Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2014. № 12. С. 819–831.

DOI: **10.7463/1214.0751548**

Представлена в редакцию: 17.12.2014

УДК 534.1

Методика уточнения конечно-элементной модели механической системы с помощью анализа чувствительности

Николаев С. М.[1,*], **Киселёв И. А.**[1], **Жулёв В. А.**[1], **Воронов П. С.**[1]

[*]nikolaev.sergei@outlook.com

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Повышение геометрической детализации моделей, построенных с помощью метода конечных элементов, не всегда приводит к повышению точности модели, в первую очередь из-за трудностей в моделировании мест стыков отдельных деталей и крепления изделия в целом, а также из-за необходимости определения параметров демпфирования. В рамках данной работы рассмотрены некоторые особенности процедуры автоматизированного уточнения конечно-элементной модели по известным экспериментальным данным с помощью анализа чувствительности. Представлены основные зависимости, использующиеся для оценки параметров корреляции между результатами моделирования и результатами модальных испытаний, а также алгоритм уточнения численной модели на основе соответствующих экспериментальных данных.

Ключевые слова: модальный анализ, анализ чувствительности, корреляция, уточнение конечно-элементной модели

Введение

Разработка современных сложных многокомпонентных технических систем требует тщательного выбора параметров отдельных подсистем и настройки их совместного функционирования, позволяющей добиться требуемых характеристик по прочности, точности, надежности, экономичности, маневренности и другим параметрам всего изделия в целом. Современные численные модели конструкций, построенные с использованием метода конечных элементов (МКЭ), позволяют выполнять моделирование динамического поведения изделий с самой высокой степенью конструктивной сложности под действием различных типов нагрузок. Однако, повышение детализации не всегда приводит к повышению точности динамической модели, в первую очередь из-за трудностей в моделировании мест стыков отдельных деталей и крепления изделия в целом, а также из-за необходимости определения параметров демпфирования. Поэтому перед использованием численной модели для расчета режимов функционирования изделия или его оптимизации требуется осуществить экспериментальную проверку и, при необходимости, корректировку (уточнение) численной модели с целью повышения достоверности результатов ее работы.

В течение последних десятилетий, методика уточнения конечно-элементной модели с использованием данных экспериментального модального анализа видоизменилась от попыток непосредственной ручной калибровки малого количества параметров модели по отдельным собственным частотам конструкции, до полуавтоматических итерационных методов [1, 4], позволяющих осуществить настройку одновременно для большого количества собственных частот и форм колебаний за счет подбора поля эквивалентных механических свойств в выбранных областях конструкции. Несмотря на большое количество разработок в этой области, в настоящее время лишь в нескольких коммерческих программных продуктах (LMS, MeScope, FEMtools) представлены необходимые средства и инструменты для подобного уточнения конечно-элементных моделей [1, 4, 5].

Под уточнением конечно-элементной модели подразумевается процесс такого изменения ее параметров, которое сводит к минимуму отличия между результатами моделирования и соответствующими результатами натурных измерений. В случае настройки динамических моделей в качестве экспериментальных данных, как правило, выступают результаты экспериментального модального анализа: собственные частоты, формы колебаний и параметры демпфирования.

В рамках данной работы рассмотрены некоторые особенности оценки степени корреляции и последующего автоматизированного уточнения КЭ модели по известным экспериментальным данным с помощью анализа чувствительности. Предложен новый алгоритм автоматического поиска соответствующих пар собственных форм колебаний. Представлены результаты работы алгоритма на примере двух конструкций.

Представлены основные зависимости, использующиеся для оценки параметров корреляции между результатами моделирования и результатами модальных испытаний, а также алгоритм уточнения численной модели на основе соответствующих экспериментальных данных.

Оценка степени корреляции результатов моделирования и модальных испытаний

Для первичной оценки степени точности КЭ модели производится вычисление разницы частот и форм колебаний изделия. Сравнение значений собственных частот обычно не составляет труда, так как частоты являются скалярными величинами, тогда как сопоставление собственных векторов требует специального подхода, описанного ниже. Для решения подобной задачи обычно прибегают к построению так называемой MAC-матрицы [3] (матрица модальной достоверности). Значение каждого элемента данной матрицы характеризует степень корреляции соответствующих собственных векторов, при этом значение «1» означает полную корреляцию, а значение «0» означает её полное отсутствие. Обычно хорошо коррелированными считаются собственные вектора со значением MAC-матрицы около 0.75. Каждый элемент данной матрицы определяется по следующему соотношению:

$$\mathrm{MAC}\left(\boldsymbol{\psi}_a^i,\boldsymbol{\psi}_e^j\right)=\frac{\left|\boldsymbol{\psi}_a^{i\,T}\cdot\boldsymbol{\psi}_e^j\right|^2}{\left(\boldsymbol{\psi}_a^{i\,T}\cdot\boldsymbol{\psi}_a^i\right)\cdot\left(\boldsymbol{\psi}_e^{jT}\cdot\boldsymbol{\psi}_e^j\right)} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\psi}_a^i$ – i-ый собственный вектор первого семейства (получен из расчета),

$\boldsymbol{\psi}_e^j$ – j-ый собственный вектор второго семейства (эксперимента).

Для построения MAC-матрицы, необходимо привести расчетные и экспериментальные собственные вектора к одной размерности. Самым простым методом приведения собственных векторов к одной размерности является усечение расчётных собственных векторов к соответствующим узлам КЭ-модели. Для адекватной оценки MAC-матрицы модели, разница между координатами данных узлов и соответствующие им точек установки датчиков должна быть минимальной. Также немаловажно, чтобы степени свободы данных узлов КЭ-модели совпадали по направлению с рабочей осью соответствующего датчика ускорения/перемещения. Для решения задачи поиска соответствующих узлов КЭ-модели, часто прибегают к преобразованию поворота и масштабирования КЭ-модели. Как видно из выражения (1), для построения MAC-матрицы используется свойство ортогональности собственных векторов. Как известно из теории колебаний, собственные вектора механической системы должны быть ортогональны при перемножении через матрицы масс и жёсткости. При построении MAC-матрицы, влиянием неоднородности распределения массы по конструкции пренебрегают, что приводит к невозможности точного выполнения условия ортогональности. Однако, для большинства конструкций данное упрощение является не критичным и позволяет оценить степень ортогональности собственных векторов системы достаточно точно. Достоинством данного подхода является тот факт, что необходимость вычисления редуцированной матрицы масс отпадает.

Для визуализации MAC-матрицы её изображают в виде набора столбцов, высота каждого из которых соответствует соответствующему значению элемента матрицы. Таким образом, если результаты расчета и эксперимента хорошо согласуются друг с другом с точки зрения собственных форм колебаний, MAC-матрица будет близка к единичной матрице. На рис. 1 показан вид типичной MAC-матрицы простой конструкции.

Анализ корреляции, выполняемый на каждой итерации может быть существенно осложнен в связи с тем, что в ходе уточнения модели собственные формы колебаний могут поменяться местами. Таким образом, перед алгоритмом ставится задача корректного нахождения пар соответствующих собственных форм и частот колебаний по значениям MAC-матрицы на каждой итерации. Данная задача решена авторами статьи с помощью алгоритма, блок-схема которого показана на рис. 2.

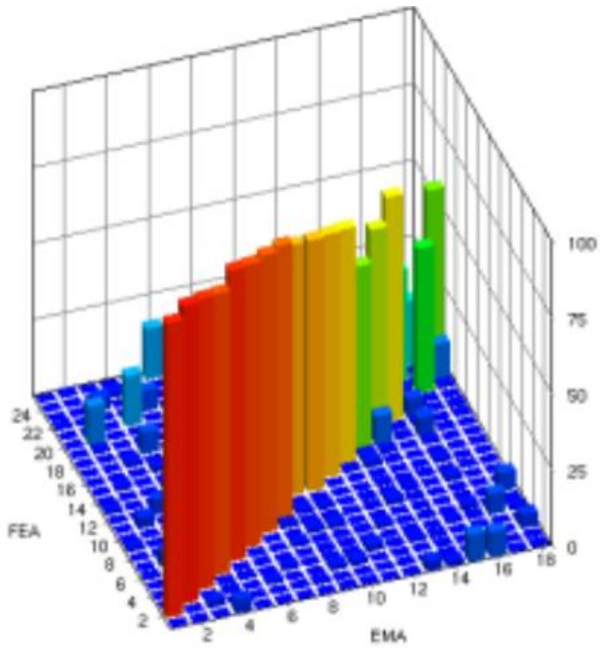

Рисунок 1 – МАС-матрица простой конструкции [9]

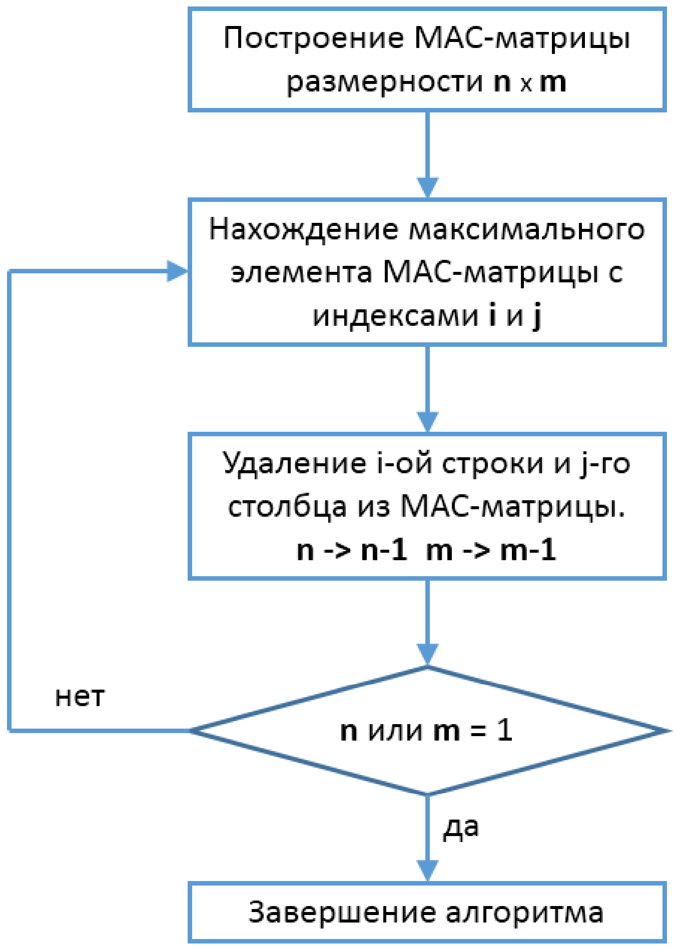

Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма выбора соответствующих собственных форм колебаний

В рамках данного алгоритма, на каждой итерации выбирается одна парам собственных векторов, с соответствующими номерами i и j. Как видно из блок-схемы алгоритма, условием выбора конкретной пары собственных векторов является максимальное значение элемента МАС-матрицы для данных векторов. После определения максимального значения матрицы, столбец и срока, содержащие данный элемент удаляются и процедура нахождения максимума повторяется. Алгоритм завершает свою работу, когда количество строк или столбцов МАС-матрицы оказывается равным единице.

Описанные алгоритмы реализованы в программном продукте, разработанном на языке С++. На рис. 3 представлена визуализация алгоритма на примере поиска соответствующих пар собственных форм колебаний простой конструкции (швеллера).

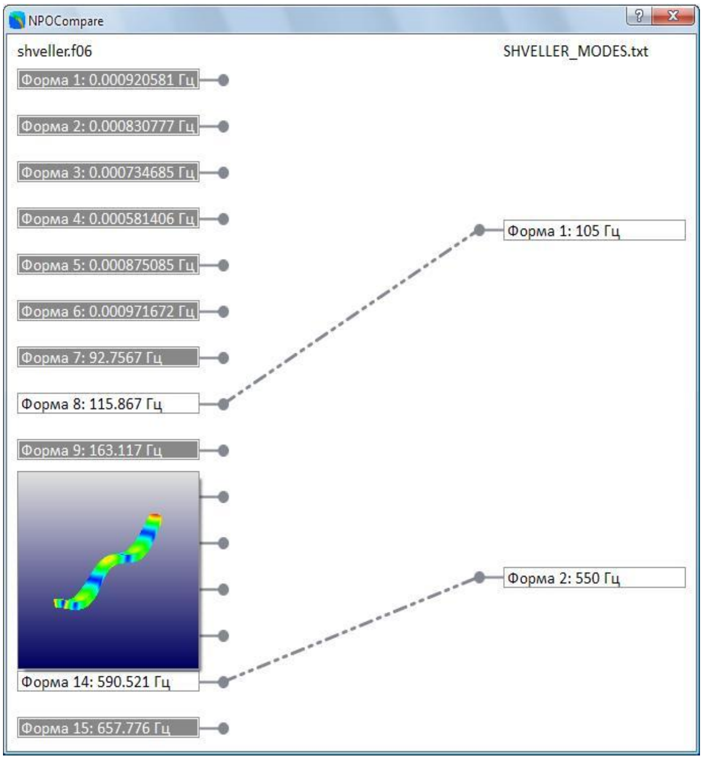

Рисунок 3 – Визуализация работы алгоритма поиска соответвующих форм колебаний на примере простой конструкции

Входной информацией для данной программы являются результаты численного расчета конструкции, выполненного в комплексе MSC.Nastran и результаты экспериментального модального анализа, выполненного в комплексе LMS.TestLab. Ценностью разработанной программы является возможность автоматизированного выбора соответствующих собственных форм.

На рис. 4 представлены результаты визуализации алгоритма на примере более сложной конструкции макета крылатой ракеты.

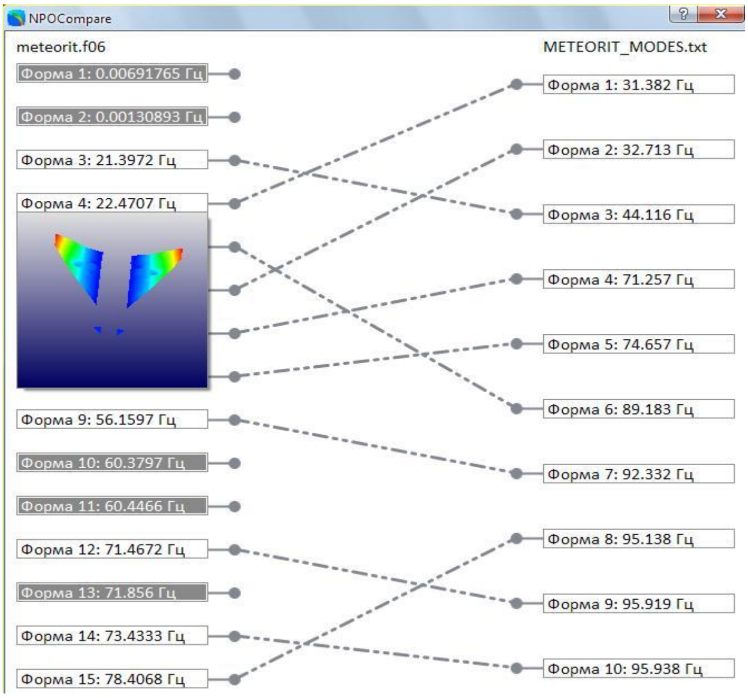

Рисунок 4 – Визуализация работы алгоритма поиска соответвующих форм колебаний на примере конструкции макета крылатой ракеты “МЕТЕОРИТ”

Анализ чувствительности к изменению параметров

После нахождения степени корреляции экспериментальной и расчетной моделей, выполняется так называемый анализ чувствительности. Целью анализа чувствительности является определение степени влияния изменения каждого из параметров на интересующий нас результат моделирования (отклик). Наиболее распространенным является определение чувствительности собственных частот и форм колебаний к изменению модуля упругости или плотности в каждом конечном элементе [4, 5]. Однако, данный подход является довольно общим и может быть использован для нахождения чувствительностей к варьированию любых параметров (например, для нахождения чувствительности значений собственных частот к изменению толщин оболочек, входящих в модель).

Количественно, степень чувствительности отклика с номер j к изменению параметра с номером i определяется как соответствующая производная (2).

$$S_{ij} = \left[\frac{dR_i}{dP_j} \right] \tag{2}$$

На рис. 3 схематично показан смысл коэффициента чувствительности как частной производной в точке.

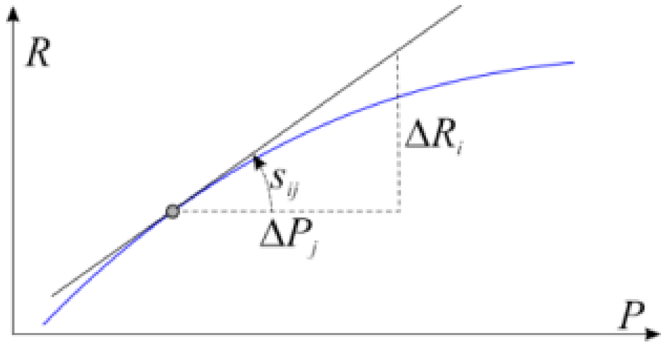

Рисунок 5 – Графическая интерпретация коэффициента чувствительности

Таким образом, каждый коэффициент чувствительности является элементом матрицы чувствительности. В данную матрицу включают коэффициенты чувствительности любых откликов к изменению любых параметров, поэтому в общем и наиболее распространенном случае она является прямоугольной. Для вычисления коэффициента чувствительности можно воспользоваться численным либо аналитическим способом взятия производной от соответствующей функции. Для численного способа нахождения производной используют метод конечных разностей. Стоит отметить, что численный способ нахождения коэффициентов чувствительности является крайне вычислительно-затратным и его стараются избегать с помощью построения аналитических зависимостей для нахождения производных. В частности, для нахождения коэффициента чувствительности собственной частоты колебаний с номером i к изменению модуля упругости в конечном элементе с номером j, используя соотношение Релея, было получено следующее выражение:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}=\frac{\partial \mathrm{f}_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{E}_{\mathrm{j}}}=\frac{\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{jT}}\cdot\mathbf{K}^{\mathrm{j}}\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}}{8\pi^{2}\mathrm{f}_{\mathrm{i}}^{2}\left(\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{jT}}\cdot\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}\right)} \tag{3}$$

где f_i – i-ая собственная частота системы, E_{j} – модуль упругости в j-ом элементе, $\mathbf{K}^{\mathrm{j}}$ – матрица жёсткости j-ого элемента, $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}$ – i-ый собственный вектор, усечённый к степеням свободы, относящимся к j-му элементу, $\mathbf{M}$ – матрица масс системы.

В общем случае, коэффициенты чувствительности рассчитываются для всех конечных элементов конструкции, и модуль упругости изменяется также во всех элементах.

Выбор модулей упругости в конкретных конечных элементах в качестве параметров уточнения модели может быть продиктован стремлением к корректному моделированию мест соединений и стыков без необходимости решения контактной задачи. В этом случае, для расчета коэффициентов чувствительности выбирают только те конечные элементы, которые располагаются непосредственно вблизи зон контакта. При этом, основной целью уточнения модели является нахождение приведенных жёсткостных характеристик мест соединений и стыков. Для корректного решения задачи, следует вводить ограничения на максимально и минимально допустимые значения модуля упругости. В рамках разработанной программы, данные ограничения могут быть заданы пользователем. Следует также отметить, что данная задача может быть решена лишь в линейной постановке, для малых перемещений и деформаций.

Процедура уточнения конечно-элементной модели

После нахождения начальной матрицы коэффициентов чувствительности, появляется возможность выполнить итерационную процедуру уточнения модели, в ходе которой значения параметров модели (физические и геометрические) эволюционируют к значениям, при которых отклонение результатов расчёта от результатов эксперимента по соответствующим откликам (собственные частоты и формы колебаний) стремится к минимуму. Таким образом, задача сводится к многокритериальной, многопараметрической оптимизации. Для линеаризации задачи, на каждом шаге процедуры выполняется разложение векторной функции откликов в ряд Тейлора до первого члена. Для вычисления новых значений параметров применяют псевдообратное преобразование матрицы чувствительности.

Псевдообратную матрицу можно определить, как матрицу, при векторном умножении с правой и левой стороны на которую исходной матрицы, получится исходная матрица, то есть:

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{+}\mathbf{S}=\mathbf{S} \tag{4}$$

Данную матрицу можно использовать для решения систем линейных алгебраических уравнений с избыточным или недостающим числом уравнений. Псевдообратная матрица вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{S}^{+}=\mathbf{S}^{T}\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{T}\right)^{-1} \tag{5}$$

В ходе уточнения конечно-элементной модели, на каждой итерации процедуры, возникает задача решения системы уравнений:

$$\underset{n\times1}{\mathbf{R}_{ref}}=\underset{n\times1}{\mathbf{R}_{i}}+\underset{n\times m}{\mathbf{S}}\cdot\left(\underset{m\times1}{\mathbf{P}_{i+1}}-\underset{m\times1}{\mathbf{P}_{i}}\right), \tag{6}$$

где

n – количество собственных частот колебаний, определенных из эксперимента;

m – количество собственных частот колебаний, полученных из расчета;

$\mathbf{R}_{ref}$ – вектор опорных значений откликов (собственных частот, собственных векторов колебаний), полученных из эксперимента;

$\mathbf{R}_{i}$ – вектор текущих значений откликов (собственных частот и векторов колебаний), на i-ой итерации.

$\mathbf{S}$ - матрица коэффициентов чувствительности;

$\mathbf{P}_i$ - вектор параметров, подлежащих изменению на i-ой итерации;

$\mathbf{P}_{i+1}$ - вектор параметров, подлежащих изменению на i+1-ой итерации (неизвестны);

Используя определение псевдообратной матрицы решение уравнения (6) выглядит следующим образом:

$$\underset{m\times 1}{\mathbf{P}_{i+1}} = \underset{m\times 1}{\mathbf{P}_i} + \underset{m\times n}{\mathbf{S}^+} \cdot \left(\underset{n\times 1}{\mathbf{R}_{ref}} - \underset{n\times 1}{\mathbf{R}_i} \right) \tag{7}$$

Полный алгоритм уточнения модели представлен на рис. 4.

Рисунок 6 – Блок-схема алгоритма уточнения модели с помощью анализа чувствительности

Таким образом, на каждом шаге итерационной процедуры вычисляются приращения параметров и невязка постепенно уменьшается до некоторого малого значения. После достижения определенного значения, заданного заранее или после выполнения заданного количества итераций, процедура уточнения модели завершается. После завершения процедуры уточнения выполняется повторная оценка точности модели по описанным выше критериям и делается вывод о корректности модели для её дальнейшего использования.

Заключение

Традиционно основной задачей уточнения модели является подбор таких параметров модели, которые приводят к минимизации разницы между результатами моделирования и модальных испытаний. Это необходимо для того, чтобы иметь возможность перейти от натурных испытаний к численным экспериментам. Методы уточнения расчётных моделей могут быть использованы для интеллектуальной вибродиагностики конструкций, для определения свойств материала, а также для идентификации повреждений в конструкциях. Применение методов уточнения модели для решения столь трудных задач становится возможным с помощью современных методов измерений (2D и 3D бесконтактные измерения), а также современных алгоритмов обработки данных (оценка модальных параметров только по выходному сигналу, фотометрия). Зависимость коэффициентов демпфирования от амплитуды и частоты колебаний вызывает необходимость верифицировать и уточнять нелинейные модели во временной и частотной областях [6, 7, 8]. Программные комплексы для уточнения расчётных моделей должны быть дополнены соответствующими модулями для решения описанных нелинейных задач. Эти расширенные возможности позволят создавать гарантированно точные математические модели, пригодные для модификации и оптимизации сложных конструкций и процессов в индустрии машино- и приборостроения, аэрокосмической области, что в свою очередь является предпосылкой более полного раскрытия потенциала метода конечных элементов в следующих нескольких десятилетиях.

Список литературы

1. Brown D., Allemang R. The Modern Era of Experimental Modal Analysis: One Historical Perspective // Sound & Vibration Magazine. 2007. January - 40th Anniversary Issue. P. 16-25.
2. Friswell M.I., Mottershead J.E. Finite element updating in structural dynamics. Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1999.
3. Modak S.V., Kundra T.K., Nakra B.C. Comparative Study of Model Updating Methods Using Simulated Experimental Data // Computers and Structures. 2002. Vol. 80, no. 5. P. 437-447. DOI: 10.1016/S0045-7949(02)00017-2
4. Dascotte E. Model updating for structural dynamics: past, present and future outlook // Proceedings of the International Conference on Engineering Dynamics (ICED), April 16-18, 2007, Carvoeiro, Algarve, Portugal.
5. Dascotte E. The Use of FE Model Updating and Probabilistic Analysis for Dealing with Uncertainty in Structural Dynamics Simulation // Proceedings of the 2003 Japan Modal Analysis Conference (JMAC), September 10-12, 2003, Tokyo, Japan.
6. Avitabile P. Twenty Years of Structural Dynamic Modification – A Review // Sound and Vibration. 2003. Vol. 37, no. 1. P. 14-27.

7. Nikolaev S., Kiselev I., Voronov S. Mechanical system finite element model refinement using experimental modal analysis // Proceedings of the 5-th International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC), Guimaraes, Portugal, 13-15 May, 2013. Vol. 5. P. 167-170. DOI: 10.13140/2.1.4739.3920
8. Nikolaev S., Voronov S., Kiselev I. Estimation of damping model correctness using experimental modal analysis // Proc. of the International Conference "Vibroengineering PROCEDIA", Poland, Katowice, 13-15 October, 2014. P. 165-169.

Science & Education of the Bauman MSTU
of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU,
2014, no. 12, pp. 819–831.

DOI: **10.7463/1214.0751548**

Received: 17.12.2014

Sensitivity Based Finite Element Model Updating Technique

S.M. Nikolaev[1,*], I.A. Kiselev[1], V.A. Zhulev[1], P.S. Voronov[1]

[*] nikolaev.sergei@outlook.com

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: modal analysis, sensetivity analysis, correlation analysis, finite element model updating

This paper considers some features of evaluating degree of correlation and subsequent automated update of FE model using known experimental data by the sensitivity analysis. It presents the main relationships used to evaluate parameters of correlation between the modelling results and those of modal tests, as well as an algorithm of the numerical model update based on the relevant experimental data.

To obtain a primary evaluating accuracy degree of FE model a difference in frequencies and forms of product vibrations is calculated. Comparison of free frequency values is, usually, easy because frequencies are scalar whereas comparison of eigenvectors demands a special approach related to creation of a matrix of modal reliability

After finding a correlation degree of experimental and computational models, the analysis of sensitivity is made. The aim of the sensitivity analysis is to define how a change of each of parameters impacts on the interesting for us modelling result (response). Quantitatively, a degree of the response sensitivity of number *j* to the change of parameter with number *i* is defined as the corresponding derivative.

After finding an initial matrix of sensitivity coefficients, there is an opportunity to fulfil an iterative procedure of the model update. During the procedure the values of model parameters (physical and geometrical) have been evolving to the values at which a spread of calculation results and results of experiment in corresponding responses tends to a minimum. Thus, the task is reduced to the multi-criterion multi-parameter optimization. For task linearization, at each procedure step a decomposition of vector function of responses in a Taylor row to the first member is carried out. To calculate new values of parameters pseudo-return transformation of the sensitivity matrix is applied.

After completing the update procedure the model accuracy is evaluated again by the criteria described above, and a conclusion is drawn regarding the model correctness for its further use. Techniques to update the computational models can be used to make intellectual vibration

diagnostics of designs, to determine material properties, as well as to identify damages in designs.

References

1. Brown D., Allemang R. The Modern Era of Experimental Modal Analysis: One Historical Perspective. *Sound & Vibration Magazine*, 2007, January - 40th Anniversary Issue, pp. 16-25.
2. Friswell M.I., Mottershead J.E. *Finite element updating in structural dynamics*. Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1999.
3. Modak S.V., Kundra T.K., Nakra B.C. Comparative Study of Model Updating Methods Using Simulated Experimental Data. *Computers and Structures*, 2002, vol. 80, no. 5, pp. 437-447. DOI: 10.1016/S0045-7949(02)00017-2
4. Dascotte E. Model updating for structural dynamics: past, present and future outlook. In: *Proceedings of the International Conference on Engineering Dynamics (ICED)*, April 16-18, 2007, Carvoeiro, Algarve, Portugal.
5. Dascotte E. The Use of FE Model Updating and Probabilistic Analysis for Dealing with Uncertainty in Structural Dynamics Simulation. In: *Proceedings of the 2003 Japan Modal Analysis Conference (JMAC)*, September 10-12, 2003, Tokyo, Japan.
6. Avitabile P. Twenty Years of Structural Dynamic Modification – A Review. *Sound and Vibration*, 2003, vol. 37, no. 1, pp. 14-27.
7. Nikolaev S., Kiselev I., Voronov S. Mechanical system finite element model refinement using experimental modal analysis. In: *Proceedings of the 5-th International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC)*, Guimaraes, Portugal, 13-15 May, 2013. Vol. 5, pp. 167-170. DOI: 10.13140/2.1.4739.3920
8. Nikolaev S., Voronov S., Kiselev I. Estimation of damping model correctness using experimental modal analysis. In: *Proc. of the International Conference "Vibroengineering PROCEDIA"*, Poland, Katowice, 13-15 October, 2014, pp. 165-169.