электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Автоматическое генерирование заданий по дифференциальным уравнениям

05, май 2015

Соболев С. К.[1,*]

УДК: 378.016+512.643

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]sergesobolev@mail.ru

Введение

Наряду со стремительным развитием современных вычислительных средств и Интернета столь же стремительно стали появляться ответы к задачам и даже подробные решения не только старых, но и сравнительно новых контрольных заданий по математике и другим предметам. Очевидна необходимость создания генератора неограниченного количества вариантов контрольных заданий с ответами по разделам математики для младших курсов [1–3]. Несколько лет назад автору пришлось принимать задолженности у большой группы студентов. Студенты получили карточки с вариантами контрольной работы по дифференциальным уравнениям и уже через час стали массово сдавать готовые работы, в основном с правильными решениями, впрочем, абсолютно одинаковыми — очевидно, списанными. И тогда вместо карточек с заданиями автор предложил студентам одно и то же дифференциальное уравнение второго порядка (вырожденное неоднородное уравнение Эйлера) вида

$$xy'' = Ay' + Bx^{\alpha}$$

с начальными условиями

$$y(1) = \beta\,,\ \ y'(1) = \gamma\,.$$

Целые коэффициенты $A \neq 0$, $B \neq 0$, α, β, γ выбирались случайно. Образно говоря, автор временно превратился в генератор заданий по дифференциальным уравнениям.

Особенности генерировании заданий «непрерывной математики»

Основные объекты изучения линейной алгебры — матрицы и векторы — однозначно и единственным образом определяются набором своих компонент. Все матрицы складываются и перемножаются абсолютно одинаково — независимо от значений элементов матриц. Генератор заданий, например на обращение матрицы третьего порядка, в первом приближении может быть совсем примитивным: генерируется произвольная случайная квадратная матрица, т. е. случайный набор из девяти целых чисел, и проверяется отличие ее определителя от нуля. Задача гарантированно имеет решение, правда, возможны громоздкие выкладки. Более сложные и совершенные алгоритмы для генерирования задач линейной алгебры приведены в [4, 5].

Совсем по-другому обстоит дело в «математике функций», в частности в математическом анализе и дифференциальных уравнениях. Решение дифференциальных уравнений (за исключением линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера) сводится к интегрированию одной или нескольких функций [6, 7]. Интегрирование функций — творческая задача в отличие от рутинного дифференцирования. Например, нахождение неопределенного интеграл $\int f(x)dx$ для функций $f_1(x) = \sin^3 x$, $f_2(x) = x/\sin^2 x$ и $f_3(x) = \sin x/x$ — совершенно разные по сложности и методу решения задачи, причем третья вообще не имеет решения в элементарных функциях. В отличие от линейной алгебры мы не можем сгенерировать «случайную» функцию (в смысле взятую «наугад» элементарную функцию), а взятая «наугад» элементарная функция типа $f(x) = \dfrac{\arcsin(e^x)}{\ln(\cos x)}$ может интегрироваться очень сложно либо вообще не выражаться в элементарных функциях, причем эффективного алгоритма для проверки интегрируемости в элементарных функциях нет. Кроме того, от компьютерной программы, генерирующей дифференциальные уравнения и ответы к ним (именно дифференциальные уравнения, а не коэффициенты в шаблонах этих уравнений), требуется умение выполнять арифметические действия не только над числами, но и над функциями, а также находить композицию двух функций и упрощать аналитические выражения, т. е. заведомо использовать пакет «символьной математики».

Три подхода к генерированию заданий по дифференциальным уравнениям

При составлении генератора контрольных заданий по дифференциальным уравнениям возможны три подхода.

1. Обширный банк заданий

Допустим, что контрольная работа состоит из пяти заданий определенного типа. Создается большой банк готовых заданий каждого типа с ответами (по 100 заданий каждого типа), и в каждом варианте эти задания генерируются путем случайного выбора по одному заданию каждого типа. Надо следить, чтобы в сгенерированном комплекте было, скажем, восемь разных вариантов и в этих вариантах задания не повторялись. При повторном генерировании комплекта создаются новые восемь вариантов, и задания в них, вообще говоря, другие, но возможны непустые пересечения некоторых задач двух комплектов.

Если речь идет о заданиях для индивидуального домашнего задания (типового расчета), то число сгенерированных вариантов должно быть равно числу студентов в группе плюс один-два для разбора и задачи этих вариантов не должны пересекаться.

Достоинство такого подхода — алгоритмическая простота, а единственная трудность — подготовить обширный банк заданий по разным темам. Недостатком является то обстоятельство, что со временем все больше задач становятся известными студентам.

2. Параметрические схемы

Для каждого типа дифференциальных уравнений требуется создать несколько шаблонов с произвольными числовыми параметрами. Ответ (общее решение, общий интеграл) записывается через эти параметры. Параметрические схемы, например, использованы в [3, 8]. Они имеют то преимущество, что можно задействовать сколько угодно разных типов шаблонов, но недостатком является то, что для каждого типа задач надо прописать шаблон и задания, и ответа с числовыми параметрами. Правда, обычно возникает несколько случаев. Например, для дифференциального уравнения Эйлера

$$xy'' = Ay' + Bx^{\alpha}$$

общее решение выглядит так (пять случаев):

а) $y = \dfrac{Bx^{\alpha+1}}{(\alpha - A)(\alpha+1)} + C_1 x^{A+1} + C_2$ (если $A \neq \alpha,\ A \neq -1,\ \alpha \neq -1$);

б) $y = -\dfrac{B\ln|x|}{A+1} + C_1 x^{A+1} + C_2$ (если $A \neq -1,\ \alpha = -1$);

в) $y = \dfrac{Bx^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C_1 \ln|x| + C_2$, (если $A = -1,\ \alpha \neq -1$);

г) $y = \dfrac{B}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln|x| + C_1 x^{\alpha+1} + C_2$, (если $A = \alpha \neq -1$);

д) $y = \dfrac{B}{2} \ln^2|x| + C_1 \ln|x| + C_2$, (если $A = \alpha = -1$).

Другим примером может служить дифференциальное уравнение типа

$$y' = f(y).$$

Такое уравнение возникает при решении дифференциального уравнения второго порядка вида

$$F(y, y', y'') = 0$$

заменой $y' = p(y),\quad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с тремя параметрами

$$y' = \alpha\cos y + \beta\sin y + \gamma\ ,\ \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Его решение описывается формулами:

а) если $\alpha = \gamma$ и $\beta = 0$, то

$$\frac{1}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = x + C \Leftrightarrow y = 2\operatorname{arctg}\ (\alpha x + C);$$

б) если $\alpha = \gamma$ и $\beta \neq 0$, то

$$\frac{1}{\beta}\ln\left|\beta\operatorname{tg}\frac{y}{2} + \alpha\right| = x + C \Leftrightarrow y = 2\operatorname{arctg}\left(Ce^{\beta x} - \frac{\alpha}{\beta}\right);$$

в) если $\alpha \neq \gamma$ и $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$, то

$$y = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta + \frac{2}{x+C}}{\alpha - \gamma}\right);$$

г) если $\alpha \neq \gamma$ и $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 < 0$, то

$$2\delta\operatorname{arctg}\left(\delta\left((\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{y}{2} + \beta\right)\right) = x + C,$$

где $\delta = \dfrac{\operatorname{sgn}(\gamma - \alpha)}{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}}$;

д) если $\alpha \neq \gamma$ и $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 > 0$, то

$$\frac{1}{\delta}\ln\left|\frac{(\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{y}{2} + \beta - \delta}{(\gamma - \alpha)\operatorname{tg}\frac{y}{2} + \beta + \delta}\right| = x + C,$$

где $\delta = \operatorname{sgn}(\gamma - \alpha)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$.

3. Функциональные схемы

Третьим способом создания заданий по дифференциальным уравнениям является использование ***функциональных схем*** — шаблонов, содержащих несколько функциональных параметров $f(x), F(x), g(x), \ldots$, связанных условиями типа $F'(x) = f(x)$. Такой шаблон может содержать и числовые параметры. В процессе решения придется находить только неопределенные интегралы $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\int g(x)dx = G(x) + C$, … .

Начнем с *дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.* Можно предложить, например, такую функциональную схему:

$$y' = \lambda\frac{g(F(\alpha x))f(\alpha x)}{h(\beta y)} \tag{1}$$

с тремя числовыми параметрами α, β, λ и тремя парами функциональных параметров $f(x), F(x), g(x), G(x), h(x), H(x)$, связанных условиями

$$f(x) = F'(x),\ g(x) = G'(x),\ h(y) = H'(y).$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$H(\beta y) = \frac{\lambda\beta}{\alpha}G(F(\alpha x)) + C.$$

Пример 1. Пусть $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $\alpha = 3$, $H(y) = \sin y$, $\beta = 2$, $G(x) = x^3, \lambda = 1/3$, тогда получим дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{\operatorname{arctg}^2(3x)}{(1+9x^2)\cos 2y}.$$

Его общее решение (общий интеграл):

$$\sin 2y = \frac{2}{9}\operatorname{arctg}^3(3x) + C.$$

Вариант схемы (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda \cdot h(\beta x)}{g(F(\alpha y)) \cdot f(\alpha y)}.$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения выглядит так:

$$G(F(\alpha y)) = \frac{\lambda\alpha}{\beta} H(\beta x) + C .$$

Перейдем к дифференциальным уравнениям с однородной правой частью

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для решения этого дифференциального уравнения удобно, чтобы функция $f(u)$ имела вид

$$f(u) = u + \frac{1}{\varphi(u)} .$$

Тогда общее решение описывается формулой

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(Cx) \Leftrightarrow x = Ce^{\Phi(y/x)},$$

где $\varphi(u) = \Phi'(u)$.

Можно выделить частный случай $f(u) = u + G(u)/g(u)$, где $g(u) = G'(u)$. Тогда общий интеграл соответствующего дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{G(y/x)}{g(y/x)}$$

выглядит так:

$$G\left(\frac{y}{x}\right) = Cx.$$

Пример 2. Пусть $f(u) = \alpha u^2 + (2\alpha\beta + 1)u - \gamma$, где $\alpha, \gamma > 0$, тогда получим дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{\alpha y^2 + (2\alpha\beta + 1)xy - \gamma x^2}{x^2} .$$

Его общее решение

$$\frac{y+\left(\beta-\sqrt{\gamma/\alpha}\right)x}{y+\left(\beta+\sqrt{\gamma/\alpha}\right)x}=Cx^{2\sqrt{\alpha\gamma}}.$$

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения первого порядка

$$y'=A(x)y+B(x).$$

Эти уравнения легче строить, исходя из общего решения в виде

$$y=F(x)\left(G(x)+C\right).$$

Нетрудно убедиться, что следует взять $A(x)=f(x)/F(x)$, $B(x)=F(x)g(x)$, где, как обычно, $f(x)=F'(x)$, $g(x)=G'(x)$.

Получим дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{f(x)}{F(x)}y+F(x)g(x)\Leftrightarrow F(x)y'-f(x)y=F^2(x)g(x),$$

причем в процессе его решения придется находить интегралы только от функций $f(x)$ и $g(x)$. Можно выделить частный случай:

$$F(x)=H^n(x),\ n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0,$$

тогда $f(x)=F'(x)=nH^{n-1}(x)\cdot h(x)$, и получим дифференциальное уравнение вида

$$y'=\frac{nh(x)}{H(x)}y+H^n(x)\cdot g(x)$$

с общим решением

$$y=H^n(x)\cdot\left(G(x)+C\right).$$

Пример 3. Пусть $H(x)=\sin x, n=3, G(x)=\operatorname{arctg} x$, тогда получим линейное дифференциальное уравнение

$$y'=3y\operatorname{ctg}x+\frac{\sin^3 x}{1+x^2}$$

с общим решением $y=\sin^3(x)\cdot\left(\operatorname{arctg}(x)+C\right)$.

Также нетрудно получить схему для *дифференциального уравнения типа Бернулли с параметром* $\alpha\neq 1$:

$$y'=P(x)y+Q(x)y^{\alpha},$$

которое обычно решается подстановкой $z=y^{1-\alpha}$, откуда $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$.Умножив обе части этого уравнения на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, мы получим линейное дифференциальное уравнение

$$z'=A(x)z+B(x),$$

где

$$A(x)=(1-\alpha)P(x),\ B(x)=(1-\alpha)Q(x).$$

Положив $A(x)=\dfrac{f(x)}{F(x)}$ и $B(x)=F(x)\cdot g(x)$, мы получим схему для дифференциального уравнения типа Бернулли

$$(1-\alpha)y'=\frac{f(x)}{F(x)}y+g(x)F(x)\cdot y^{\alpha}. \qquad (2)$$

Его общее решение

$$y=\left(F(x)\left(G(x)+C\right)\right)^{1/1-\alpha}.$$

Пример 4. Пусть $F(x)=\cos x,\ G(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x},\ \alpha=-2$.

Получим дифференциальное уравнение

$$y'=-\frac{1}{3}y\cdot\operatorname{tg}x+\frac{e^{2x}\cos x}{3y^2}$$

с общим решением $y=\left(\cos x\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)\right)^{1/3}$.

Обратимся к *линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами*. С помощью определителя Вронского нетрудно составить линейное дифференциальное уравнение с заданной фундаментальной системой решений $\{\varphi_1(x),\varphi_2(x)\}$. Оно имеет вид

$$\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & y\\ \varphi_1' & \varphi_2' & y'\\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & y''\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0,,$$

где $a_0(x)=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2,\ a_1(x)=\varphi_1''\varphi_2-\varphi_1\varphi_2'',\ a_2(x)=\varphi_1'\varphi_2''-\varphi_1''\varphi_2'$.

Отметим, что $a_0(x)=W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$ — вронскиан фундаментальной системы решений $\{\varphi_1(x),\varphi_2(x)\}$, а $a_1(x)=-dW/dx$.

Пример 5. Возьмем $\varphi_1(x)=e^{3x},\varphi_2(x)=\sin x$, тогда получим линейное дифференциальное уравнение (после сокращения на e^{3x})

$$(\cos x-3\sin x)y''+10\sin x\cdot y'-(3\sin x+9\cos x)\cdot y=0$$

с общим решением

$$y=C_1e^{3x}+C_2\sin x.$$

Иногда в задачах для линейного однородного дифференциального уравнения

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

известно одно частное решение $y=\varphi_1(x)$ и надо найти независимое от него другое частное решение $y=\varphi_2(x)$ с помощью формулы Остроградского — Лиувилля

$$W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]=W_0e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \qquad (3)$$

и ее следствия

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\int \frac{W(x)}{\left(\varphi_1(x)\right)^2}\,dx.$$

Но иногда вронскиан

$$W(x) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$$

найти по формуле (3) иногда довольно непросто. В примере 5

$$W(x) = e^{-\int \frac{10\sin x}{\cos x - 3\sin x}dx} = W_0 e^{3x}(\cos x - 3\sin x),$$

и далеко не всякий студент справится с этим неопределенным интегралом. Желательно, чтобы вронскиан частных решений линейного дифференциального уравнения был простым и находился по формуле (3) легко. А если мы хотим, чтобы вронскиан был заданной функцией $W(x)$, то при известном частном решении $y = \varphi_1(x)$ соответствующее дифференциальное уравнение принимает вид

$$W(x)y'' - W'(x)y' + A(x)y = 0,$$

где $A(x) = \dfrac{-W(x)\varphi_1'' + W'(x)\varphi_1'}{\varphi_1(x)}$

Пример 6. Если выбрать вронскиан $W = x$ и $\varphi_1 = e^{3x}$, то $A(x) = 3 - 9x$ и получим линейное дифференциальное уравнение

$$xy'' - y' + (3 - 9x)y = 0.$$

Его общее решение

$$y = C_1 e^{3x} + C_2\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{36}\right)e^{-3x}.$$

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{4}$$

Если для него известна фундаментальная система решений

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$$

соответствующего однородного линейного уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

то оно, как известно, может быть решено методом Лагранжа вариации постоянных, т. е. общее решение уравнения (4) ищем в виде

$$y = C_1(x)\cdot\varphi_1(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2(x).$$

Производные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ являются решениями системы двух линейных алгебраических уравнений с матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & 0 \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & f_0(x) \end{array}\right),$$

где $f_0(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}$.

Проблема заключается в том, чтобы найденные функции

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)\varphi_2(x)}{W(x)a_0(x)},\ C_2'(x) = \frac{f(x)\varphi_1(x)}{W(x)a_0(x)},$$

где $W(x) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$, были заведомо легко интегрируемы, причем, как правило, $a_0(x) = W(x)$. Можно взять $f(x) = W^2(x)\cdot h(x)$, тогда задача сведется к простой интегрируемости функций $h(x)\cdot\varphi_1(x)$ и $h(x)\cdot\varphi_2(x)$. Ситуация несколько упростится, если положить

$$\varphi_1(x) = \varphi(x),\ \varphi_2(x) = \varphi(x)\cdot g(x).$$

Тогда

$$a_0(x) = W[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi^2(x)\cdot g'(x),\ a_1(x) = -\frac{dW}{dx} = -2\varphi\varphi' g' - \varphi^2 g'',$$

$$a_2(x) = 2(\varphi')^2 g' + \varphi\varphi' g'' - \varphi\varphi'' g'.$$

Получим (после сокращения на $a_0(x) = \varphi^2 g'$) дифференциальное уравнение

$$y'' - \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{g''}{g'}\right)y' + \left(2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{g''}{g'} - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right)y = f_0(x).$$

Если взять $f_0(x) = \varphi(x)\,g'(x)\,h(x)$, то, как нетрудно убедиться,

$$C_1'(x) = -h(x),\quad C_2'(x) = h(x)\cdot g(x), \tag{5}$$

и задача сведется к подбору пар функций $g(x)$ и $h(x)$, таких, чтобы обе функции (5) были легко интегрируемы. Например, если $g(x) = x$, то в качестве $h(x)$ можно взять

$$x^\alpha,\ e^{\alpha x},\ \sin\alpha x,\ \cos\alpha x,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+a}},\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \frac{1}{x^2 \pm a^2}.$$

Пример 7. Возьмем $\varphi(x) = \sin 2x,\ g(x) = x,\ h(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$.

Получим дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y'\operatorname{ctg} 2x + \left(4\operatorname{ctg}^2 2x + 2\operatorname{tg} 2x\right)y = \sin 2x \big/ x^2 + 9.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = C_1(x)\cdot\sin 2x + C_2(x)\cdot x\sin 2x,$$

где

$$C_1(x) = -\int\frac{dx}{x^2+9} = \overline{C_1} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3},\ C_2(x) = \int\frac{xdx}{x^2+9} = \overline{C_2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+9).$$

Черта над буквами C_1 и C_2 означает, что это «настоящие» константы.

Проблема начальных условий

Очевидно, что часть сгенерированных заданий по дифференциальным уравнениям должна содержать начальные условия. Начальное условие $y(x_0)=y_0$ в дифференциальных уравнениях первого порядка должно удовлетворять следующим критериям:

а) по методическим соображениям весьма желательно, чтобы после подстановки начальных условий аддитивная произвольная постоянная C не оказалась равной нулю, а мультипликативная константа C — не была равна единице (чтобы студент, вообще забывший о константе после интегрирования, не получил случайно правильный ответ);

б) значения x_0 и y_0 должны быть таковы, чтобы нужные функции от них можно было легко вычислить. Следовательно, если используется функциональная схема, то для каждой возможной функции следует указывать допустимый спектр значений ее аргументов.

Пример 8. Например, для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{\operatorname{arctg}^2(3x)}{(1+9x^2)\cos 2y}$$

с общим интегралом

$$\sin 2y = \frac{2}{9}\operatorname{arctg}^3(3x)+C$$

для начального условия в качестве x_0 удобно взять $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, а в качестве y_0 — любое из чисел $\pm\pi/n$, где $n=1, 2, 3, 4, 6, 12$.

Для однородного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x}+\frac{G\left(y/x\right)}{g\left(y/x\right)}$$

с общим интегралом $G\left(y/x\right)=Cx$ при наличии начального условия $y(x_0)=y_0$ константу C легко найти:

$$C=\frac{1}{x_0}G\left(\frac{y_0}{x_0}\right).$$

Возможен и такой подход: выбирают произвольно x_0 и константу C, а значение $y_0=y\left(x_0\right)$ вычисляют. Например, для уравнения типа Бернулли (2) получаем

$$y_0=\left(F(x)\left(G(x_0)+C\right)\right)1/1-\alpha.$$

Аналогично в задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка: произвольно выбирают константы C_1, C_2 общего решения, а значения $y(x_0)=\beta$ и $y'(x_0)=\gamma$ вычисляют. Например, для дифференциального уравнения второго порядка

$$xy''=Ay'+Bx^{\alpha}$$

в случае $A \neq \alpha,\ A \neq -1,\ \alpha \neq -1$ имеем общее решение

$$y = \frac{Bx^{\alpha+1}}{(\alpha - A)(\alpha+1)} + C_1 x^{A+1} + C_2$$

и его производную

$$y' = \frac{Bx^{\alpha}}{(\alpha - A)} + C_1 (A+1) x^{A}.$$

Удобно взять $x_0 = 1$. Тогда

$$y(1) = \frac{B}{(\alpha - A)(\alpha+1)} + C_1 + C_2 = \beta,$$

$$y'(1) = \frac{B}{(\alpha - A)} + C_1 (A+1) = \gamma.$$

Заключение

Предложены несколько функциональных схем, которые могут служить основой алгоритмов для автоматической генерации заданий по дифференциальным уравнениям первого и второго порядков.

Список литературы

1. Карнаухов В.М. Latex-генератор контрольных работ. М.: ФГБОУ ВПО МГУП. 2014. 177 с.
2. Карнаухов В.М., Русаков А.А. Компьютерный способ подготовки раздаточного материала контрольных работ по математике. // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Информатизация образования-2012». Орел: ООО «Картуш». 2012. 368 с. С. 99–103.
3. Карнаухов В.М. Приложение LATEX. Генератор вариантов контрольных работ. / Монография. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2012. 100 с.
4. Коновалов Я.Ю., Соболев С.К., Ермолаева М.А. Методические аспекты автоматической генерации задач по линейной алгебре // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. вып. 5. 14 с. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/740.html (дата обращения: 05.12. 2014).
5. Коновалов Я.Ю., Соболев С.К. Генератор контрольных заданий по высшей математике: опыт создания и применения. // Инженерный вестник: электронный научно-технический журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 4. С. 1046-1055. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/771442.html (дата обращения: 05.05. 2015).
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Либроком. 2009. 240 с.
7. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. / Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика. М.: Издательский центр «Академия». 2013. 288 с.

8. Шестаков А.П. Использование LaTeX при генерации дидактических материалов по математике. // Информатика. 2008. № 15 (568). с. 13–21. Режим доступа: http://информатика.1сентября.рф/view_article.php?ID=200801503 (дата обращения: 05.12. 2014).