Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №2. С. 101–114.
DOI: 10.7463/0215.0758826
Представлена в редакцию: 05.03.2015
© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 519.71

Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов

Голубев А. Е.[1,*], **Крищенко А. П.**[1]

*alexbmstu@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье исследована терминальная задача управления для аффинных динамических систем. Рассмотрен случай, когда конечное состояние системы совпадает с началом координат в фазовом пространстве системы. Решение терминальной задачи построено на основе многочленов степени $2n-2$, где n — порядок системы. Получены необходимые и достаточные условия существования многочлена степени $2n-2$, фазовый график которого соединяет произвольное начальное состояние системы и начало координат в фазовом пространстве. Приведено также решение терминальной задачи при помощи многочлена степени $2n-1$. Рассмотрен пример решения задачи управления для математического маятника. Возможной областью применения полученных в работе теоретических результатов является решение задач автоматического управления техническими системами, например, беспилотными летательными аппаратами и мобильными роботами.

Ключевые слова: управление, аффинная система, терминальная задача, многочлены

Введение и постановка задачи

Рассматривается терминальная задача управления для аффинной динамической системы, записанной в виде

$$y^{(n)} + f(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}) = g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})u, \tag{1}$$

где $\overline{y} = \left(y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $u \in \mathbb{R}$ — управление; $f(\overline{y})$ и $g(\overline{y})$ — гладкие функции своих аргументов; $g(\overline{y}) \neq 0$ при всех $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

Напомним, что под терминальной задачей подразумевают нахождение управления, переводящего динамическую систему за некоторый отрезок времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние [1]. Один из способов решения терминальных задач для систем вида (1) основан на использовании многочленов степени $2n-1$ [1, 2]. Решение различных терминальных задач с использованием многочленов рассматривалось, например, в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

В настоящей статье исследуется терминальная задача, для которой конечное состояние системы (1) совпадает с началом координат $\overline{y} = 0$. Ищется множество начальных состояний таких, что решение терминальной задачи можно построить при помощи многочлена степени $2n - 2$.

Отметим, что решение рассматриваемой терминальной задачи управления может быть использовано для решения задачи стабилизации нулевого положения равновесия за конечное время [15, 16, 17, 18].

В разд. 1 для систем второго порядка доказываются необходимые и достаточные условия существования многочлена второй степени, который определяет решение терминальной задачи. Приводится решение терминальной задачи управления с использованием многочленов второй и третьей степени. Рассмотрен пример решения задачи управления для математического маятника. В разд. 2 найдено решение терминальной задачи для аффинных систем третьего порядка, основанное на использовании многочленов четвертой и пятой степени. Для систем произвольного порядка n в разд. 3 получены необходимые и достаточные условия существования решения терминальной задачи с использованием многочлена степени $2n - 2$. Приведено также решение задачи при помощи многочлена степени $2n - 1$.

1. Системы второго порядка

При $n = 2$ система (1) запишется следующим образом:

$$\ddot{y} + f(\overline{y}) = g(\overline{y})u, \tag{2}$$

где $\overline{y} = (y,\ \dot{y})$. В качестве начального состояния системы рассмотрим произвольную точку $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ фазовой плоскости, отличную от начала координат $\overline{y} = (0,\ 0)$. Тогда искомая программная траектория $\overline{y}(t)$, $u(t)$ системы (2) должна удовлетворять граничным условиям $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ и $y(T) = 0$, $\dot{y}(T) = 0$, где $T > 0$ некоторое конечное значение независимой переменной t.

Напомним, что фазовым графиком [1] функции $\varphi(t) \in C^n[0, T]$ в фазовом пространстве системы (1) называют кривую, заданную параметрически при помощи уравнений $y^{(i)} = \varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{0,\ n-1}$, $t \in [0,\ T]$.

Найдем многочлен $p(t)$, фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t))$, $t \in [0,\ T]$, которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (2).

Рассмотрим сначала случай, когда T задано. Согласно [1, 2] существует такой единственный многочлен степени 3, имеющий вид

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3, \tag{3}$$

что выполнены условия $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0$. Отметим, что при любых значениях постоянных c_1 и c_2 справедливы равенства $p(0) = y_0$ и $\dot{p}(0) = \dot{y}_0$.

Коэффициенты c_1, c_2 находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} T^2 & T^3 \\ 2T & 3T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 - \dot{y}_0 T \\ -\dot{y}_0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

решение которой существует и единственно в силу невырожденности матрицы этой системы.

Таким образом, фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t))$, $t \in [0,\ T]$, многочлена (3) при указанных значениях коэффициентов c_1, c_2 соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (2), причем $p(T) = 0$, $\dot{p}(T) = 0$.

В случае, если значение T не задано, имеет место следующий результат.

Теорема 1. Для существования многочлена $p(t)$ степени 2, фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t))$, $t \in [0,\ T]$, которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (2), необходимо и достаточно выполнения условия

$$y_0 \dot{y}_0 < 0. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + c_1 t^2, \tag{6}$$

где c_1 — некоторая константа, подлежащая определению. Отметим, что при любом значении постоянной c_1 справедливы равенства $p(0) = y_0$ и $\dot{p}(0) = \dot{y}_0$.

Далее, условие $p(T) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$y_0 + \dot{y}_0 T + c_1 T^2 = 0. \tag{7}$$

Граничное условие $\dot{p}(T) = 0$ записывается в виде соотношения

$$\dot{y}_0 + 2c_1 T = 0. \tag{8}$$

Решив уравнения (7) и (8) относительно неизвестных c_1 и T, получим

$$c_1 = -\frac{\dot{y}_0}{2T}, \quad T = -\frac{2y_0}{\dot{y}_0}.$$

Таким образом, для выполнения условия $T > 0$ необходимо и достаточно, чтобы было справедливо неравенство (5).

При найденных значениях c_1 и T многочлен (6) примет вид

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{\dot{y}_0^2}{4y_0} t^2. \tag{9}$$

Фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t))$, $t \in [0,\ T]$, многочлена (9) соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0)$ на фазовой плоскости, причем $p(T) = 0$, $\dot{p}(T) = 0$. Теорема доказана.

Программное управление, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи для системы (2), запишется следующим образом [1, 2]:

$$u(t) = \frac{1}{g(\overline{p}(t))}\Big(\ddot{p}(t) + f(\overline{p}(t))\Big), \tag{10}$$

где $p(t)$ — соответствующий многочлен, имеющий вид (3), (4) или (9).

Пример. Рассмотрим терминальную задачу управления для математического маятника, уравнения движения которого имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = c\sin x_1 - dx_2 + u, \end{cases} \tag{11}$$

где $x = (x_1,\ x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ — вектор состояния системы; u — управляющий момент, константы c и d положительны.

В качестве желаемого конечного состояния системы (11) возьмем точку $x = 0$, соответствующую верхнему неустойчивому положению равновесия маятника.

В переменных $y = x_1$, $\dot{y} = x_2$ система (11) примет вид (2), где $f(\overline{y}) = -c\sin y + d\dot{y}$, $g(\overline{y}) = 1$.

Построим решение терминальной задачи при помощи многочленов второй и третьей степени. В качестве начального состояния системы (2) рассмотрим произвольную точку $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ фазовой плоскости такую, что выполнено неравенство (5). Тогда согласно теореме 1 фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t))$, $t \in [0,\ -2y_0/\dot{y}_0]$, многочлена (9) соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (2).

Следовательно, параметрически заданная кривая $x_1 = p(t)$, $x_2 = \dot{p}(t)$, $t \in [0,\ -2y_0/\dot{y}_0]$, соединяет в пространстве состояний системы (11) точки $x = (y_0,\ \dot{y}_0)^{\mathrm{T}}$ и $x = 0$.

Отметим, что кривой, соединяющей точки $x = (y_0,\ \dot{y}_0)^{\mathrm{T}}$ и $x = 0$ в фазовом пространстве системы (11), является также фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t))^{\mathrm{T}}$, $t \in [0,\ T]$, многочлена (3), где коэффициенты c_1, c_2 удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (4), $T > 0$ — некоторое заданное конечное значение независимой переменной.

Решение рассматриваемой терминальной задачи для системы (11) имеет вид программного управления (10), где $p(t)$ — соответствующий многочлен (9) второй степени или многочлен (3) третьей степени.

Результаты численного моделирования системы (11) с управлением (10) представлены на рис. 1 и 2 при следующих значениях параметров и начальных значений: $c = 9{,}81$, $d = 0{,}1$, $x_1(0) = \pi/6$, $x_2(0) = -0{,}5$.

Заметим, что при построении программной траектории для системы (2) на основе многочлена третьей степени возможны колебательные процессы, что нежелательно. В случае использования многочлена второй степени легко показать, что для рассматриваемой терминальной задачи обращение в ноль производной $\dot{p}(t)$ на фазовой плоскости возможно только в точке $\overline{y} = (0,\ 0)$ при $t = -2y_0/\dot{y}_0$.

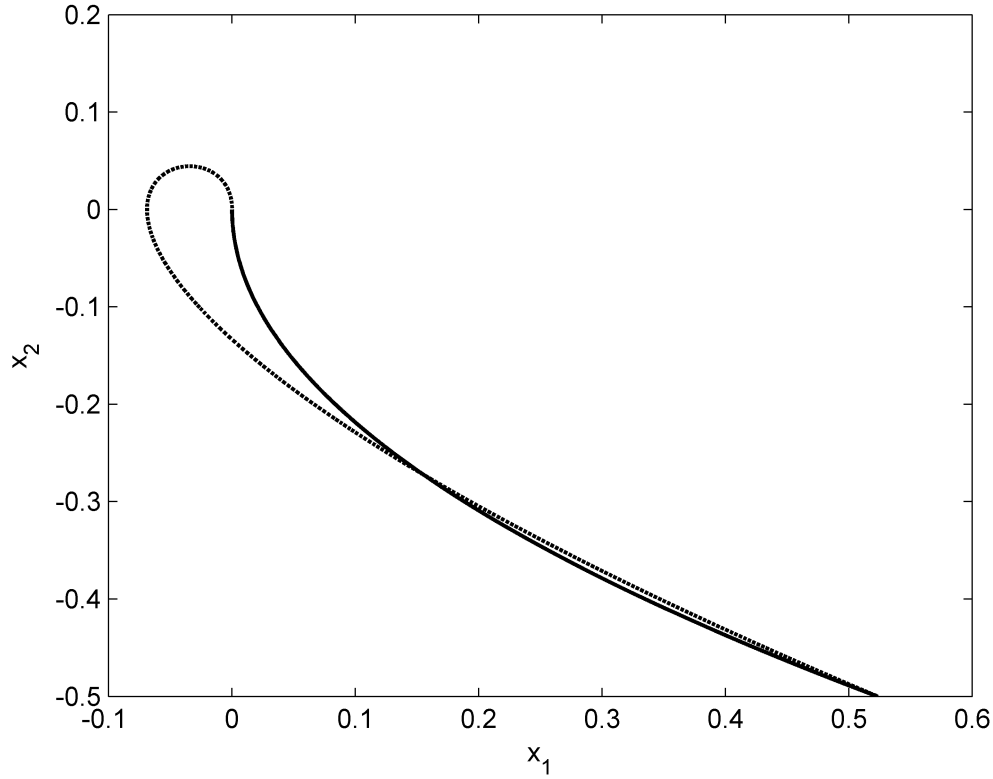

Рис. 1. Фазовые траектории системы, соответствующие многочлену второй (сплошная линия) и третьей (пунктир) степени ($T > -2x_1(0)/x_2(0)$)

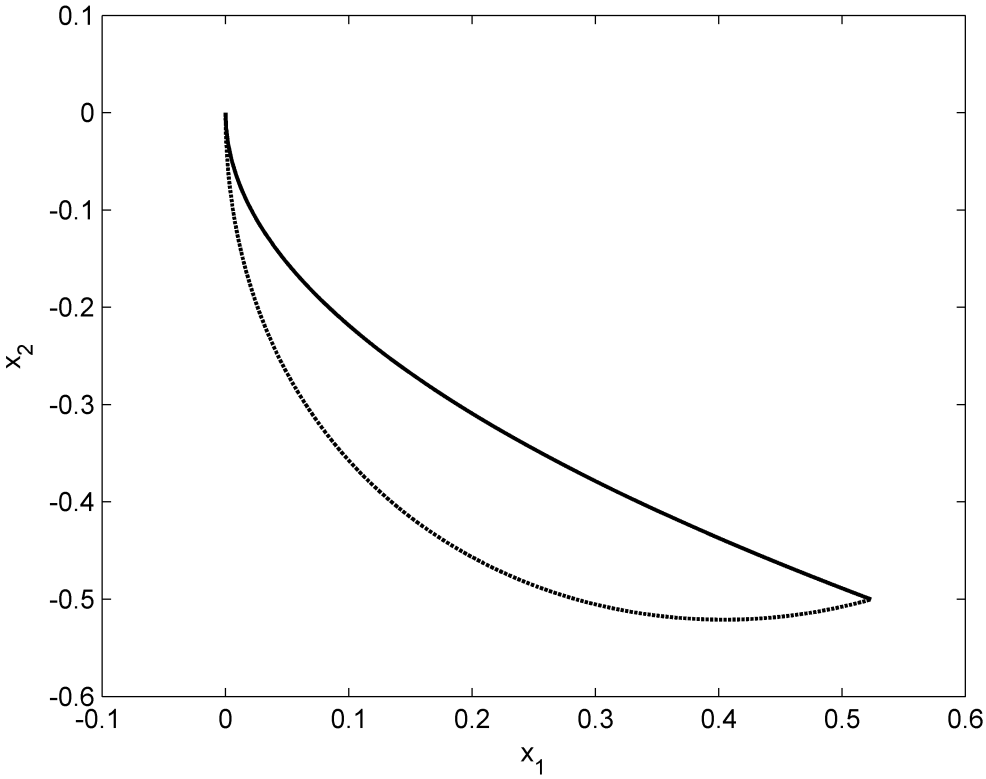

Рис. 2. Фазовые траектории системы, соответствующие многочлену второй (сплошная линия) и третьей (пунктир) степени ($T < -2x_1(0)/x_2(0)$)

2. Системы третьего порядка

Рассмотрим систему (1), имеющую третий порядок и записанную в виде

$$y^{(3)} + f(\overline{y}) = g(\overline{y})u, \tag{12}$$

где $\overline{y} = (y,\ \dot{y}, \ddot{y})$. Если значение $T > 0$ фиксировано, то существует единственный многочлен пятой степени

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{\ddot{y}_0}{2}t^2 + c_1 t^3 + c_2 t^4 + c_3 t^5, \tag{13}$$

фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t),\ \ddot{p}(t)), t \in [0,\ T]$, которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \ddot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (12), причем $p(T) = 0$, $\dot{p}(T) = 0$, $\ddot{p}(T) = 0$ [1, 2]. Постоянные c_1, c_2 и c_3 ищутся из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} T^3 & T^4 & T^5 \\ 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 \\ 6T & 12T^2 & 20T^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 - \dot{y}_0 T - \dfrac{\ddot{y}_0}{2}T^2 \\ -\dot{y}_0 - \ddot{y}_0 T \\ -\ddot{y}_0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

решение которой существует и единственно, так как матрица этой системы невырождена.

В случае, когда значение T не задано, введем обозначения $a = 6\dot{y}_0/\ddot{y}_0$, $b = 12y_0/\ddot{y}_0$ и сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Для существования многочлена $p(t)$ степени 4, фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t),\ \ddot{p}(t))$, $t \in [0,\ T]$, которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \ddot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (12), необходимо и достаточно выполнения условий

$$b < 0$$

или

$$b \geq 0, \quad a < 0, \quad a^2 - 4b \geq 0$$

или

$$\ddot{y}_0 = 0, \quad y_0\dot{y}_0 < 0.$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{\ddot{y}_0 t^2}{2} + c_1 t^3 + c_2 t^4, \tag{15}$$

где c_1, c_2 — некоторые константы, подлежащие определению. Заметим, что при любых значениях постоянных c_1 и c_2 выполняются равенства $p(0) = y_0$, $\dot{p}(0) = \dot{y}_0$ и $\ddot{p}(0) = \ddot{y}_0$.

Граничные условия $p(T) = 0$, $\dot{p}(T) = 0$ и $\ddot{p}(T) = 0$ эквивалентны следующей системе уравнений относительно неизвестных c_1, c_2 и T:

$$\begin{cases} y_0 + \dot{y}_0 T + \dfrac{\ddot{y}_0 T^2}{2} + c_1 T^3 + c_2 T^4 = 0, \\ \dot{y}_0 + \ddot{y}_0 T + 3c_1 T^2 + 4c_2 T^3 = 0, \\ \ddot{y}_0 + 6c_1 T + 12c_2 T^2 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрев первые два уравнения системы (16) как систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных c_1 и c_2, найдем

$$c_1 = -\frac{\dot{y}_0}{T^2} - \frac{2\ddot{y}_0}{3T}, \quad c_2 = \frac{\dot{y}_0}{2T^3} + \frac{\ddot{y}_0}{4T^2}. \tag{17}$$

Подставив соотношения (17) в последнее уравнение системы (16), при $\ddot{y}_0 \neq 0$ относительно неизвестного T получим квадратное уравнение

$$T^2 + aT + b = 0. \tag{18}$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части равенства (18), имеет вид $D = a^2 - 4b$. Квадратное уравнение (18) имеет положительное решение $T > 0$ тогда и только тогда, когда выполнены условия $b < 0$ или $b \geq 0$, $a < 0$, $D \geq 0$.

В случае $\ddot{y}_0 = 0$ относительно неизвестного T имеем уравнение

$$6\dot{y}_0 T + 12 y_0 = 0.$$

Следовательно, для положительности $T = -2y_0/\dot{y}_0$ необходимо и достаточно выполнения условия $y_0\dot{y}_0 < 0$.

Далее, в случае положительности T фазовый график $\overline{p}(t) = (p(t),\ \dot{p}(t),\ \ddot{p}(t))$, $t \in [0,\ T]$, многочлена (15), (17), (18) соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \ddot{y}_0)$ и $\overline{y} = (0,\ 0,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (12), причем $p(T) = 0$, $\dot{p}(T) = 0$, $\ddot{p}(T) = 0$. Теорема доказана.

Программное управление, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи для системы (12), согласно [1, 2] запишется следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{g(\overline{p}(t))}\Big(p^{(3)}(t) + f(\overline{p}(t))\Big),$$

где $p(t)$ — соответствующий многочлен, имеющий вид (13), (14) или (15), (17), (18).

3. Системы порядка $n > 3$

Рассмотрим систему (1) произвольного порядка n. Предположим, что значение $T > 0$ задано. Тогда согласно [1, 2] существует единственный многочлен степени $2n-1$, имеющий вид

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k + \sum_{k=1}^{n} c_k t^{n-1+k}, \tag{19}$$

фазовый график $\overline{p}(t) = \Big(p(t),\ \dot{p}(t),\ \ldots,\ p^{(n-1)}(t)\Big)$, $t \in [0,\ T]$, которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$ и $\overline{y} = (0,\ \ldots,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (1), причем $p(T) = 0$, $\dot{p}(T) = 0$, $\ldots$, $p^{(n-1)}(T) = 0$. Постоянные $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ находятся из системы

линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} T^n & T^{n+1} & \dots & T^{2n-1} \\ nT^{n-1} & (n+1)T^n & \dots & (2n-1)T^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n!}{1!}T & \frac{(n+1)!}{2!}T^2 & \dots & \frac{(2n-1)!}{n!}T^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!}T^k \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{(k-1)!}T^{k-1} \\ \vdots \\ -y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

решение которой существует и единственно в силу невырожденности матрицы этой системы.

Рассмотрим теперь случай, когда значение T не фиксировано. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Для существования многочлена $p(t)$ степени $2n-2$, фазовый график $\overline{p}(t) = \Big(p(t),\ \dot{p}(t),\ \dots,\ p^{(n-1)}(t)\Big)$, $t \in [0,\ T]$, которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \dots,\ y_0^{(n-1)})$ и $\overline{y} = (0,\ \dots,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (1), достаточно, чтобы число перемен знаков в системе начальных значений $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-2)}, y_0^{(n-1)}$ было нечетно.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!}t^k + \sum_{k=1}^{n-1} c_k t^{n-1+k}, \qquad (21)$$

где $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_{n-1}$ — константы, подлежащие определению. Отметим, что при любых значениях постоянных $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ для многочлена (21) выполняются условия $p(0) = y_0$, $\dot{p}(0) = \dot{y}_0, \dots, p^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$.

Соотношения $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0, \dots, p^{(n-1)}(T) = 0$ запишем в виде системы уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ и T, которая имеет вид

$$\begin{pmatrix} T^n & T^{n+1} & \dots & T^{2n-2} \\ nT^{n-1} & (n+1)T^n & \dots & (2n-2)T^{2n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n!}{1!}T & \frac{(n+1)!}{2!}T^2 & \dots & \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}T^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!}T^k \\ -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{(k-1)!}T^{k-1} \\ \vdots \\ -y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Рассмотрим, например, первые $n-1$ уравнений системы (22) как систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Решив эту систему и подставив найденные значения $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ в последнее уравнение системы (22), получим относительно неизвестного T следующее уравнение:

$$y_0^{(n-1)}T^{n-1} + \frac{n!}{1!(n-2)!}y_0^{(n-2)}T^{n-2} + \frac{(n+1)!}{2!(n-3)!}y_0^{(n-3)}T^{n-3} + \dots$$
$$\dots + \frac{(2n-3)!}{(n-2)!1!}\dot{y}_0 T + \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}y_0 = 0. \qquad (23)$$

Согласно [19] число положительных корней многочлена, стоящего в левой части равенства (23), равно числу перемен знаков в системе коэффициентов $y_0, \dot{y}_0 \ldots, y_0^{(n-1)}$ или меньше этого числа на четное число. Таким образом, если число перемен знаков в указанной системе значений коэффициентов нечетно, то существует хотя бы одно положительное решение $T > 0$ уравнения (23). В этом случае фазовый график $\overline{p}(t) = \Big(p(t),\ \dot{p}(t),\ \ldots,\ p^{(n-1)}(t)\Big)$, $t \in [0,\ T]$, многочлена (21), (22) соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$ и $\overline{y} = (0,\ \ldots,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (1), причем $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0, \ldots, p^{(n-1)}(T) = 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Необходимым и достаточным условием существования многочлена степени $2n - 2$, фазовый график которого соединяет точки $\overline{y} = (y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$ и $\overline{y} = (0,\ \ldots,\ 0)$ в фазовом пространстве системы (1), является наличие положительного корня у многочлена, стоящего в левой части равенства (23).

Наконец, программное управление, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи для системы (1), следующее: [1, 2]:

$$u(t) = \frac{1}{g(\overline{p}(t))}\Big(p^{(n)}(t) + f(\overline{p}(t))\Big), \tag{24}$$

где $p(t)$ — соответствующий многочлен (19), (20) или (21), (22).

Заключение

В настоящей работе исследована терминальная задача управления для аффинных систем, имеющих вид (1). Рассмотрен случай, когда конечное состояние системы совпадает с началом координат. Решение терминальной задачи построено на основе многочлена степени $2n - 2$. Приведено также известное решение при помощи многочлена степени $2n - 1$.

Отметим, что необходимые и достаточные условия существования замены переменных, преобразующей аффинную динамическую систему к виду (1), можно найти, например, в монографии [1].

Дальнейшие исследования могут быть связаны с решением на основе многочленов степени $2n - 2$ терминальных задач управления при произвольном конечном состоянии системы (1), не совпадающим с началом координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проекты №736 программы «Организация проведения научных исследований» и №1711 государственного задания РФ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект №14-01-00424).

Список литературы

1. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.

2. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.

3. Тараненко В.Т. Динамика самолета с вертикальным взлетом и посадкой. М.: Машиностроение, 1978. 278 с.

4. Батенко А.П. Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.

5. Ермошина О.В., Крищенко А.П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 155–162.

6. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 5. С. 156–163.

7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51–64.

8. Tang C.P., Miller P.T., Krovi V.N., Ryu J., Agrawal S.K. Differential-flatness-based planning and control of a wheeled mobile manipulator — theory and experiment // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2011. Vol. 16, no. 4. P. 768–773. DOI: 10.1109/TMECH.2010.2066282

9. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 3. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/367724.html (дата обращения 30.01.2015).

10. Емельянов С.В., Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Исследование управляемости аффинных систем // Доклады АН. 2013. Т. 449. № 1. С. 15–18.

11. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1410–1420.

12. Канатников А.Н. Построение траекторий летательных аппаратов с немонотонным изменением энергии // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 4. С. 107–122. DOI: 10.7463/0413.0554666

13. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 123–136. DOI: 10.7463/1013.0604151

14. Нефедов Г.А. Оптимальные траектории систем канонического вида // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 1. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1186.html (дата обращения 30.01.2015).

15. Perruquetti W., Floquet T., Orlov Y. Finite time stabilization of interconnected second order nonlinear systems // Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 5. IEEE, 2003. P. 4599–4604. DOI: 10.1109/CDC.2003.1272284
16. Cruz-Zavala E., Moreno J.A., Fridman L. Asymptotic stabilization in fixed time via sliding mode control // Proc. of the 51st Conference on Decision and Control (CDC). IEEE, 2012. P. 6460–6465. DOI: 10.1109/CDC.2012.6425999
17. Polyakov A. Fixed-time stabilization of linear systems via sliding mode control // Proc. of the 12th Workshop on Variable Structure Systems. IEEE, 2012. P. 1–6. DOI: 10.1109/VSS.2012.6163469
18. Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2012. Vol. 57, no. 8. P. 2106–2110. DOI: 10.1109/TAC.2011.2179869
19. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 431 с.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2015, no. 2, pp. 101–114.
DOI: **10.7463/0215.0758826**
Received: 05.03.2015
© Bauman Moscow State Technical University

Polynomials-Based Terminal Control of Affine Systems

Golubev A. E.[1,*], **Krishchenko A. P.**[1]
*alexbmstu@mail.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: control, affine system, terminal problem, polynomials

One of the approaches to solving terminal control problems for affine dynamical systems is based on the use of polynomials of degree $2n-1$, where n is the order of the system in question. In this paper, we investigate the terminal control problem for which the final state of the system coincides with the origin in the phase space. We seek a set of initial states such that the solution of the terminal control problem can be constructed by using a polynomial of degree $2n-2$.

Note that solution of the terminal control problem in question can be used to solve the problem of stabilizing the zero equilibrium in a finite time.

For the second-order systems we prove the necessary and sufficient conditions for existence of the polynomial of the second degree which determines the solution of the terminal problem. The solutions of the terminal control problem based on the polynomials of second and third degree are given. As an example, the terminal control problem is considered for the simple pendulum.

We also discuss solution of the terminal problem for affine systems of the third order, based on the use of the fourth and fifth degree polynomials. The necessary and sufficient conditions for existence of the fourth-degree polynomial such that its phase graph connects an arbitrary initial state of the system and the origin are obtained.

For systems of arbitrary order n we obtain the necessary and sufficient conditions for existence of a solution of the terminal problem using the polynomial of degree $2n-2$. We also give the solution of the problem by means of the polynomial of degree $2n-1$.

Further research can be focused on extending the results obtained in this note to terminal control problems where the desired final state of the system is not necessarily the origin.

One of the potential application areas for the obtained theoretical results is automatic control of technical plants like unmanned aerial vehicles and mobile robots.

References

1. Krasnowechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelinejnye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p. (in Russian).
2. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms. *Doklady AN SSSR = Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809. (in Russian).
3. Taranenko W.T. *Dinamika samoleta s vertikal'nym vzletom i posadkoj* [Aircraft dynamics with vertical take-off and landing]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978. 278 p. (in Russian).
4. Batenko A.P. *Sistemy terminal'nogo upravleniya* [Terminal Control Systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1984. 160 p. (in Russian).
5. Ermoshina O.V., Krishchenko A.P. Synthesis of Programmed Controls of Spacecraft Orientation by the Method of Inverse Problem of Dynamics. *Izvestiya RAN. Teoriia i sistemy upravleniia*, 2000, no. 2, pp. 155–162. (English version of journal: *Journal of Computer and System Sciences International*, 2000, vol. 39, no. 2, pp. 313–320.).
6. Velishchanskii M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the consept of the inverse dynamic problem. *Izvestiya RAN. Teoriia i sistemy upravleniia*, 2003, no. 5, pp. 156–163. (English version of journal: *Journal of Computer and System Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 811–818.).
7. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Terminal control of spatial motion of flying vehicles. *Izvestiya RAN. Teoriia i sistemy upravleniia*, 2008, no. 5, pp. 51–64. (English version of journal: *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 5, pp. 718–731. DOI: 10.1134/S1064230708050055).
8. Tang C.P., Miller P.T., Krovi V.N., Ryu J., Agrawal S.K. Differential-flatness-based planning and control of a wheeled mobile manipulator-theory and experiment. *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 768–773. DOI: 10.1109/TMECH.2010.2066282
9. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Admissible Spatial Trajectories of the Unmanned Aeral Vechicle in the Vertical Plane. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 3. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/367724.html, accessed 30.01.2015. (in Russian).
10. Emel'yanov S.V., Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Controllability research on affine systems. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 449, no. 1, pp. 15–18. (English version of journal: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, iss. 2, pp. 245–248. DOI: 10.1134/S1064562413020026).
11. Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal control problem for affine systems. *Differentsial'nye uravneniya*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1410–1420. (English version of journal: *Differential Equations*, 2013, vol. 49, iss. 11, pp. 1378–1388. DOI: 10.1134/S0012266113110062).

12. Kanatnikov A.N. Design of aircraft trajectories with non-monotonic change in energy. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 4, pp. 107–122. DOI: 10.7463/0413.0554666 (in Russian).

13. Fetisov D.A. Solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10, pp. 123–136. DOI: 10.7463/1013.0604151 (in Russian).

14. Nefedov G.A. Optimal trajectories for systems of canonical form. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, no. 1. Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1186.html, accessed 30.01.2015. (in Russian).

15. Perruquetti W., Floquet T., Orlov Y. Finite time stabilization of interconnected second order nonlinear systems. *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 5. IEEE, 2003, pp. 4599–4604. DOI: 10.1109/CDC.2003.1272284

16. Cruz-Zavala E., Moreno J.A., Fridman L. Asymptotic stabilization in fixed time via sliding mode control. *Proc. of the 51st Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2012, pp. 6460–6465. DOI: 10.1109/CDC.2012.6425999

17. Polyakov A. Fixed-time stabilization of linear systems via sliding mode control. *Proc. of the 12th Workshop on Variable Structure Systems*. IEEE, 2012, pp. 1–6. DOI: 10.1109/VSS.2012.6163469

18. Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 8, pp. 2106–2110. DOI: 10.1109/TAC.2011.2179869

19. Kurosh A.G. *Kurs vysshei algebry* [Course of Higher Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 431 p. (in Russian).