

УДК 532.582.33

Вычисление распределения давления по поверхности тела вращения методом вихревых элементов

Дергачев С. А.^{1,*}

^{*}sadergachev@gmail.com

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В данной работе проведены расчеты гидродинамического обтекания затупленного стержня с использованием программного пакета на базе метода вихревых элементов. В качестве вихревого элемента используется вихревой симметричный вортон-отрезок. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными, полученными в гидробассейне. Определяется необходимая степень дискретизации поверхности стержня, для получения результатов близких к натурным. В заключении приведена требуемая степень дискретизации, и сделаны выводы о необходимости доработки модели генерации вихревых элементов.

Ключевые слова: аэродинамика, верификация модели, вихревой метод, вихревой элемент, вортон, гидродинамика

Введение

Вихревые лагранжевы методы расчета течений несжимаемой среды получили достаточное распространение как в нашей стране, так и за рубежом [1-5]. Они позволяют с меньшими затратами машинного времени моделировать нестационарные гидродинамические процессы в безграничной несжимаемой среде с учетом эволюции вихревой пелены, в том числе с учетом деформаций или перемещений конструкции или ее звеньев.

Вихревые методы основаны на идее перехода в математической модели от естественных переменных – давления и скорости к другой неизвестной величине – завихренности. При этом, однако, возникает проблема задания граничных условий для завихренности на поверхности тела. Особенно острой эта проблема является при расчете пространственного обтекания тел. Предложены различные способы задания граничных условий. Все они приводят к необходимости построения сетки на обтекаемой поверхности. Достоверность получаемых результатов напрямую зависит от качества этих расчетных схем.

На кафедре «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана развивается модификация метода вихревых элементов, где в качестве вихревого элемента используется симметричный вортон-отрезок [6]. Для удовлетворения граничных условий на поверхности используются замкнутые вортонные рамки [7]. Для расчета нестационарных нагрузок

на трехмерное тело при обтекании его дозвуковым потоком несжимаемой среды создана программа MVE3D которая. хорошо зарекомендовала себя при работе с телами, имеющими удлинение $L/D \leq 6$.

Целью данной отчета является проведение методических расчетов, направленных на выбор наилучших параметров метода вихревых элементов для моделирования распределения давления по поверхности затупленных тел вращения большого удлинения ($L/D > 10$). В таких телах, как показывают эксперименты [8], в зоне перехода между затуплением и цилиндрической частью возникает повышенное давление, которое требуется корректно моделировать для получения адекватных значений аэрогидродинамических характеристик..

1. Постановка задачи и метод решения

В неподвижной системе координат $OXYZ$ рассматривается пространственное обтекание покоящегося абсолютно жесткого тела потоком несжимаемой среды, имеющим малую вязкость $\nu \ll 1$. Переход к безразмерным величинам производится так, что среда на бесконечном удалении от тела имеет плотность $\rho_\infty = 1,0$, давление $p_\infty = 1,0$, скорость $\vec{V}_\infty = \{1,0;0,0;0,0\}^T$. Обтекаемое тело представляет собой цилиндр с безразмерными параметрами: диаметр $d = 0,2$, длина $L = 2,55$. Передняя (наветренная) часть цилиндра имеет эллиптическое затупление с длиной большой полуоси $L_0 = 0,12$. Тело расположено относительно системы координат $OXYZ$ так, что угол атаки составляет $\alpha = 10^\circ$.

Математическая модель включает уравнение неразрывности и уравнение сохранения импульса среды с граничным условием прилипания на обтекаемой поверхности и граничным условием отсутствия возмущений на бесконечном удалении от тела

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \nu \nabla^2 \vec{V} - \nabla \left(\frac{p}{\rho_\infty} \right) \\ \vec{V}(\vec{r}_K) &= 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{V} = \vec{V}_\infty, \lim_{r \rightarrow \infty} p = p_\infty \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки в системе координат $OXYZ$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}_K$ - радиус-вектор точки на поверхности обтекаемого тела, $\vec{V}$, p - скорость и давление среды соответственно. Начальные условия соответствуют режиму бесциркуляционного обтекания тела. Требуется определить распределение давления на поверхности тела $p(\vec{r}_K)$ на установившемся режиме обтекания, когда за телом возникнет вихревой след.

Допущение о несжимаемости среды позволяет определять поле скоростей по полю завихренности $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{\Omega}) + \vec{V}_\infty, \quad (2)$$

где $\vec{V}(\vec{\Omega})$ - поле скоростей, восстановленное с использованием закона Био-Савара.

Допущение о малой вязкости среды позволяет использовать подход Прандтля, то есть не рассматривать влияние вязкости в области течения, а учитывать влияние вязкости только как причину генерации завихренности $\vec{\Omega}_K$ в тонком пристеночном слое вблизи поверхности тела возникающей при удовлетворении граничного условия прилипания. Гипотеза Лайтхилла о потоке завихренности со всей поверхности обтекаемого тела [9] позволяет определить интенсивность генерируемой завихренности из условия непротекания поверхности тела.

$$\vec{V}(\vec{r}_K) \cdot \vec{n}_K = (\vec{V}(\vec{\Omega}) + \vec{V}(\vec{\Omega}_K) + \vec{V}_\infty) \cdot \vec{n}_K = 0, \quad (3)$$

где $\vec{n}_K$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела в точке $\vec{r}_K$.

Таким образом, от системы (1) можно перейти к лагранжевому описанию эволюции завихренности. Уравнение сохранения импульса среды в лагранжевой постановке с учетом допущения о малой вязкости среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{r}}{Dt} &= \vec{V} \\ \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{V} \end{aligned} \quad (4)$$

с начальным условием $\vec{\Omega}|_{t=0} = \vec{\Omega}_0$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор лагранжевой точки среды в системе координат $OXYZ$.

Для решения (4) используется численный метод вихревых элементов. Поле завихренности представляется в виде суперпозиции N_v элементарных полей – вихревых элементов (ВЭ)

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_v} \vec{\Omega}_{0i}(\vec{r}, \vec{r}_{0i}(t), \vec{h}_i(t), \Gamma(t))$$

Каждый ВЭ характеризуется тремя параметрами: маркером $\vec{r}_{0i}(t)$, движущимся по траектории жидкой частицы, вектором $\vec{h}_i(t)$, и интенсивностью $\Gamma_i(t)$. В качестве вихревого элемента используется симметричный вортон-отрезок для которого найдены аналитические выражения для скорости $\vec{V}(\vec{r}, \vec{r}_{0i}(t), \vec{h}_i(t), \Gamma(t))$ и ее градиента $\nabla \vec{V}(\vec{r}, \vec{r}_{0i}(t), \vec{h}_i(t), \Gamma(t))$, описанные подробно в [4]. Для исключения неограниченного роста скоростей и их производных при приближении к оси ВЭ, вводится радиус ВЭ ε – трубки, внутри которой индуцированные скорости и их производные убывают по линейному закону до нуля на оси ВЭ.

Эволюция поля завихренности складывается из движения центров ВЭ по жидким линиям, изменения длины и поворота направляющих векторов ВЭ. При движении интенсивность ВЭ не изменяется.

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}_{0i}}{dt} &= \vec{V}(\vec{r}_{0i}, t), \\
\frac{d\vec{h}_i}{dt} &= (\nabla \vec{V}(\vec{r}_{0i})) \cdot \vec{h}_i, \quad (i=1, \dots, N_V) \\
\frac{d\Gamma_i}{dt} &= 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

Начальными условиями для системы уравнений (5) являются параметры ВЭ в момент их рождения в процессе генерации завихренности. Генерация завихренности моделируется рождением N_p ВЭ из M вортонных рамок, образующих расчетную схему на поверхности тела, как описано в [5]. Вортонные рамки обеспечивают замкнутость и соленоидальность вихревой системы вблизи поверхности. Каждая j -тая m_j -угольная вихревая рамка задана радиусами-векторами вершин $\vec{r}_{sj}$ ($s=1, \dots, m_j$), радиусом-вектором контрольной точки $\vec{k}_j$, внешней нормалью $\vec{n}_{Kj}$ к поверхности в контрольной точке и интенсивностью вихревого слоя γ_j .

Вершины рамок, контрольные точки и нормали заданы геометрической моделью обтекаемого тела, а интенсивность вихревого слоя определяется на каждом шаге интегрирования (5) путем решения системы линейных алгебраических уравнений, полученной из условия непротекания (3) в контрольных точках

$$[\sigma]\{\gamma\} = \{V_n\}, \tag{6}$$

где $[\sigma]$ - матрица нормальных составляющих скосов потока, элементы которой равны

$$\sigma_{lj} = \sum_{s=1}^{m_j} \vec{v}_{sj}(\vec{k}_j) \cdot \vec{n}_{Kj} \quad (\text{здесь } \vec{v}_{sj}(\vec{r}) - \text{вектор влияния ВЭ единичной интенсивности, лежащего}$$

на ребре рамки, начинающемся в вершине $\vec{r}_{sj}$), $\{\gamma\}$ - вектор интенсивностей, $\{V_n\}$ - вектор нормальных составляющих скорости среды в контрольных точках. Поскольку для замкнутой поверхности система (6) вырождена, вводится регуляризирующая переменная и дополнительное условие равенства нулю суммы интенсивностей. Для недеформируемого тела матрица $[\sigma]$ может быть вычислена и обращена перед началом интегрирования (5) и далее интенсивность рамок находится как

$$\{\gamma\} = [\sigma]^{-1} \{V_n\}, \tag{7}$$

После решения (6) происходит разделение рамок на ВЭ. При этом на ребрах соседних рамок рождается один, объединенный ВЭ. Параметры новых ВЭ, генерируемых в момент времени $t = t_k$ выражаются через параметры вортонных рамок

$$\vec{r}_{0i} = \vec{A}_{ri}(\vec{r}_{sj}), \vec{h}_i = \vec{A}_{hi}(\vec{r}_{sj}), \Gamma_i = \vec{A}_{\Gamma i}(\gamma_j), \quad (i=1, \dots, N_p; j=1, \dots, M) \tag{8}$$

Размерность системы (5) при численном интегрировании увеличивается на каждом шаге из-за генерации новых ВЭ

$$N_V(t_{k+1}) = N_V(t_k) + N_p$$

Для новых уравнений системы (5) начальными условиями служат параметры (8).

Давление в контрольных точках рамок определяется при помощи аналога интеграла Коши-Лагранжа

$$p(\vec{r}, t) = p_{\infty} + \rho_{\infty} \left[\frac{\vec{V}_{\infty}^2}{2} - \frac{\vec{V}(\vec{r}, t)^2}{2} + \sum_{i=1}^N \vec{V}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{V}_i(\vec{r}) - I_B(t) \right], \quad (9)$$

где $\vec{V}_i(\vec{r})$ - скорость, индуцируемая i -тым ВЭ I_B - интеграл, учитывающий генерацию ВЭ [10]. Из (9) видно, что чем дальше от тела находится ВЭ, тем меньший вклад он вносит в давление на поверхности тела. Поскольку наибольший вклад в давление вносят ВЭ, находящиеся вблизи тела, при решении задачи ВЭ, выходящие за пределы шара с центром в центре масс тела и радиусом L_{far} , удаляются из расчетной схемы, что позволяет уменьшить рост размерности системы (5). Также рост размерности (5) ограничивается введением реструктуризации вихревого следа: соседние ВЭ объединяются.

Таким образом, численное решение задачи (1) на интервале времени $0 \leq t \leq t_k$ сводится к выполнению вычислительного цикла с шагом по времени Δt , содержащего $N_T = t_k / \Delta t$ шагов. На каждом шаге выполняются следующие операции:

1. Вычисляется вектор $\{V_n\}$
2. По формуле (7) находится вектор $\{\gamma\}$
3. Генерируется N_p ВЭ с параметрами (8) и увеличивается размерность (5)
4. Вычисляется распределение давления на теле по формуле (9)
5. Решается (5) методом первого порядка, определяются параметры ВЭ на следующем шаге
6. Проводится реструктуризация ВЭ для уменьшения размерности (5)

Для проведения расчетов использован алгоритм численного решения задачи, реализованный в программе MVE3D.

2. Результаты расчетов

На результаты, получаемые методом вихревых элементов, оказывают влияние основные параметры расчетной схемы: радиус ВЭ ε , определяющий гладкость поля скоростей, восстанавливаемого по закону Био-Савара в (2); шаг интегрирования (5), совпадающий с шагом расчета Δt ; форма, размеры и количество рамок, используемых для удовлетворения граничного условия на теле. Методические расчеты, выполненные ранее, показывают [], что первые два параметра зависят от характерного размера ребра рамки Δl

$$\Delta t \approx \frac{\Delta l}{|\vec{V}_{\infty}|}, \quad \frac{\Delta l}{2} \leq \varepsilon \leq 2\Delta l$$

Это показывает, что построение сетки из вихревых рамок на поверхности тела также важно, как построение сетки в расчетной области для сеточных методов. Поскольку от количества рамок M зависит скорость роста размерности системы (5), а, следовательно, и

трудоемкость вычислений, требуется провести методическое исследование и определить M , при котором получаемые результаты могут быть использованы в инженерных расчетах.

При проведении исследований на поверхности геометрической модели обтекаемого тела строилась регулярная сетка из четырехугольных вихревых рамок, как показано на рис. 1. Количество рамок вдоль образующей равно N , а в окружном направлении равно N_o . Расчетная схема дополняется двумя многоугольными (количество вершин равно N_o) рамками в полюсах. Общее число рамок равно $M = N \cdot N_o + 2$.

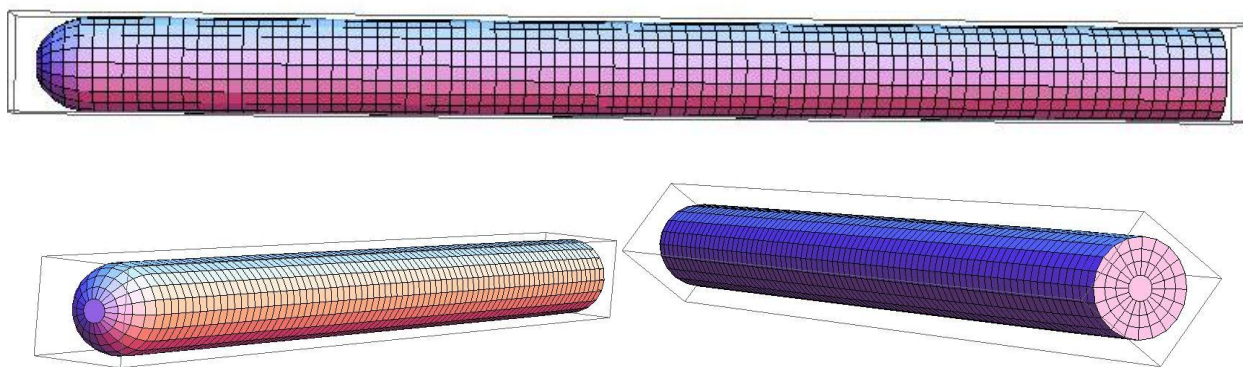


Рис. 1. Набор рамок, моделирующих поверхность обтекаемого тела ($N=85$ и $N_o=20$).

Получаемые в расчетах результаты сравнивались с результатами эксперимента, который был проведен в опытовом бассейне ЦНИИ имени академика А.Н.Крылова в 2004 году совместно с ОАО "ВПК "НПО Машиностроения". В ходе этого эксперимента были получены значения коэффициента давления $C_p = 2(p - p_\infty)/(\rho_\infty V_\infty^2)$ в ряде точек на поверхности тела.

Также было проведено сравнение результатов, полученных методом вихревых элементов с результатами расчета распределения давления по поверхности тела, полученными сеточным методом конечных объемов (МКО) в программе SolidWorks FlowSimulation 2010. Моделирование было проведено в двух вариантах с разной дискретизацией сетки. Заметной разницы при увеличении дискретизации с 900000 ячеек до 1800000 ячеек не обнаружилось.

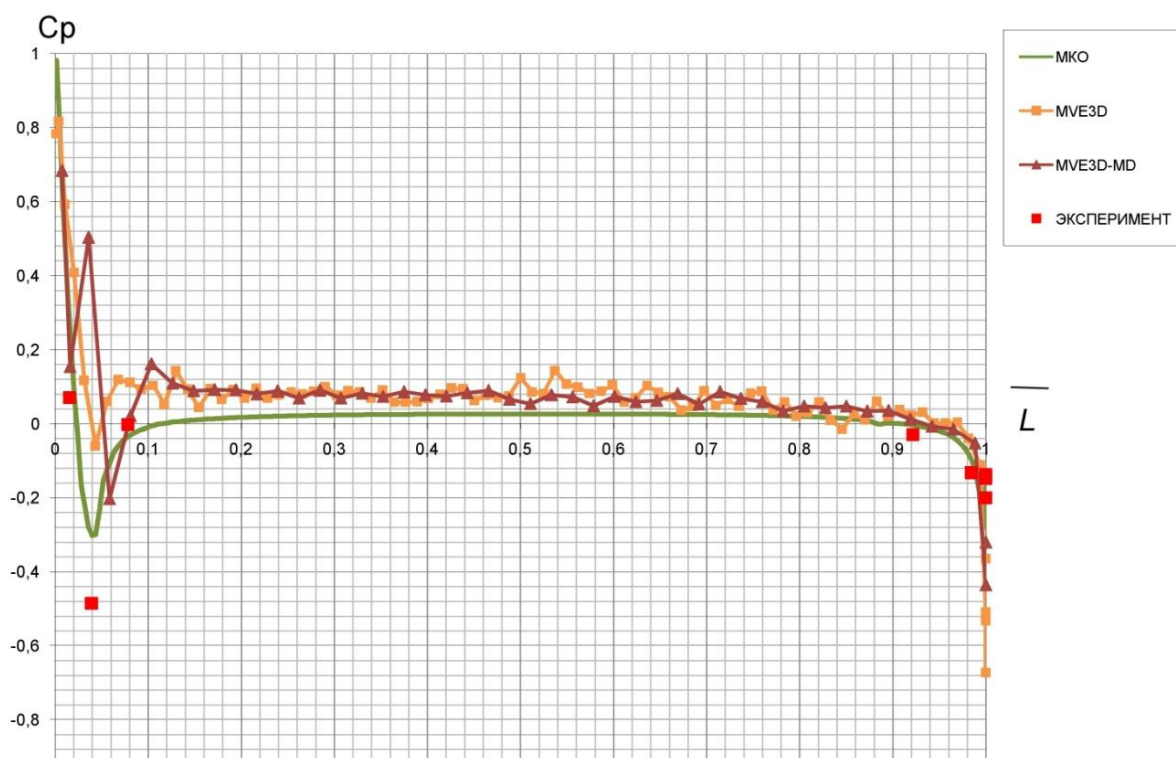
В ходе исследования рассматривались различные варианты дискретизации тела. Параметры лежали в пределах $45 \leq N \leq 119$, $10 \leq N_o \leq 30$. Общее число рамок находилось в пределах $450 \leq M \leq 3570$. Время расчета $N_T = 3000$ шагов составило $5 < t < 35$ часов.

Расчеты показали, что наименьшая дискретизация, позволившая получить результаты, близкие к данным эксперимента определялась параметрами $N = 85$, $N_o = 20$. Это дает

$M = 1702$ и $\Delta l \approx 0,03$. Отсюда радиус вихревого элемента принят равным $\varepsilon = \Delta l / 2 = 0,015$, а шаг интегрирования $\Delta t = 0,015$. При меньшей дискретизации не удавалось воспроизвести пик давления в зоне перехода от затупления к цилиндрической части тела. При большей дискретизации уменьшение шага интегрирования приводило к резкому росту размерности (5) и увеличению времени расчета поля скоростей по формуле (2) пропорционально N_v^3 .

Результаты сравнения распределения коэффициента давления по нижней (наветренной) и верхней (подветренной) образующим тела вращения в сравнении с данными эксперимента приведены на рис.2. На рисунках показаны зависимости коэффициента давления C_p от приведенной координаты $\bar{L}$. $\bar{L} = \frac{L}{L_T}$, где L – удаленность точки от сферического затупления в продольном направлении, L_T – длина тела.

Эпюры получены путем осреднения по заключительным шагам интегрирования. Там же приведены эпюры, полученные методом конечного объема. Результаты полученные с помощью MVE3D при достаточной дискретизации ($N = 85$, $N_o = 20$) обозначены «MVE3D», а при малой дискретизации ($N = 45$, $N_o = 10$) обозначены «MVE3D-MD».



а)



б)

Рис.2. Распределения давления на нижней (а) и верхней (б) образующих тела вращения

Как следует из рис.2 наилучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных достигается на верхней образующей. Здесь удастся моделировать как пиковое значение коэффициента давления, так и общий вид эпюры. Результаты распределения давления полученные с помощью МКО и метода вихревых элементов отличаются не более чем на три процента. В то же время точность моделирования распределения коэффициента давления по нижней образующей оказывается низкой, что связано, скорее всего, с малой дискретизацией в зоне перехода от эллиптического затупления к цилиндру. Попытка построить расчетную схему, в которой в месте перехода сделано сгущение сетки не привело к повышению точности результатов.

Заключение

В результате проведенных методических экспериментов можно сделать вывод, что при моделировании рассмотренной модификацией метода вихревых элементов обтекания под малыми углами атаки затупленных тел вращения, имеющих большое удлинение требуется значительная дискретизация обтекаемой поверхности. Характерный размер рамки Δl должен выбираться таким образом, чтобы в зоне перехода от затупления к цилиндрической части было не менее 4 рамок. При этом размеры панелей не должны более чем в два раза отличаться от Δl .

Расчет удлиненных тел приводит к расчетным схемам с размерностью матрицы $[\sigma]$ системы алгебраических уравнений (6) $M > 1700$, что вызывает резкое увеличение времени счета и требует применения параллельных вычислений на большом количестве процессоров.

Для повышения точности метода вихревых элементов при приемлемых затратах машинного времени требуется поиск новых моделей, описывающих генерацию завихренности на обтекаемой поверхности.

Список литературы

1. Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы / под ред. С.М. Белоцерковского. М.: ЦАГИ, 2000. 265 с.
2. Калугин В.Т., Мордвинцев Г.Г., Попов В.М. Моделирование процессов обтекания и управления аэродинамическими характеристиками летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 527 с.
3. Alkemade. A.J.Q. On Vortex Atoms and Vortons: PhD Thesis. Delft, The Netherlands, 1994. 209 p.
4. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 320 p.
5. Katz J., Plotkin A. Low-speed aerodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 629 p.
6. Marchevsky I.K., Scheglov G.A. Symmetrical Vortex Fragmenton as a Vortex Element for Incompressible 3D Flow Simulation // In: Computational Fluid Dynamics 2010: Proceedings of the 6th International Conference on Computational Fluid Dynamics. ICCFD6 / ed. by A. Kuzmin. Springer Berlin Heidelberg, 2011. P. 897-898. DOI: [10.1007/978-3-642-17884-9_119](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17884-9_119)
7. Щеглов Г.А. О применении вортонных рамок в методе вихревых частиц // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 104-113.
8. Петров К.П. Аэродинамика транспортных космических систем. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 366 с.
9. Lighthill M.J. Introduction. Boundary Layer Theory // Laminar Boundary Layers / edited by J. Rosenhead. New-York: Oxford University Press, 1963. P. 54-61.
10. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. 184 с.

Vortex Element-Based Calculation Method of Pressure Distribution Over the Rotary Body Surface

S.A. Dergachev^{1,*}

* sadergachev@gmail.com

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: aerodynamic, verification of model, vortex method, vortex element, vorton, hydrodynamics

Vortex element method allows us to simulate unsteady hydrodynamic processes in incompressible environment, taking into account both the evolution of the vortex sheet and the deformation or movements of the construction body or its parts.

To calculate the hydrodynamic characteristics using the vortex element-based method, a MVE3D software package was developed. It uses a symmetrical Vorton-cut as a Vortex element (VE). Closed frames of vortons are used to meet the boundary conditions on the surface.

This software system simulated an incompressible flow around a cylindrical body by elongation $L / D = 13$ with a front spherical blunt at 10° angle of attack. We analyzed the distribution of the pressure coefficient over the body surface on the top and bottom generatrix. The calculated results were compared with known results of experiment.

The paper considers design schemes with the different number of Vorton frames. The radius of VE was also varied. Calculations made it possible to establish the degree of sampling surface needed to produce results close to the experimental ones. It has been shown that an adequate reproduction of the pressure distribution in the transition region from the spherical surface to the cylindrical one requires a high degree of sampling on the windward side.

Based on obtained results we draw conclusion that there is a need to improve the design scheme over the body surface, allowing a more accurate description of the flow vorticity in the field of abruptly changing geometry of streamlined body.

References

1. Belotserkovskiy S.M., ed. *Trekhmernoe otryvnoe obtekanie tel proizvol'noy formy* [Three-dimensional separated flow around bodies of arbitrary shape]. Moscow, TsAGI, 2000. 265 p. (in Russian).
2. Kalugin V.T., Mordvintsev G.G., Popov V.M. *Modelirovanie protsessov obtekaniya i upravleniya aerodinamicheskimi kharakteristikami letatel'nykh apparatov* [Simulation of flow

- and control of aerodynamic characteristics of aircraft]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 527 p. (in Russian).
3. Alkemade. A.J.Q. *On Vortex Atoms and Vortons: PhD Thesis*. Delft, The Netherlands, 1994. 209 p.
 4. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000. 320 p.
 5. Katz J., Plotkin A. *Low-speed aerodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 629 p.
 6. Marchevsky I.K., Scheglov G.A. Symmetrical Vortex Fragmentation as a Vortex Element for Incompressible 3D Flow Simulation. In: Kuzmin A., ed. *Computational Fluid Dynamics 2010: Proceedings of the 6th International Conference on Computational Fluid Dynamics. ICCFD6*. Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 897-898. DOI: [10.1007/978-3-642-17884-9_119](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17884-9_119)
 7. Shcheglov G.A. On Application of Vortex Frames in Method of Vortex Blobs. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural science*, 2008, no. 2, pp. 104-113. (in Russian).
 8. Petrov K.P. *Aerodinamika transportnykh kosmicheskikh sistem* [Aerodynamics of space transportation systems]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 366 p. (in Russian).
 9. Lighthill M.J. Introduction. Boundary Layer Theory. In: Rosenhead J., ed. *Laminar Boundary Layers*. New-York, Oxford University Press, 1963, pp. 54-61.
 10. Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex methods of calculation of non-stationary hydrodynamic loads]. Moscow, MSU Publ., 2006. 184 p. (in Russian).