

УДК 621.833 + 621.8.024.4

Влияние погрешностей монтажа в зубчато-поводковых передачах

Сачков М. Ю.^{1,*}, Тимофеев Б. П.¹

[*Urie2006@yandex.ru](mailto:Urie2006@yandex.ru)

¹Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

В работе получены функции положения зубчато-поводковой передачи, состоящей из двух колес с числом поводков равном пятнадцати. Так же получены координаты точек контакта и рассчитаны ошибки функции положения при пересопряжении. Передача обладает высокой технологичностью (для ее изготовления не требуется специального оборудования), а функция перемещения близка к линейной. Данная статья характеризует влияние погрешности межосевого расстояния на качественные характеристики передачи. В работе представлены графические зависимости и табличные расчетные данные для номинального межосевого расстояния и смещения в пределах $\pm 0,2$ мм. Для решения полученной системы уравнений применялись численные методы программного пакета MathCAD.

Ключевые слова: зубчато-поводковая передача, функция положения, ошибка передаточного отношения, ошибка положения, погрешности монтажа

Введение

В настоящее время, как и тысячи лет тому назад зачастую требуются передачи, где элементы кинематических пар представляют собой простые поверхности – плоскости, цилиндры, конусы, сферы, торы, гиперboloиды вращения и т.д. В этом случае для изготовления таких передач не требуется дорогостоящее зубообрабатывающее оборудование. Однако передачи получаются несопряженные, с точечным локализованным контактом и переменным передаточным отношением в ходе зацепления одной пары зубьев, либо их аналогов. В данной работе решается задача выбора геометрических параметров новой передачи из условия ограничения циклической погрешности зубцовой частоты и величины удара при пересопряжении.

1. Приближенные передачи

Передачи с приближенным зацеплением принципиально не могут передавать вращательное движение с постоянным передаточным отношением в процессе зацепления

одной пары зубьев. Отклонения передаточного отношения от номинального может быть минимизировано. Одной из задач теории приближенных зацеплений заключается в получении закона передачи вращения.

Важной задачей синтеза приближенного зацепления является локализация пятна контакта на поверхности зубьев, как по высоте зуба, так и по ширине зубчатого венца. В случае приближенного зацепления контакт точечный (рассматривается жесткая модель). При рассмотрении упругой модели зацепления точка контакта преобразовывается в мгновенную площадку контакта, совокупность которых и представляет собой пятно контакта. Стремление локализовать пятно контакта приводит к снижению нагрузочной способности передачи.

Минимизация кинематической погрешности достигается при приложении определенных нагрузок, фиксированных погрешностях изготовления и монтажа.

В поводковых механизмах используются кинематические пары другого вида. Их элементами могут являться сфера и плоскость, два цилиндра, цилиндр и плоскость и т.д. Поводковые механизмы нашли применение в приборах и их расчету посвящены работы Ф. В. Дроздова, С.И. Пантелеева, П.А. Лебедева, Ф.Л. Литвина[1,2,3].

В своей работе Ф.Л. Литвин рассматривает общий случай поводкового механизма. Всем подобным механизмам свойственна нелинейность функции положения и функции передаточного отношения. Но для потребителя, зачастую, важно ограничить отклонения от линейности в некотором диапазоне углов поворота звеньев.

Для механизмов у которых кинематическими элементами передачи являются плоскости и цилиндр, цилиндр и цилиндр, были получены качественные характеристики передачи с параллельными осями.[4] Данная приближенная передача могла быть использована как повышающая, так и как понижающая.

2. Геометрия зубчато-поводковой передачи

Рассмотрим зубчато-поводковую передачу, изображенную на рисунке 1 и состоящую из зубчато-поводковых колес.[5]

Здесь представлена схема расположения осей координат связанных с зубчато-поводковыми колесами. В работе рассматривался частный случай, когда колеса расположены на параллельных осях, а оси поводков скрещиваются под углом 90^0 .

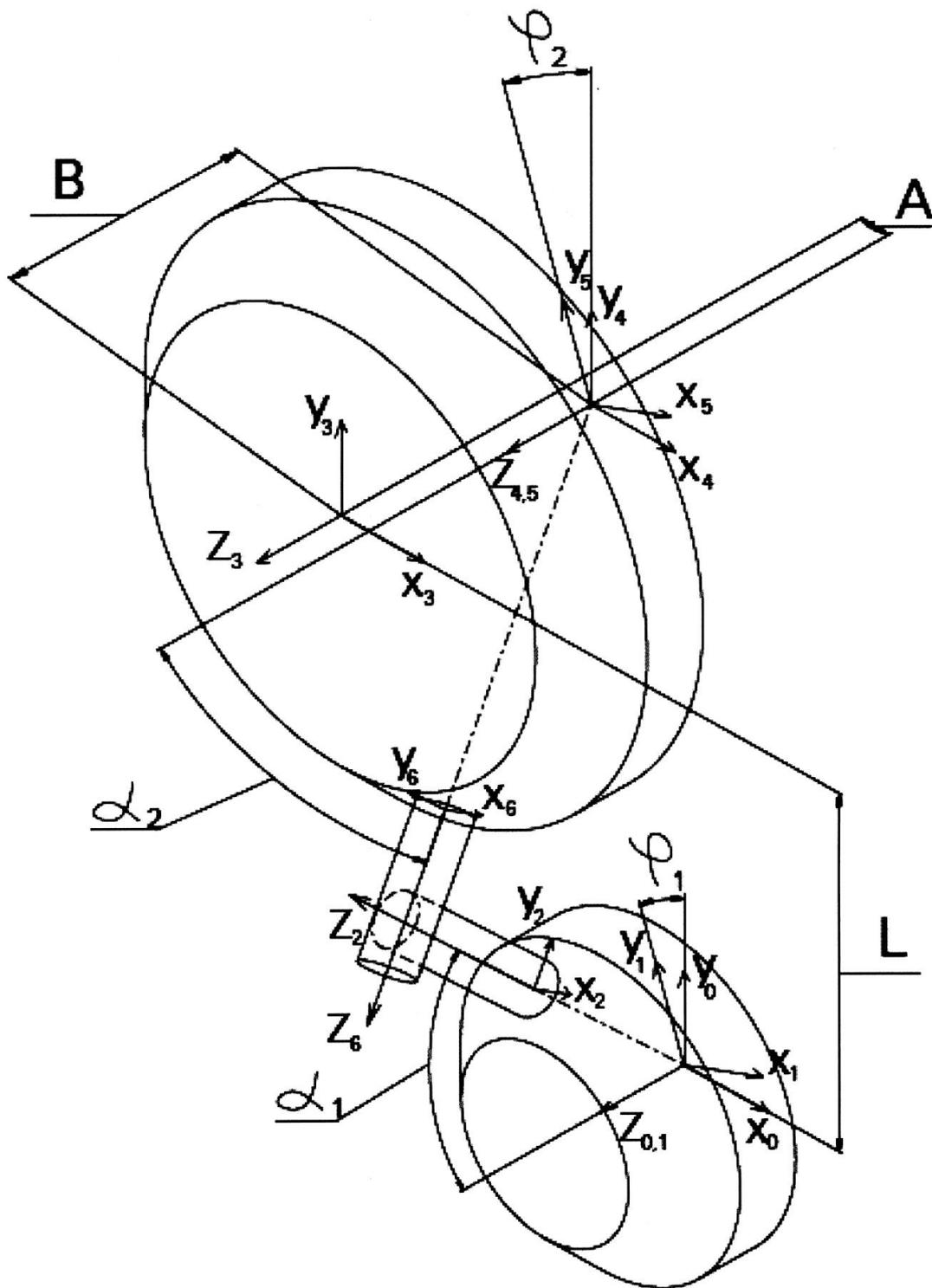


Рис. 1. Взаимное расположение систем координат передачи на параллельных осях

3. Функция положения зубчато-поводковых передач

Для получения функции положения такой передачи используем равенство радиус-векторов и ортов нормалей в точках касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Данные поверхности

образуют высшую кинематическую пару и образованы цилиндрическими поверхностями поводков.

Уравнение поверхностей Σ_1 и Σ_2 (соприкасающиеся поверхности цилиндрических поводков) в системах координат S_2 и S_6 можно записать как:

$$x_2 = u_1; y_2 = \rho_1 \cdot \sin \theta_1; z_2 = \rho_1 \cdot \cos \theta_1; x_6 = u_2; y_6 = \rho_2 \cdot \sin \theta_2; z_6 = \rho_2 \cdot \cos \theta_2.$$

Орт нормали поверхности Σ_1 запишем в виде:

$$e_{x_2} = \cos \theta_1; e_{y_2} = \sin \theta_1; e_{z_2} = 0.$$

Орт нормали поверхности Σ_2 :

$$e_{x_6} = \cos \theta_2; e_{y_6} = \sin \theta_2; e_{z_6} = 0.$$

Для преобразования координат воспользуемся следующими матричными уравнениями:

$$r^{(1)} = M_{01} \cdot M_{12} \cdot r_2 = M_{02} \cdot r_2; r^{(2)} = M_{03} \cdot M_{34} \cdot M_{45} \cdot M_{56} \cdot r_6 = M_{06} \cdot r_6.$$

В данных уравнениях r_2, r_6 – столбцевые матрицы радиус-векторов поверхностей Σ_1, Σ_2 .

$r^{(1)}, r^{(2)}$ – столбцевые матрицы радиус-векторов этих же поверхностей в неподвижной системе координат S_0 . На основании рисунка 1 получим следующие матрицы перехода из одной системы координат в другую:

$$M_{02} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varepsilon_1) \cdot \sin(\varphi_1) & -\cos(\varepsilon_1) \cdot \sin(\varphi_1) & -R_1 \cdot \sin(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varepsilon_1) & \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varepsilon_1) & R_1 \cdot \cos(\varphi_1) \\ 0 & -\cos(\varepsilon_1) & \sin(\varepsilon_1) & R_1 \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{06} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) & -\sin(\varepsilon_2) \cdot \sin(\varphi_2) & \cos(\varepsilon_2) \cdot \sin(\varphi_2) & A + R_2 \cdot \sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varepsilon_2) & -\cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varepsilon_2) & L - R_2 \cdot \cos(\varphi_2) \\ 0 & \cos(\varepsilon_2) & \sin(\varepsilon_2) & R_2 \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon_2) - B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проекции ортов нормалей в системе O_0 определяются с помощью матричных равенств:

$$e^{(1)} = L_{01} \cdot L_{12} \cdot e_2 = L_{02} \cdot e_2; e^{(2)} = L_{03} \cdot L_{34} \cdot L_{45} \cdot L_{56} \cdot e_6 = L_{06} \cdot e_6.$$

Матрицы $L_{01}, L_{12}, L_{03}, L_{34}, L_{45}, L_{56}$ получены из матриц $M_{01}, M_{12}, M_{03}, M_{34}, M_{45}, M_{56}$ «зачеркиванием» четвертого столбца и четвертой строки.

Следует отметить, что из трех уравнений для проекций ортов нормалей независимые два, т.к. наложена связь: $\left| e^{(1)} \right| = \left| e^{(2)} \right| = 1$.

После всех преобразований поверхностей Σ_1 , Σ_2 и ортов нормалей получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho_1 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\theta_1) - u_1 \cdot \cos(\varepsilon_1) \cdot \sin(\varphi_1) - R_1 \cdot \sin(\varphi_1) - \rho_1 \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varepsilon_1) \cdot \sin(\theta_1) - \\ - (A + R_2 \cdot \sin(\varphi_2) + u_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varepsilon_2) + \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\theta_2) - \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varepsilon_2) \cdot \sin(\theta_2)) = 0 \\ R_1 \cdot \cos(\varphi_1) + u_1 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varepsilon_1) + \rho_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\varphi_1) + \rho_1 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varepsilon_1) \cdot \sin(\theta_1) - \\ - (L - R_2 \cdot \cos(\varphi_2) - u_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\varepsilon_2) + \rho_2 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \sin(\varphi_2) + \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varepsilon_2) \cdot \sin(\theta_2)) = 0 \\ R_1 \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon_1) + u_1 \cdot \sin(\varepsilon_1) - \rho_1 \cdot \cos(\varepsilon_1) \cdot \sin(\theta_1) - (R_2 \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon_2) - B + u_2 \cdot \sin(\varepsilon_2) + \rho_2 \cdot \cos(\varepsilon_2) \cdot \sin(\theta_2)) = 0 \\ \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\theta_1) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varepsilon_1) \cdot \sin(\theta_1) + (\cos(\varphi_2) \cdot \cos(\theta_2) - \sin(\varphi_2) \cdot \sin(\varepsilon_2) \cdot \sin(\theta_2)) = 0 \\ \cos(\theta_1) \cdot \sin(\varphi_1) + \cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varepsilon_1) \cdot \sin(\theta_1) + (\cos(\theta_2) \cdot \sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varepsilon_2) \cdot \sin(\theta_2)) = 0 \\ -\cos(\varepsilon_1) \cdot \sin(\theta_1) + \cos(\varepsilon_2) \cdot \sin(\theta_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) пять независимых уравнений с шестью неизвестными φ_1 , φ_2 , u_1 , u_2 , θ_1 , θ_2 . Задавая параметр φ_1 , получим значения для остальных неизвестных данной системы уравнений. Используя численные методы программной оболочки MathCAD, были получены графики зависимостей $\varphi_2 = f_1(\varphi_1)$, $\Delta\varphi_2 = f_2(\varphi_1)$, где $\Delta\varphi_2 = \varphi_{2Д} - \varphi_{2Н} = \varphi_{2Д} - \varphi_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}$, $i_{21} = f_3(\varphi_1)$, $\Delta i_{21} = f_4(\varphi_1)$, где $\Delta i_{21} = i_{21Д} - i_{21Н}$ и $u_1 = f_5(\theta_1)$, $u_2 = f_6(\theta_2)$ – графики координат точек контакта на поверхностях Σ_1 , Σ_2 . (Рис. 2 - Рис. 4)

Для получения численных значений функции положения, функций i_{21} и Δi_{21} , а также координат точек контакта на поверхностях были приняты следующие значения основных параметров: $m = 2$ [мм], $z_1 = z_2 = 15$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ [рад.], $\rho_2 = \rho_1 = 1,171$ [мм].

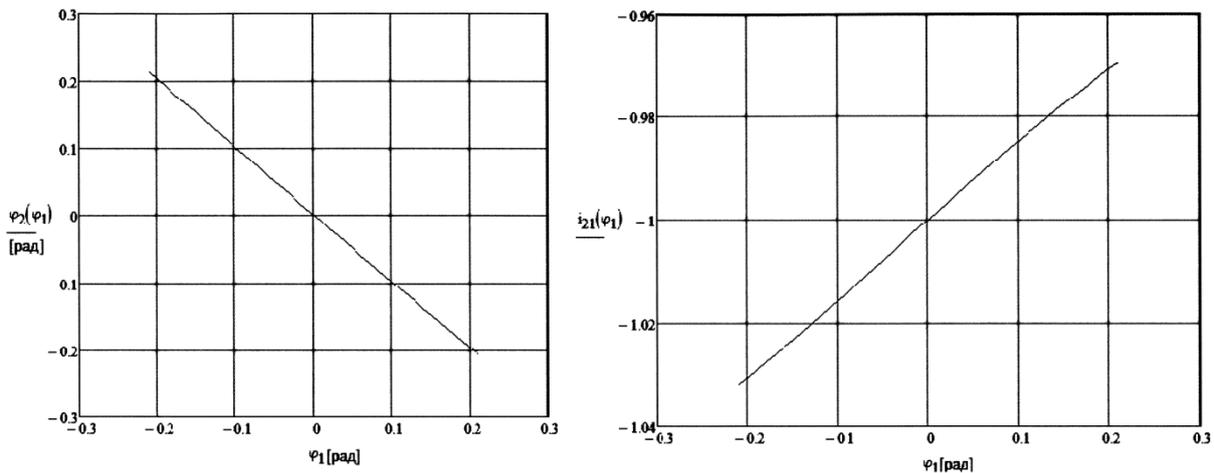


Рис. 2. Зависимости $\varphi_2 = f_1(\varphi_1)$ и $i_{21} = f_3(\varphi_1)$

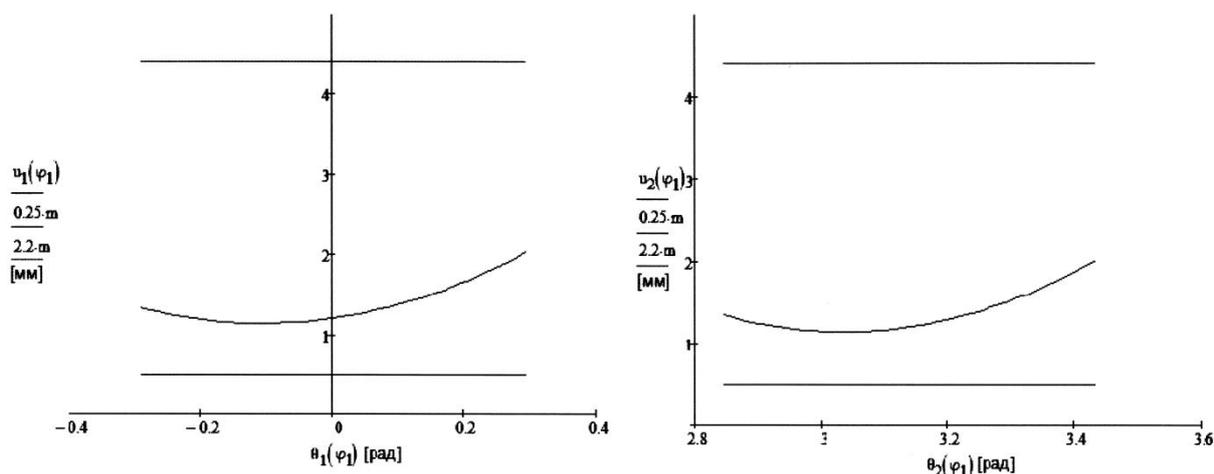


Рис. 3. Координаты точек контакта на поверхностях Σ_1, Σ_2

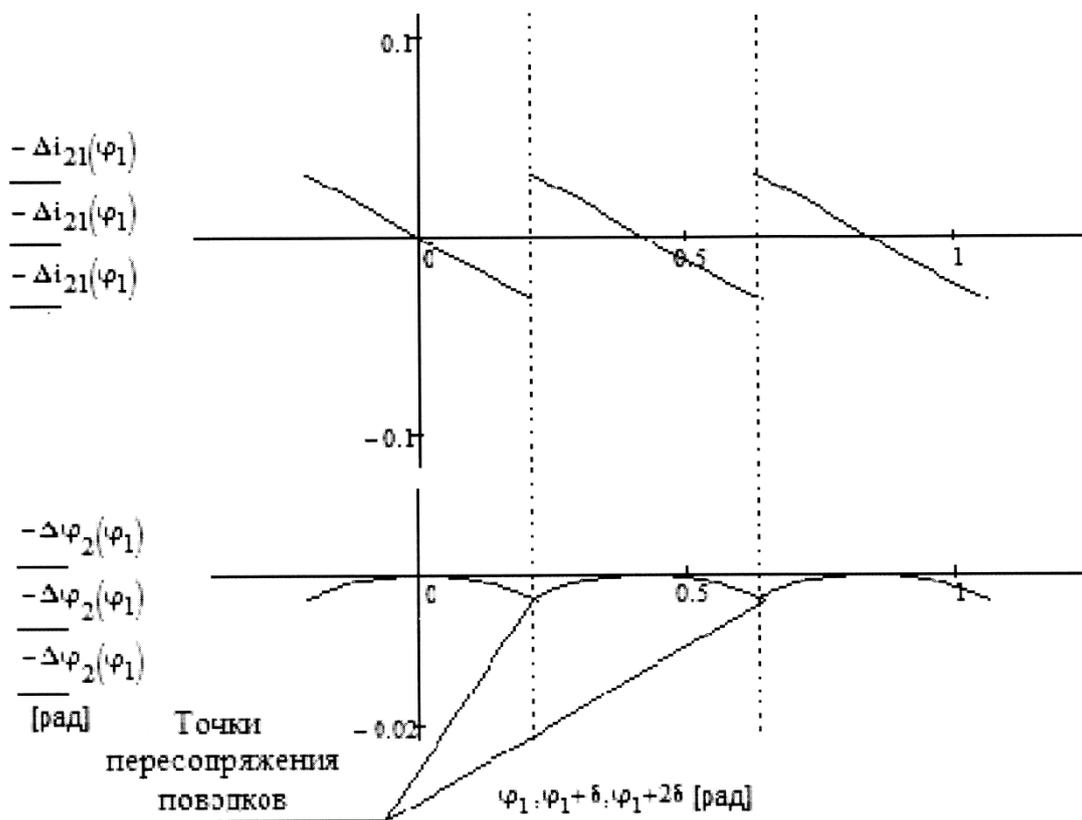


Рис. 4. Зависимости $\Delta\varphi_2 = f_2(\varphi_1)$ и $\Delta i_{21} = f_4(\varphi_1)$

4. Анализ данных расчета

Как можно заметить, функция положения близка к линейной, а координаты точек сопряжения на поверхности повозков не выходят на кромку. Отсутствие кромочного

контакта и возможность локализовать точки контакта по поверхности поводка одно из достоинств данной передачи. Передаточное отношение в процессе зацепления одной пары зубьев изменяется в пределах восьми сотых, при номинальном передаточном отношении равном единице.

Полученные расчетные данные характеризуют качество зацепления, в частности значение наибольшей циклической погрешности зубцовой частоты не превышает 0,003 радиана. Передача практически нечувствительна к погрешностям шага.

5. Качественные характеристики зацепления с учетом влияния погрешностей монтажа

Для определения характера влияния погрешностей монтажа произведем расчет параметров зацепления для осевого смещения в пределах $\pm 0,2$ мм, при этом $m = 2$ [мм],

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4} [\text{рад.}], \quad \rho_2 = \rho_1 = 1,171 [\text{мм}].$$

Полученные значения представлены в табл. 1-2.

Таблица 1. Смещение межосевого расстояния $\Delta L = -0,2; -0,1$

Число поводков, [целое число]										
	$z_1 = z_2 = 8; \Delta L = -0,2 \text{ мм}$					$z_1 = z_2 = 8; \Delta L = -0,1 \text{ мм}$				
φ_1	$\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta i_{21}(\varphi_1)$	$u_1(\varphi_1)$	$u_2(\varphi_1)$	$\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta i_{21}(\varphi_1)$	$u_1(\varphi_1)$	$u_2(\varphi_1)$
-0.33	0.346	0.016	-0.092	2.233	1.192	0.345	0.016	-0.091	2.308	1.267
-0.263	0.273	0.01	-0.076	1.886	1.039	0.273	0.01	-0.075	1.959	1.112
-0.196	0.201	5.713e-3	-0.058	1.598	0.957	0.201	5.67e-3	-0.058	1.67	1.029
-0.129	0.131	2.478e-3	-0.039	1.364	0.939	0.131	2.46e-3	-0.038	1.436	1.01
-0.062	0.062	5.681e-4	-0.018	1.182	0.977	0.062	5.64e-4	-0.018	1.253	1.048
5.301e-3	-5.297e-3	4.161e-6	1.569e-3	1.05	1.068	-5.29e-3	4.13e-6	1.559e-3	1.121	1.138
0.072	-0.072	7.643e-4	0.021	0.968	1.206	-0.072	7.59e-4	0.021	1.039	1.276
0.139	-0.137	2.788e-3	0.039	0.938	1.389	-0.137	2.77e-3	0.039	1.009	1.46
0.206	-0.2	5.983e-3	0.056	0.961	1.616	-0.2	5.94e-3	0.056	1.033	1.688
0.273	-0.263	0.01	0.071	1.04	1.888	-0.263	0.01	0.07	1.113	1.961
0.34	-0.325	0.015	0.083	1.179	2.206	-0.325	0.015	0.083	1.254	2.282

Таблица 2. Смещение межосевого расстояния $\Delta L = 0,1; 0,2$

Число поводков, [целое число]										
$z_1 = z_2 = 8; \Delta L = 0,1 \text{ мм}$						$z_1 = z_2 = 8; \Delta L = 0,2 \text{ мм}$				
φ_1	$\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta i_{21}(\varphi_1)$	$u_1(\varphi_1)$	$u_2(\varphi_1)$	$\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta i_{21}(\varphi_1)$	$u_1(\varphi_1)$	$u_2(\varphi_1)$
-0.33	0.345	0.016	-0.09	2.458	1.417	0.345	0.015	-0.09	2.532	1.492
-0.263	0.273	0.01	-0.074	2.106	1.259	0.273	9.944e-3	-0.074	2.179	1.332
-0.196	0.201	5.603e-3	-0.057	1.814	1.174	0.201	5.567e-3	-0.056	1.886	1.246
-0.129	0.131	2.431e-3	-0.038	1.578	1.153	0.131	2.416e-3	-0.038	1.649	1.224
-0.062	0.062	5.574e-4	-0.018	1.395	1.19	0.062	5.54e-4	-0.018	1.465	1.261
5.301e-3	-5.297e-3	4.084e-6	1.54e-3	1.262	1.28	-5.29e-3	4.05e-6	1.531e-3	1.333	1.35
0.072	-0.072	7.502e-4	0.021	1.181	1.418	-0.072	7.456e-4	0.02	1.252	1.489
0.139	-0.137	2.737e-3	0.038	1.152	1.603	-0.137	2.72e-3	0.038	1.223	1.675
0.206	-0.2	5.874e-3	0.055	1.177	1.833	-0.2	5.839e-3	0.055	1.25	1.905
0.273	-0.263	0.01	0.069	1.26	2.109	-0.263	9.989e-3	0.069	1.333	2.182
0.34	-0.325	0.015	0.082	1.404	2.432	-0.325	0.015	0.081	1.479	2.507

Как видно из таблицы при числе поводков, равном восьми линия контакта не выходит за верхнюю границу поводка. Значения ошибки функции положения изменяется линейно и незначительно. Для передачи с $i_{12} = 1$ изменении межосевого расстояния на $\pm 0,1 \text{ мм}$ ошибка положения увеличивается не более чем на $1.03 \cdot 10^{-4}$. При изменении межосевого расстояния на $\pm 0,2 \text{ мм}$ ошибка положения увеличивается не более чем на $2.07 \cdot 10^{-4}$. При этом изменение межосевого расстояния в сторону увеличения или уменьшения не влияет на ошибку передаточного отношения или ошибку функции положения.

Список литературы

1. Литвин Ф.Л. Аналитические методы исследования пространственных зацеплений // Семинар по теории машин и механизмов: сб. науч. тр. / Ин-т машиноведения АН СССР. Т. 21, вып. 83-84. М.: АН СССР, 1961.

2. Литвин Ф.Л. Функция перемещения и передаточное число поводкового механизма // Анализ и синтез механизмов и теория передач. М.: Наука, 1965. С. 5-11.
3. Литвин Ф.Л. Проектирование механизмов и деталей приборов. Л.: Машиностроение, 1973. 696 с.
4. Тимофеев Б.П., Уланов А.А. Кинематика традиционных передач // Теория механизмов и машин. 2013. Т. 11, № 2 (22). С. 73-88.
5. Тимофеев Б.П., Сачков М.Ю. Колесо для передачи вращательного движения: пат. 146159 Российская Федерация. 2014. Бюл. № 28.

The Influence of the Mounting Errors in Rod-Toothed Transmissions

M.Yu. Sachkov^{1,*}, B.P. Timofeev¹

[*Urie2006@yandex.ru](mailto:Urie2006@yandex.ru)

¹St. Petersburg National Research University of Information Technologies,
Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

Keywords: rod-toothed transmission, function of the position, error reduction ratio, the error of position, installation errors

In the paper we consider an approximate transmission. The work is aimed at development of gear-powered transmission on parallel axes, which is RF patent-protected. The paper justifies a relevance of the synthesis of new kinds of engagement with the simplified geometry of the contacting condition. A typical solution for powered mechanisms received by F. L. Livinin and his disciples is characterized.

The paper describes the arrangement of the coordinate systems used to obtain the function of the position of the gear-powered transmission consisting of two wheels with fifteen leads. For them, also the coordinates of the contact points are obtained, and errors of function of the position in tooth changeover are calculated. To obtain the function position was used a method of matrix transformation and equality of radius and unit normal vectors at the contact point. This transmission can be used in mechanical and instrumentation engineering, and other sectors of the economy. Both reducers and multipliers can be made on its basis. It has high manufacturability (with no special equipment required for its production), and a displacement function is close to linear.

This article describes the influence of the axle spacing error on the quality of the transmission characteristics. The paper presents the graphic based relationships and tabular estimates for nominal axle spacing and offsets within ± 0.2 mm. This error of axle spacing is significant for gearing. From the results of this work we can say that the transmission is almost insensitive to errors of axle spacing. Engagement occurs without an exit of contact point on the lead edge. To solve the obtained system of equations, the numerical methods of the software MathCAD package have been applied.

In the future, the authors expect to consider other possible manufacturing and mounting errors of gear-powered transmission (such as the error of the step, misalignment, etc.) to assess their impact on the quality of engagement.

References

1. Litvin F.L. Analytical methods for investigation of spatial gearing. *Seminar po teorii mashin i mekhanizmov: sb. nauch. tr.* [Seminar on the theory of machines and mechanisms: proc. of the Institute of Machine Science of USSR Academy of Sciences]. Vol. 21, is. 83-84. Moscow, AS USSR AS Publ., 1961. (in Russian).
2. Litvin F.L. Function of move and gear ratio of transmission mechanism. In: *Analiz i sintez mekhanizmov i teoriya peredach* [Analysis and synthesis of mechanisms and theory of transmission]. Moscow, Nauka Publ., 1965, pp. 5-11. (in Russian).
3. Litvin F.L. *Proektirovanie mekhanizmov i detaley priborov* [Design of mechanisms and parts of devices]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1973. 696 p. (in Russian).
4. Timofeev B.P., Ulanov A.A. Kinematics of the traditional gears. *Teoriya mekhanizmov i mashin = The Theory of Mechanisms and Machines*, 2013, vol. 11, no. 2 (22), pp. 73-88. (in Russian).
5. Timofeev B.P., Sachkov M.Yu. *Koleso dlya peredachi vrashchatel'nogo dvizheniya* [Wheel for transmitting rotational motion]. Patent RF, no. 146159, 2014. (in Russian).