphi_{mp}) \sum_{i=4}^6 \frac{\partial t_{21}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} - r \sin(\varphi_{mp}) \sum_{i=4}^6 \frac{\partial t_{22}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + h_{mp} \sum_{i=4}^5 \frac{\partial t_{23}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial t_{24}}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} \right) + \left(h_b - r \cos(\varphi_{mp}) t_{31} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{32} + h_{mp} t_{33} - t_{34} \right) \times \left(-r \cos(\varphi_{mp}) \sum_{i=5}^6 \frac{\partial t_{31}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} - r \sin(\varphi_{mp}) \sum_{i=5}^6 \frac{\partial t_{32}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + h_{mp} \frac{\partial t_{33}}{\partial q_5} \frac{\partial q_5}{\partial t} - \frac{\partial t_{34}}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial t} \right) \right)}{\sqrt{\left(R \cos(\varphi_b) - r \cos(\varphi_{mp}) t_{11} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{12} + h_{mp} t_{13} - t_{14}\right)^2 + \left(R \sin(\varphi_b) - r \cos(\varphi_{mp}) t_{21} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{22} + h_{mp} t_{23} - t_{24}\right)^2 + \left(h_b - r \cos(\varphi_{mp}) t_{31} - r \sin(\varphi_{mp}) t_{32} + h_{mp} t_{33} - t_{34}\right)^2}}$$

Подставив величину скорости (6) в выражение (4), получим соотношение для вычисления кинетической энергии штанги

$$\tilde{T}_j = \frac{1}{8} m \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2}. \quad (7)$$

Таким образом, полная кинетическая энергия механической системы платформенного манипулятора, описанная выражением (2), с учетом (3) и (7) примет вид

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} \left(J_x (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5)^2 + J_y (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5)^2 + J_z (\cos(q_5) \dot{q}_4 + \dot{q}_6)^2 \right) + \frac{1}{8} m \sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \quad (8)$$

Вычислим необходимые производные кинетической энергии:

- производную (8) по обобщенной скорости $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= M\dot{q}_1 + \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= M\dot{q}_2 + \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= M\dot{q}_3 + \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} &= J_x \sin(q_5) \sin(q_6) (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) + \\
&J_y \sin(q_5) \cos(q_6) (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) + \\
&+ J_z \cos(q_5) (\cos(q_5) \dot{q}_4 + \dot{q}_6) + \\
&+ \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_4} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \right) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_5} &= J_x \cos(q_6) (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) + \\
&J_y \sin(q_6) (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) + \\
&+ \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_5} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \right) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_6} &= J_z (\cos(q_5) \dot{q}_4 + \dot{q}_6) + \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_6} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

- производную по времени от производной кинетической энергии по обобщенной скорости $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= M \ddot{q}_1 + \frac{1}{8} m \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \right) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= M \ddot{q}_2 + \frac{1}{8} m \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = M\ddot{q}_3 + \frac{1}{8} m \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} = & J_x \cos(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_5 (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) + \\ & + J_y \cos(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_5 (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) + \\ & + J_x \sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_6 (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) - \\ & - J_y \sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_6 (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) - \\ & - J_z \sin(q_5) \dot{q}_5 (\cos(q_5) \dot{q}_4 + \dot{q}_6) + \\ & + J_x \sin(q_5) \sin(q_6) \left(\cos(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_6 - \right. \\ & \left. - \sin(q_6) \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \sin(q_5) \sin(q_6) \ddot{q}_4 + \cos(q_6) \ddot{q}_5 \right) + \\ & + J_y \sin(q_5) \cos(q_6) \left(\cos(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_5 - \sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_6 - \right. \\ & \left. - \cos(q_6) \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \sin(q_5) \cos(q_6) \ddot{q}_4 - \sin(q_6) \ddot{q}_5 \right) + \\ & + J_z \cos(q_5) (-\sin(q_5) \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \cos(q_5) \ddot{q}_4 + \ddot{q}_6) + \\ & + \frac{1}{8} m \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_4} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_5} = & -J_x \sin(q_6) \dot{q}_6 (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) + \\ & + J_y \cos(q_6) \dot{q}_6 (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) + \\ & + J_x \cos(q_6) \left(\cos(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_6 - \right. \\ & \left. - \sin(q_6) \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \sin(q_5) \sin(q_6) \ddot{q}_4 + \cos(q_6) \ddot{q}_5 \right) + \\ & + J_y \sin(q_6) \left(\cos(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_5 - \sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 \dot{q}_6 - \right. \\ & \left. - \cos(q_6) \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \sin(q_5) \cos(q_6) \ddot{q}_4 - \sin(q_6) \ddot{q}_5 \right) + \\ & + \frac{1}{8} m \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_5} \left(\frac{\sum_{j=1}^6 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_6} = J_z \left(-\sin(q_5) \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \cos(q_5) \ddot{q}_4 + \ddot{q}_6 \right) +$$

$$+ \frac{1}{8} m \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_6} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right)$$

- производную (8) по обобщенной координате $\frac{\partial T}{\partial q_i}$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right), i = \overline{1..4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_5} = J_x \cos(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) +$$

$$+ J_y \cos(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) -$$

$$- J_z \sin(q_5) \dot{q}_4 (\cos(q_5) \dot{q}_4 + \dot{q}_5) +$$

$$+ \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial q_5} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_6} = J_x (\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 + \cos(q_6) \dot{q}_5) (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) +$$

$$+ J_y (-\sin(q_5) \sin(q_6) \dot{q}_4 - \cos(q_6) \dot{q}_5) (\sin(q_5) \cos(q_6) \dot{q}_4 - \sin(q_6) \dot{q}_5) +$$

$$+ \frac{1}{8} m \frac{\partial}{\partial q_6} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right),$$

Теперь приступим к выражению обобщенных сил Q_i через обобщенные координаты q_i . Рассмотрим силы, действующие на систему, и радиус-векторы точек их приложения:

- на подвижную платформу действует сила тяжести $\mathbf{P}$, приложенная в точке;
- на каждую из штанг действует сила тяжести $\tilde{\mathbf{P}}_i$, приложенная в точке;

- приложенные к точкам B_i и направленные вдоль соответствующих штанг силы $\mathbf{F}_i, i = \overline{1..6}$.

Векторы сил, действующих на систему, представим в следующем виде:

$$\mathbf{P} = (0 \quad 0 \quad -Mg), \quad \tilde{\mathbf{P}}_i = (0 \quad 0 \quad -mg), i = \overline{1..6}, \quad \mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_i, i = \overline{1..6},$$

где $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор, направленный вдоль оси i -ой штанги и равный $\mathbf{e}_i = \frac{|\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i|}{\|A_i B_i\|}$.

Составим выражение работы на элементарных перемещениях. Работа каждой силы будет равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения:

$$\delta A = \mathbf{P} \delta \mathbf{r}_M + \sum_{i=1}^6 \tilde{\mathbf{P}}_i \delta \mathbf{r}_{C_i} + \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_{B_i},$$

где $\delta \mathbf{r}_{B_i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}_{B_i}}{\partial q_j} \delta q_j, i = \overline{1..6}$, а $\delta \mathbf{r}_{C_i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}_{C_i}}{\partial q_j} \delta q_j, i = \overline{1..6}$.

Подставив величины действующих сил в выражение работы и обозначив компоненты вектора $\mathbf{r}_{B_i}$ через x_i, y_i, z_i , а компоненты вектора $\mathbf{F}_i$ через F_i^x, F_i^y, F_i^z , найдем значения обобщенных сил:

$$Q_j = \sum_{i=1}^6 \left(F_i^x \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_i^y \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_i^z \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), j = 1, 2, 4, 5, 6,$$

$$Q_3 = -(M + 6m)g + \sum_{i=1}^6 \left(F_i^x \frac{\partial x_i}{\partial q_3} + F_i^y \frac{\partial y_i}{\partial q_3} + F_i^z \frac{\partial z_i}{\partial q_3} \right).$$

Подставляя полученные выражения производных кинетической энергии и обобщенных сил в (1) получим систему динамических уравнений рассматриваемой механической системы.

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику механической системы, можно по заданным законам изменения управляющих сил $F_i = F_i(t), i = \overline{1..6}$ найти закон изменения обобщенных координат $q_i = q_i(t), i = \overline{1..6}$ и наоборот.

3. Численный пример

Рассмотрим следующий пример. Пусть параметры модели равны:

$$R = 1(\text{м}), \quad \varphi_b = \frac{\pi}{10}(\text{рад}), \quad h_b = 0,1(\text{м}),$$

$$r = 0,8(\text{м}), \quad \varphi_{mp} = \frac{\pi}{10}(\text{рад}), \quad h_{mp} = 0,1(\text{м}),$$

$$M = 20(\text{кг}), \quad m = 1(\text{кг}), \quad g = 9,8 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

Прямая задача динамики (определение закона изменения обобщенных координат по известным законам изменения управляющих сил) платформенных механизмов имеет простое аналитическое решение [24], поэтому рассматриваться не будет.

Рассмотрим решение обратной задачи динамики механизма. Зададим следующие законы изменения управляющих сил:

$$F_i = 50 \sin(t), i = \overline{1..6}. \quad (9)$$

Для данной задачи получение аналитического решения сопряжено с большим объемом необходимых преобразований и в общем случае затруднительно. В связи с этим будем искать решение численно с использованием встроенных численных методов пакета *Mathematica*. Для этого зададим необходимые начальные условия

$$\begin{aligned} q_1 = 0, & \quad q_2 = 0, & \quad q_3 = 140, & \quad q_4 = 0, & \quad q_5 = 0, & \quad q_6 = 0, \\ \dot{q}_1 = 0, & \quad \dot{q}_2 = 0, & \quad \dot{q}_3 = 0, & \quad \dot{q}_4 = 0, & \quad \dot{q}_5 = 0, & \quad \dot{q}_6 = 0. \end{aligned}$$

На рис. 3 и рис. 4 для заданного программного закона изменения управляющих сил (9) приведены результаты численного решения прямой задачи динамики платформенного манипулятора с шестью степенями свободы.

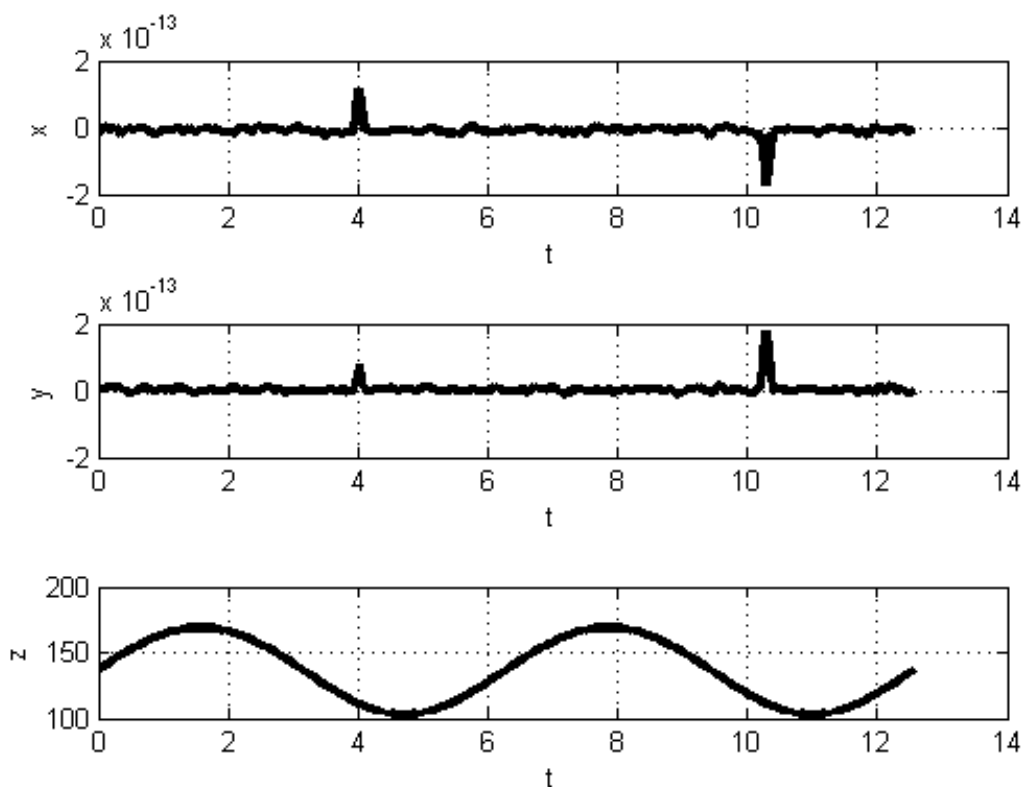


Рис. 3. Законы изменения обобщенных координат q_1, q_2, q_3

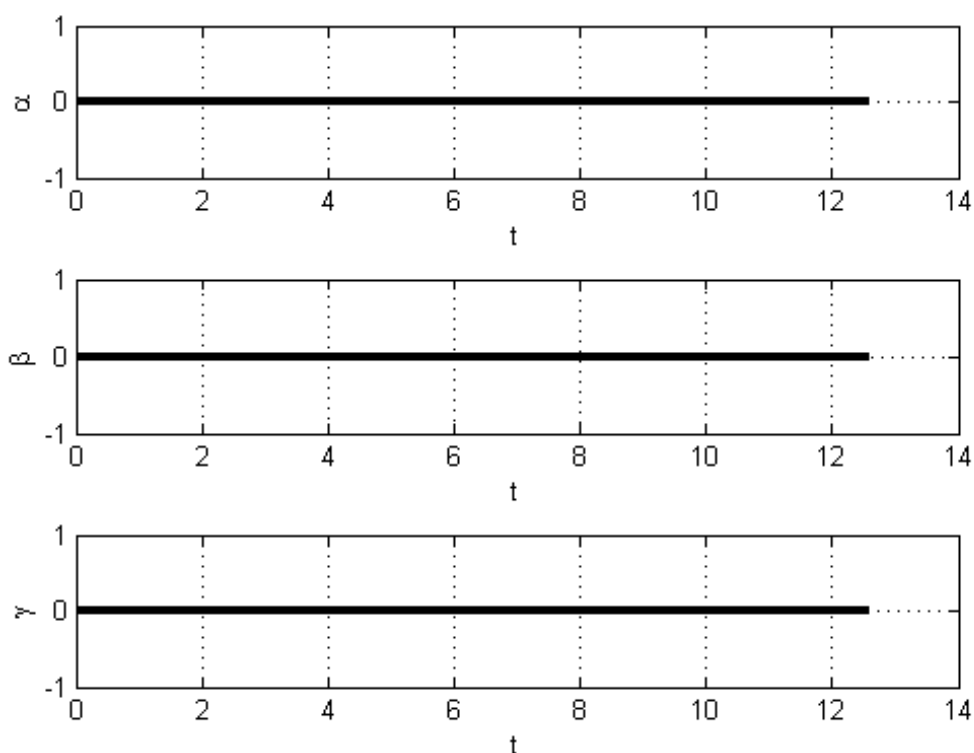


Рис. 4. Законы изменения обобщенных координат q_4, q_5, q_6

Как видно из графиков, платформа совершает поступательные гармонические колебания по обобщенной координате q_3 .

Заключение

В работе предлагается динамическая модель платформенного манипулятора с шестью степенями свободы. Отличительными особенностями полученной модели являются, во-первых, уточнение выражения кинетической энергии системы, за счет введения составляющих, описывающих энергию штанг, во-вторых, возможность в явном виде (а не численно) вычислять производные кинетической энергии в отличие от, например, [25]. В-третьих, использование модифицированных соотношений кинематики [22], что позволит существенно повысить точность при построении моделей многосекционных механизмов параллельной структуры.

В развитии работы планируется расширение функциональности модели для учета влияния полезной нагрузки и создание алгоритмов для построения динамической модели многосекционного манипулятора параллельной структуры.

Список литературы

1. Liu M.-J., Li C.-X., Li C.-N. Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 2000. Vol. 16, no. 1. P. 94-98. DOI: [10.1109/70.833196](https://doi.org/10.1109/70.833196)
2. Liu G.F., Wu X.Z. Inertia equivalence principle and adaptive control of redundant parallel manipulator // Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA '02). Vol. 1. IEEE Publ., 2002. P. 835-840. DOI: [10.1109/ROBOT.2002.1013461](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013461)
3. Gallardo J. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory // Mechanism and Machine Theory. 2003. Vol. 38, no. 11. p. 1113-1131. DOI: [10.1016/S0094-114X\(03\)00054-5](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00054-5)
4. Wang J., Gosselin C.M. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators // Multibody System Dynamics. 1998. Vol. 2, no. 3. P. 317-334. DOI: [10.1023/A:1009740326195](https://doi.org/10.1023/A:1009740326195)
5. Tsai L.-W. Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work // ASME Journal of Mechanical Design. 2000. Vol. 122, no. 1. P. 3–9. DOI: [10.1115/1.533540](https://doi.org/10.1115/1.533540)
6. Geng Z., Haynes L.S. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms // Robotics and Autonomous Systems. 1992. Vol. 9, no. 4. P. 237-254. DOI: [10.1016/0921-8890\(92\)90041-V](https://doi.org/10.1016/0921-8890(92)90041-V)
7. Liu K., Lewis F., Lebrete G., Taylor D. The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 1993. Vol. 8. P. 287-308. DOI: [10.1007/BF01257946](https://doi.org/10.1007/BF01257946)
8. Codourey A., Burdet E. A body oriented method for finding a linear form of the dynamic equations of fully parallel robots // Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Vol. 2. IEEE Publ., 1997. P. 1612-1618. DOI: [10.1109/ROBOT.1997.614371](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1997.614371)
9. Dasgupta B., Choudhury P. A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. 1999. Vol. 34, iss. 6. P. 801-824. DOI: [10.1016/S0094-114X\(98\)00081-0](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00081-0)
10. Do W.Q.D., Yang D.C.H. Invers Dynamic Analysis and Simulation of a Platform Type of Robot // Journal of Robotic Systems. 1988. Vol. 5, no. 3. P. 209-227. DOI: [10.1002/rob.4620050304](https://doi.org/10.1002/rob.4620050304)
11. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // Robotica. 2003. Vol. 21, no. 5. P. 541–554. DOI: [10.1017/S0263574703005046](https://doi.org/10.1017/S0263574703005046)
12. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Closed-Form Dynamic Equations of the General Stewart Platform through the Newton-Euler // Mechanism and Machine Theory. 1998. Vol. 33, no. 7. P. 993-1012. DOI: [10.1016/S0094-114X\(97\)00087-6](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00087-6)

13. Khalil W, Ibrahim O. General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2007. Vol. 49, iss. 1. P. 19-37. DOI: [10.1007/s10846-007-9137-x](https://doi.org/10.1007/s10846-007-9137-x)
14. Reboulet C., Berthomieu T. Dynamic Models of a Six Degree of Freedom Parallel Manipulators // Fifth International Conference on Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments' (91 ICAR). Vol. 2. IEEE Publ., 1991. P. 1153-1157. DOI: [10.1109/ICAR.1991.240400](https://doi.org/10.1109/ICAR.1991.240400)
15. Guo H., Li H. Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart platform manipulator // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2006. Vol. 220, no. 1. P. 61-72. DOI: [10.1243/095440605X32075](https://doi.org/10.1243/095440605X32075)
16. Carvalho J., Ceccarelli M. A Closed-Form Formulation for the Inverse Dynamics of a Cassino Parallel Manipulator // Multibody System Dynamics. 2001. Vol. 5, iss. 2. P. 185-210. DOI: [10.1023/A:1009845926734](https://doi.org/10.1023/A:1009845926734)
17. Riebe S., Ulbrich H. Modeling and online computation of the dynamics of a parallel kinematic with six degrees-of-freedom // Archive of Applied Mechanics. 2003. Vol. 72, iss. 11-12. P. 817-829. DOI: [10.1007/s00419-002-0262-5](https://doi.org/10.1007/s00419-002-0262-5)
18. Abdellatif H., Heimann B. Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism // Mechanism and Machine Theory. 2009. Vol. 44, iss. 1. P. 192-207. DOI: [10.1016/j.mechmachtheory.2008.02.003](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.02.003)
19. Lee K.-M., Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator // IEEE Journal of Robotics and Automation. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 354-360. DOI: [10.1109/56.796](https://doi.org/10.1109/56.796)
20. Zanganeh K.E., Sinatra R., Angeles J. Kinematics and dynamics of a six-degree-of-freedom parallel manipulator with revolute legs // Robotica. 1997. Vol. 15, no. 4. P. 385-394. DOI: [10.1017/S0263574797000477](https://doi.org/10.1017/S0263574797000477)
21. Yiu Y.-K. On the dynamics of parallel manipulators // Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (2001 ICRA). Vol. 4. IEEE Publ., 2001. P. 3766-3771. DOI: [10.1109/ROBOT.2001.933204](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2001.933204)
22. Лапиков А.Л., Пашенко В.Н., Масюк В.М. Модификация метода решения прямой задачи кинематики для класса платформенных манипуляторов с шестью степенями свободы // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 72-94. DOI: [10.7463/1114.0735505](https://doi.org/10.7463/1114.0735505)
23. Каганов Ю.Т., Карпенко А.П. Математическое моделирование кинематики и динамики робота-манипулятора типа «хобот». 2. математические модели секции манипулятора, как механизма параллельной кинематики типа «гексапод» // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 11. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/133731.html> (дата обращения 01.04.2015).

24. Зуев С.М. Стабилизация положений равновесия нагруженных модификаций платформы Стюарта: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2014. 115 с.
25. Смирнов В.А., Петрова Л.Н. Динамическая модель механизма параллельной кинематики // Вестник ЮУрГУ. Сер. Машиностроение. 2009. № 11. С. 50-56.

Dynamic Model of Platform Manipulator with Six Degrees of Freedom

A.L. Lapikov^{1,*}, V.N. Paschenko¹, P.V. Seredin²,
A.V. Artemev²

*anton.lapikov@inbox.ru

¹Kaluga Branch of the Bauman MSTU, Kaluga, Russia

²Branch "NPO n.a. S.A. Lavochkin", Kaluga, Russia

Keywords: dynamic model, parallel kinematics manipulators, Stewart-Gough platform, hexapod

The paper considers a solution of the relevant tasks related to deriving dynamic equations for the platform manipulators with 6 degrees of freedom. It presents a detailed analysis of the subject area, describes key problems arising in the course of research, and suggests their solution methods. The equations describing dynamics of the mechanical system under discussion were derived using Lagrange equation of the second kind. For this purpose Cartesian coordinates and three Euler angles (angles of precession, nutation and intrinsic rotation) describing the orientation of moving frame of reference connected with the platform towards the base were chosen as generalized coordinates of the model. Such choice allowed us to simplify the derivation of the model considerably, because it was possible to represent a dependence of kinetic energy of the mechanical system on the generalized coordinates in an explicit form. In addition, formulation of kinetic energy was supplemented with correlations describing kinetic energy of the mechanism legs. During the derivation of equations for the legs velocities the part of the component defining a rotation movement of the leg against the joint of the base was ignored because of it was small in comparison with the component of linear separation. Besides, during the derivation of equations for kinetic energy of the legs, modified correlations for kinematics of platform manipulators with 6 degrees of freedom suggested in the previous papers of the authors were used.

The paper examines a numerical example to solve a reverse dynamic problem in the case of equal harmonic changes of controlling forces. It was found out that under controlling forces described above the platform carries out harmonic advancing movements along the vertical axis.

Further planning research concerns the extended capabilities of the model to consider the influence of the working load and to create algorithms for deriving dynamic models of a multi-sectional manipulator with a parallel structure.

References

1. Liu M.-J., Li C.-X., Li C.-N. Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 2000, vol. 16, no. 1, pp. 94-98. DOI: [10.1109/70.833196](https://doi.org/10.1109/70.833196)
2. Liu G.F., Wu X.Z. Inertia equivalence principle and adaptive control of redundant parallel manipulator. *Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA '02)*. Vol. 1. IEEE Publ., 2002, pp. 835-840. DOI: [10.1109/ROBOT.2002.1013461](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013461)
3. Gallardo J. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, vol. 38, no. 11, pp. 1113-1131. DOI: [10.1016/S0094-114X\(03\)00054-5](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(03)00054-5)
4. Wang J., Gosselin C.M. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators. *Multibody System Dynamics*. 1998, vol. 2, no. 3, pp. 317-334. DOI: [10.1023/A:1009740326195](https://doi.org/10.1023/A:1009740326195)
5. Tsai L.-W. Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2000, vol. 122, no. 1, pp. 3-9. DOI: [10.1115/1.533540](https://doi.org/10.1115/1.533540)
6. Geng Z., Haynes L.S. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms. *Robotics and Autonomous Systems*, 1992, vol. 9, no. 4, pp. 237-254. DOI: [10.1016/0921-8890\(92\)90041-V](https://doi.org/10.1016/0921-8890(92)90041-V)
7. Liu K., Lewis F., Lebrete G., Taylor D. The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 1993, vol. 8, pp. 287-308. DOI: [10.1007/BF01257946](https://doi.org/10.1007/BF01257946)
8. Codourey A., Burdet E. A body oriented method for finding a linear form of the dynamic equations of fully parallel robots. *Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. Vol. 2. IEEE Publ., 1997, pp. 1612-1618. DOI: [10.1109/ROBOT.1997.614371](https://doi.org/10.1109/ROBOT.1997.614371)
9. Dasgupta B., Choudhury P. A general strategy based on the Newton-Euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, vol. 34, iss. 6, pp. 801-824. DOI: [10.1016/S0094-114X\(98\)00081-0](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00081-0)
10. Do W.Q.D., Yang D.C.H. Invers Dynamic Analysis and Simulation of a Platform Type of Robot. *Journal of Robotic Systems*, 1988, vol. 5, no. 3, pp. 209-227. DOI: [10.1002/rob.4620050304](https://doi.org/10.1002/rob.4620050304)
11. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures. *Robotica*, 2003, vol. 21, no. 5, pp. 541-554. DOI: [10.1017/S0263574703005046](https://doi.org/10.1017/S0263574703005046)
12. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Closed-Form Dynamic Equations of the General Stewart Platform through the Newton-Euler. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, vol. 33, no. 7, pp. 993-1012. DOI: [10.1016/S0094-114X\(97\)00087-6](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00087-6)

13. Khalil W, Ibrahim O. General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2007, vol. 49, iss. 1, pp. 19-37. DOI: [10.1007/s10846-007-9137-x](https://doi.org/10.1007/s10846-007-9137-x)
14. Reboulet C., Berthomieu T. Dynamic Models of a Six Degree of Freedom Parallel Manipulators. *Fifth International Conference on Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments' (91 ICAR)*. Vol. 2. IEEE Publ., 1991, pp. 1153-1157. DOI: [10.1109/ICAR.1991.240400](https://doi.org/10.1109/ICAR.1991.240400)
15. Guo H., Li H. Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart platform manipulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2006, vol. 220, no. 1, pp. 61-72. DOI: [10.1243/095440605X32075](https://doi.org/10.1243/095440605X32075)
16. Carvalho J., Ceccarelli M. A Closed-Form Formulation for the Inverse Dynamics of a Cassino Parallel Manipulator. *Multibody System Dynamics*, 2001, vol. 5, iss. 2, pp. 185-210. DOI: [10.1023/A:1009845926734](https://doi.org/10.1023/A:1009845926734)
17. Riebe S., Ulbrich H. Modeling and online computation of the dynamics of a parallel kinematic with six degrees-of-freedom. *Archive of Applied Mechanics*, 2003, vol. 72, iss. 11-12, pp. 817-829. DOI: [10.1007/s00419-002-0262-5](https://doi.org/10.1007/s00419-002-0262-5)
18. Abdellatif H., Heimann B. Computational efficient inverse dynamics of 6-DOF fully parallel manipulators by using the Lagrangian formalism. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, vol. 44, iss. 1, pp. 192-207. DOI: [10.1016/j.mechmachtheory.2008.02.003](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.02.003)
19. Lee K.-M., Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 354-360. DOI: [10.1109/56.796](https://doi.org/10.1109/56.796)
20. Zanganeh K.E., Sinatra R., Angeles J. Kinematics and dynamics of a six-degree-of-freedom parallel manipulator with revolute legs. *Robotica*, 1997, vol. 15, no. 4, pp. 385-394. DOI: [10.1017/S0263574797000477](https://doi.org/10.1017/S0263574797000477)
21. Yiu Y.-K. On the dynamics of parallel manipulators. *Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (2001 ICRA)*. Vol. 4. IEEE Publ., 2001, pp. 3766-3771. DOI: [10.1109/ROBOT.2001.933204](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2001.933204)
22. Lapikov A.L., Pashchenko V.N., Masyuk V.M. Modification of Method for Solution of Direct Kinematic Problem for the Type of Platform Manipulators with Six Degrees of Freedom. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 11, pp. 72-94. DOI: [10.7463/1114.0735505](https://doi.org/10.7463/1114.0735505) (in Russian).
23. Kaganov Yu.T., Karpenko A.P. Kinematics and dynamics mathematical modeling of a “trunk” robot-manipulator. 2. Mathematical models of the manipulator section as the type “hexapod” parallel mechanism. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2009, no. 11. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/133731.html> , accessed 01.04.2015. (in Russian).

24. Zuev S.M. *Stabilizatsiya polozhenii ravnovesiya nagruzhennykh modifikatsii platformy Styuarta. Kand. diss.* [Stabilization of equilibrium positions of loaded modifications of Stewart platform. Cand. diss.]. St. Petersburg, 2014. 115 p. (in Russian).
25. Smirnov V.A., Petrova L.N. Dynamic model of mechanism of parallel kinematics. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mashinostroenie = Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2009, no. 11, pp. 50-56. (in Russian).