

УДК 517.938

Решение терминальной задачи для систем 3-го порядка методом орбитальной линеаризации

Касаткина Т. С.^{1,*}, Крищенко А. П.¹

*kasatkina_t_s@mail.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается задача терминального управления для аффинных систем, которые не линеаризуются обратной связью. Предполагается, что заданы начальное и конечное состояния, есть ограничения на управление и состояние. Для данной задачи предлагается метод решения, который изложен для аффинной системы третьего порядка с одним управлением. Эта система описывает процессы, протекающие в химическом реакторе периодического действия с трехкомпонентной смесью.

Ключевые слова: фазовая плоскость; квазиканонический вид; орбитальная линеаризация; терминальное управление

Введение

Управление процессами, протекающими в химических реакторах периодического действия, является актуальной задачей в химической промышленности. В [1] с помощью синтеза глобальной обратной связи решена задача прокладывания траектории температуры в резервуаре химического реактора из заданного начального положения в конечное. Рассмотрен химический реактор периодического действия с трехкомпонентной смесью. В работе [2] предложен метод решения этой задачи с помощью управления на основе скользящих режимов. Недостатками данных подходов является то, что они не позволяют учитывать ограничения, наложенные на управление и состояние, а также управлять всеми переменными состояниями системы.

Разработаны методы учета ограничений при построении управления на основе скользящих режимов [3, 4, 5]. Но ни один из них нельзя назвать универсальным.

Альтернативным подходом к решению задачи прокладывания траектории является построение оптимального управления [6, 7]. Такое построение основывается на принципе максимума Понтрягина. В различных источниках представлены методы учета ограничений на состояние [8], а также ограничения смешанного типа [9]. Однако это требует выполнения

дополнительных условий на постановку задачу [10, 11, 12], что сужает область применимости такого подхода.

Одним из подходов к решению задачи управления процессами в химических реакторах является построение терминального управления, переводящего систему из заданного начального положения в конечное с учетом ограничений на переменные состояния и управления. В работе [13] представлен метод решения терминальных задач методом накрытий. Изложенный метод представляет собой обобщение метода решения задач терминального управления для плоских систем. Однако такой подход влечет за собой увеличение размерности системы. В работе [14] предложено решение этой задачи при дополнительном задании интервала времени для достижения требуемого конечного состояния из заданного начального состояния. В рамках данного подхода не удастся учесть ограничения на температуру внутри резервуара химического реактора и управление.

В данной работе развита концепция, представленная в [14]. Показано, что аффинная система, описывающая протекание процессов в химических реакторах периодического действия, допускает орбитальную линеаризацию. С помощью замены независимой переменной исходная аффинная система преобразуется к виду, эквивалентному линейной стационарной управляемой системе той же размерности. Построено множество управлений, решающих задачу терминального управления, в отличие от метода, предложенного в [14], в рамках которого строится только одно решение терминальной задачи. Каждое решение из построенного множества удовлетворяет ограничениям на состояние и управление. Из этого множества могут быть выбраны решения, удовлетворяющие дополнительным условиям.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 сформулирована постановка задачи. В разд. 2 с помощью замены независимой переменной и диффеоморфизма пространства состояний система преобразуется к каноническому виду. В разд. 3, 4 строится параметрическое множество фазовых кривых, которым соответствуют управления, являющиеся решениями поставленной задачи. Предложены различные оптимизационные критерии, обуславливающие выбор в параметрическом множестве управлений оптимального решения. Указанное параметрическое множество управлений построено в разд. 5. В разд. 6 приведен пример, для которого представлены результаты моделирования состояний системы при найденном решении поставленной задачи терминального управления. В заключении приведено краткое обсуждение полученных результатов.

1. Постановка задачи

Математическая модель порционного химического реактора, используемого для получения вещества B из вещества A имеет вид [1, 2, 15, 16]:

$$\begin{cases} \dot{C}_A = -k_1(T)C_A^2, \\ \dot{C}_B = k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B, \\ \dot{T} = \gamma_1 k_1(T)C_A^2 + \gamma_2 k_2(T)C_B + a_0 + a_1 T + (b_0 + b_1 T)v, \end{cases} \quad (1)$$

где C_A, C_B — относительная концентрация веществ A и B в смеси в порционном реакторе; T — абсолютная температура; $\gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1, b_0, b_1$ — постоянные коэффициенты; v — управление (безразмерное). В системе (1) точка означает дифференцирование по времени $t \in [0, \infty)$, т.е. $(\dot{}) = \frac{d()}{dt}$.

Коэффициенты $k_1(T)$ и $k_2(T)$, характеризующие скорости протекания химических реакций, вычисляются по формулам

$$k_1(T) = A_{10}e^{-E_1/(RT)}, \quad k_2(T) = A_{20}e^{-E_2/(RT)}.$$

где A_{10}, A_{20} — положительные постоянные; E_1, E_2 — энергии активации (некоторые постоянные); R — универсальная газовая постоянная; температура T при этом измеряется в кельвинах.

Далее будем считать, что $E_1 < E_2$. Из физического смысла переменных состояния следует, что допустимые состояния системы (1) удовлетворяют условиям

$$0 < C_A < 1, \quad 0 < C_B < 1, \quad C_A + C_B \leq 1, \quad T > 0. \quad (2)$$

В рассматриваемом порционном реакторе технически реализуемыми управлениями являются температура подаваемого газа и коэффициент передачи тепла окружающей обмотки. Учет области допустимых значений этих управлений приводит к ограничению $v \in [0; 1]$ на управление в системе (1).

Далее для системы (1) рассматривается задача нахождения такого управления v , удовлетворяющего ограничению

$$0 \leq v \leq 1, \quad (3)$$

которое за некоторый интервал времени $[0, t_*]$ переводит систему из заданного начального состояния

$$(C_A, C_B, T)|_{t=0} = (C_{A0}, C_{B0}, T_0) \quad (4)$$

в заданное конечное состояние

$$(C_A, C_B, T)|_{t=t_*} = (C_{A*}, C_{B*}, T_*), \quad (5)$$

при выполнении ограничений на состояния (2).

Для существования решения задачи необходимо, чтобы граничные условия (4)–(5) удовлетворяли дополнительным требованиям

$$\begin{cases} C_{A*} + C_{B*} < C_{A0} + C_{B0}, \\ C_{A*} < C_{A0}, \end{cases}$$

которые следуют из первых двух уравнений системы (1).

2. Орбитальная линеаризация

Обозначим через x вектор переменных состояния системы (1), $x = (x_1, x_2, x_3)^T = (C_A, C_B, T)^T$, и выполним замену управления

$$u = \gamma_1 k_1(T) C_A^2 + \gamma_2 k_2(T) C_B + a_0 + a_1 T + (b_0 + b_1 T) v =$$

$$= \gamma_1 k_1(x_3)x_1^2 + \gamma_2 k_2(x_3)x_2 + a_0 + a_1 x_3 + (b_0 + b_1 x_3)v.$$

В новых переменных система (1) имеет вид

$$\dot{x} = A(x) + Bu, \quad (6)$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} -k_1(x_3)x_1^2 \\ k_1(x_3)x_1^2 - k_2(x_3)x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система (6) является аффинной стационарной системой со скалярным управлением. Один из методов решения задач управления для аффинных систем основан на их линеаризации обратной связью [17]. Можно показать, что система (6) не линеаризуется обратной связью, но оказывается, что она допускает орбитальную линеаризацию [18, 19, 20]. Последнее означает, что для системы (6) существует такая замена независимой переменной, после выполнения которой полученная система линеаризуется обратной связью. В качестве новой независимой переменной в системе (6) выберем величину τ , которая связана с исходным временем t дифференциальным уравнением [15]

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{k_1(x_3)x_1^2}{x_2}, \quad \tau|_{t=0} = 0.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1' = -x_2, \\ x_2' = x_2 - \frac{k_2(x_3)x_2^2}{k_1(x_3)x_1^2}, \\ x_3' = \tilde{u}, \end{cases} \quad (7)$$

где учтена еще одна замена управления

$$\tilde{u} = \frac{x_2}{k_1(x_3)x_1^2} u.$$

В системе (7) и далее штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной $\tau \in [0, \infty)$, т.е. $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\tau}$.

Множество допустимых состояний (2) для исходной системы (1) в переменных x имеет вид

$$\Omega_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^3: 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, x_1 + x_2 \leq 1, x_3 > 0 \right\}, \quad (8)$$

а граничным условиям терминальной задачи соответствуют состояния

$$x_0 = (C_{A0}, C_{B0}, T_0), \quad x_* = (C_{A*}, C_{B*}, T_*).$$

Покажем, что система (7) на множестве (8) эквивалентна системе канонического вида

$$y''' = f(\bar{y}) + g(\bar{y})\tilde{u}, \quad \bar{y} = (y, y', y''). \quad (9)$$

Выберем функцию $y = x_1$ и, дифференцируя ее в силу системы (7), получаем отображение [5] $\Phi: \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^3$, задаваемое равенствами

$$\begin{cases} y = x_1, \\ y' = -x_2, \\ y'' = -x_2 + \frac{k_2(x_3)x_2^2}{k_1(x_3)x_1^2}. \end{cases} \quad (10)$$

Обратное отображение Φ^{-1}

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ x_2 = -y', \\ x_3 = \frac{E_1 - E_2}{R \ln \frac{(y'' - y')y^2 A_{10}}{y'^2 A_{20}}} \end{cases}$$

определено в множестве $\Omega_y = \Phi(\Omega_x) \subset \mathbb{R}^3$, которое задано системой неравенств

$$0 < y < 1, \quad -1 < y' < 0, \quad y - y' \leq 1, \quad 0 < y'' - y' < \frac{A_{20}y'^2}{A_{10}y^2}. \quad (11)$$

Отображение $\Phi: \Omega_x \rightarrow \Omega_y$ является диффеоморфизмом и поэтому система (7) эквивалентна трехмерной стационарной системе канонического вида (9).

Для нахождения функций f и g , входящих в канонический вид (9), продифференцируем последнее соотношение в (10) в силу системы (7) и в полученном выражении перейдем к переменным системы канонического вида. В результате получим, что

$$f(\bar{y}) = y'' + \frac{2(y'' - y')(yy'' - y'^2)}{yy'}, \quad g(\bar{y}) = (y'' - y') \frac{R}{E_2 - E_1} \ln^2 \frac{A_{10}(y'' - y')y^2}{A_{20}y'^2} \quad (12)$$

и функция $g(\bar{y})$ положительна на множестве (11), т.е. система канонического вида (9), (12) регулярна на этом множестве.

Диффеоморфизм Φ позволяет сформулировать для системы (9), (12) эквивалентную терминальную задачу: найти управление $\tilde{u} = \tilde{u}(\tau)$ которое переводит эту систему в множестве Ω_y за некоторый интервал времени $[0, \tau_*]$ (11) из начального состояния

$$\bar{y}|_{\tau=0} = \bar{y}_0 = (y_0, y'_0, y''_0) = \Phi(x_0) \quad (13)$$

в конечное состояние

$$\bar{y}|_{\tau=\tau_*} = \bar{y}_* = (y_*, y'_*, y''_*) = \Phi(x_*), \quad (14)$$

при выполнении ограничений на управление

$$0 \leq \frac{\tilde{u}k_1(x_3)x_1^2 - x_2(\gamma_1k_1(x_3)x_1^2 + \gamma_2k_2(x_3)x_2 + a_0 + a_1x_3)}{x_2(b_0 + b_1x_3)} \Big|_{x=\Phi^{-1}(\bar{y})} \leq 1, \quad (15)$$

которые следуют из (3).

3. Проекция решения на фазовую плоскость

Пусть для системы канонического вида (9), (12) найдено непрерывное управление $\tilde{u} = \tilde{u}(\tau)$, являющееся решением терминальной задачи (13)–(14) при ограничениях (11), (15) на состояния и управления, и $\bar{y}(\tau) = (y(\tau), y'(\tau), y''(\tau))$, $\tau \in [0, \tau_*]$ — соответствующая траектория системы (9), (12). Проекция этой траектории на фазовую плоскость содержится в множестве $y' < 0$. Поэтому в координатах y, y' ее можно задать уравнением $y' = \psi(y)$, $y \in [y_*, y_0]$, где функция $\psi(y) \in C^2[y_*, y_0]$ [6] и имеет следующие свойства.

1. Функция $y(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_*]$, взаимно однозначно соответствующая решению терминальной задачи, совпадает с решением задачи Коши

$$\frac{dy}{d\tau} = \psi(y), \quad y(\tau)|_{\tau=0} = y_0. \quad (16)$$

2. Справедливы равенства

$$\begin{cases} y' = y'(\tau) = \psi(y), \\ y'' = y''(\tau) = \frac{d\psi(y)}{dy} \frac{dy}{d\tau} = \frac{d\psi(y)}{dy} y' = \frac{d\psi(y)}{dy} \psi(y), \\ y''' = y'''(\tau) = \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} \psi^2(y) + \left(\frac{d\psi(y)}{dy} \right)^2 \psi(y), \end{cases} \quad (17)$$

где $y = y(\tau)$.

3. Функция $\psi(y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{cases} \psi(y)|_{y=y_0} = y'_0, & \psi(y)|_{y=y_*} = y'_*, \\ \frac{d\psi(y)}{dy}|_{y=y_0} = \frac{y''_0}{y'_0}, & \frac{d\psi(y)}{dy}|_{y=y_*} = \frac{y''_*}{y'_*}, \end{cases} \quad (18)$$

а на отрезке $[y_*, y_0]$ неравенствам

$$y - 1 < \psi(y) < 0, \quad (19)$$

$$1 + \frac{A_{20}\psi(y)}{A_{10}y^2} < \frac{d\psi(y)}{dy} < 1. \quad (20)$$

4. Управление $\tilde{u}(\tau)$, являющееся решением терминальной задачи, восстанавливается по функции $\psi(y)$, поскольку

$$\tilde{u}(\tau) = (y'''(\tau) - f(\bar{y}(\tau)))/g(\bar{y}(\tau)) \quad (21)$$

и с учетом равенств (12), (17) управление $\tilde{u}(\tau)$ можно рассматривать как функцию от $\psi(y)$, $\frac{d\psi(y)}{dy}$, $\frac{d^2\psi(y)}{dy^2}$, где $y = y(\tau)$ — решение задачи Коши (16).

Из неравенства (20) следует, что кривые

$$y = \psi_1(y), \quad y = \psi_2(y),$$

где функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ являются решением задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dy} &= 1 + \frac{A_{20}\psi_1}{A_{10}y^2}, \quad \psi_1|_{y=y_0} = y'_0, \\ \frac{d\psi_2}{dy} &= 1, \quad \psi_2|_{y=y_0} = y'_0,\end{aligned}$$

$(\psi_2(y) = y + y'_0 - y_0)$ ограничивают в множестве

$$0 < y < 1, \quad y - 1 < y' < 0$$

подмножество, содержащее проекцию на фазовую плоскость области достижимости начального состояния (13).

Любая функция из $C^2[y_*, y_0]$, удовлетворяющая граничным условиям (18) и неравенствам (19)–(20), согласно четвертому свойству определяет управление (21). Если для этого управления выполнено ограничение (15), то оно является решением рассматриваемой терминальной задачи.

4. Поиск функции $\psi(y)$

Будем искать $\psi(y)$ в однопараметрическом множестве функций

$$\psi_d(y) = \psi_0(y) + d(y - y_*)^2(y - y_0)^2, \quad y \in [y_*, y_0], \quad (22)$$

где функция

$$\psi_0(y) = y'_0 + \frac{y''_0}{y'_0}(y - y_0) + k_1(y - y_0)^2 + k_2(y - y_0)^3$$

со значениями параметров

$$k_1 = \frac{3a_1 - a_2\Delta}{\Delta^2}, \quad k_2 = \frac{-2a_1 + a_2\Delta}{\Delta^3}, \quad \Delta = y_* - y_0 < 0, \quad a_1 = y'_* - y'_0 - \frac{y''_0}{y'_0}\Delta, \quad a_2 = \frac{y''_*}{y'_*} - \frac{y''_0}{y'_0}$$

обеспечивает выполнение граничных условий (18).

Для выполнения на отрезке $[y_0, y_*]$ ограничений, заданных неравенствами (15), (19)–(20), используем параметр d . Соответствующая численная процедура состоит из двух шагов. На первом шаге находится множество всех значений этого параметра при которых выполнено неравенство (19). Поскольку $\psi_d(y)$ при фиксированном $y \in [y_0, y_*]$ является монотонной функцией параметра d , то это множество совпадает с некоторым интервалом (d_-, d_+) . После его нахождения на втором шаге находятся множество D тех значений $d \in (d_-, d_+)$, при которых выполняются ограничения (15) и (20). Каждое такое значение определяет искомую функцию $\psi_d(y)$.

Для наилучшего выбора значения параметра d в множестве D могут быть использованы разные критерии, например:

а) наименьшее время движения по траектории

$$\min_{d \in [d_-, d_+]} t_*;$$

б) наименьшее изменение температуры

$$\min_{d \in [d_-, d_+]} \left| \max_{t \in [0, t_*]} T - \min_{t \in [0, t_*]} T \right|$$

(это характеризует наиболее плавный процесс протекания химической реакции в резервуаре);

в) наименьшее изменение управления

$$\min_{d \in [d_-, d_+]} \left| \max_{t \in [0, t_*]} u - \min_{t \in [0, t_*]} u \right|$$

(это обеспечивает наиболее плавное изменение управляющего воздействия).

Выбор критерия определяется особенностями конкретного технологического процесса.

5. Построение управления и траектории системы

Предположим, что искомая функция $\psi_d(y)$ найдена. Тогда она задает траектории систем (1), (6) и (9)–(12), а также реализующие их управления, которые являются решениями указанных выше терминальных задач для этих систем. Соответствующие зависимости можно представить как в виде функций от переменной y так и в виде функций от независимых переменных этих систем (t или τ).

Действительно, для системы (9)–(12) траектория имеет вид

$$y' = y'_d = \psi_d(y), \quad y'' = y''_d = \frac{d\psi_d(y)}{dy} \psi_d(y). \quad (23)$$

Она реализуется управлением

$$\tilde{u} = \tilde{u}_d = \frac{y_d''' - f(\bar{y}_d)}{g(\bar{y}_d)}, \quad (24)$$

где

$$\begin{cases} y_d''' = \frac{d^2\psi_d(y)}{dy^2} \psi_d^2(y) + \left(\frac{d\psi_d(y)}{dy} \right)^2 \psi_d(y), \\ f(\bar{y}_d) = y_d'' + \frac{2(y_d'' - y'_d)(yy_d'' - y_d'^2)}{yy_d'}, \\ g(\bar{y}_d) = (y_d'' - y'_d) \frac{R}{E_2 - E_1} \ln^2 \frac{A_{10}(y_d'' - y'_d)y^2}{A_{20}y_d'^2}. \end{cases}$$

Чтобы получить траекторию (23) и управление (24) в виде функций от τ достаточно воспользоваться тем, что $y = y_d(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_*]$, где функция $y_d(\tau)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dy}{d\tau} = \psi_d(y), \quad y(\tau)|_{\tau=0} = y_0,$$

а

$$\tau_* = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_d(y)}.$$

Для системы (6) траектория имеет вид

$$x_1 = x_{1d} = y, \quad x_2 = x_{2d} = -y'_d, \quad x_3 = x_{3d} = \frac{E_1 - E_2}{R \ln \frac{(y''_d - y'_d)y^2 A_{10}}{y'^2_d A_{20}}}, \quad (25)$$

а реализующее ее управление —

$$u = u_d = \frac{\tilde{u}_d k_1(x_{3d}) x_{1d}^2}{x_{2d}}. \quad (26)$$

Чтобы получить траекторию (25) и управление (26) в виде функций от t , достаточно воспользоваться тем, что $y = \hat{y}_d(t)$, $t \in [0, t_*]$, где функция $\hat{y}_d(t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = \psi_d(y) \frac{k_1(x_{3d}) x_{1d}^2}{x_{2d}}, \quad y(t)|_{t=0} = y_0,$$

а

$$t_* = \int_{y_0}^{y_*} \frac{x_{2d} dy}{\psi_d(y) k_1(x_{3d}) x_{1d}^2}.$$

Наконец, в системе (1) траектория $(C_A, C_B, T) = (x_{1d}, x_{2d}, x_{3d})$ реализуется управлением

$$v = v_d = \frac{u_d - \gamma_1 k_1(x_{3d}) x_{1d}^2 - \gamma_2 k_2(x_{3d}) x_{2d} - a_0 - a_1 x_{3d}}{b_0 + b_1 x_{3d}}. \quad (27)$$

Их зависимость от времени находится после подстановки $y = \hat{y}_d(t)$.

Чтобы учесть ошибки, возникающие в результате численного интегрирования, вместо программного управления (24) используется стабилизирующее управление

$$u_{st} = \frac{y'''_d - f(\bar{y}) - c_2(y'' - y''_d) - c_1(y' - y'_d) - c_0(y - y_d)}{g(\bar{y})}, \quad (28)$$

где $\bar{y} = (y, y', y'')$ — текущее состояние системы в момент времени τ . Это управление обеспечивает динамику переходных процессов в отклонениях от программной траектории в соответствии с уравнением

$$y''' - y'''_d + c_2(y'' - y''_d) + c_1(y' - y'_d) + c_0(y - y_d) = 0. \quad (29)$$

Если коэффициенты c_0, c_1, c_2 выбраны таким образом, что корни многочлена

$$p(\lambda) = \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 \lambda$$

имеют отрицательные действительные части, то программная траектория является асимптотически устойчивым решением уравнения (29). Управление (28) пересчитывается в управления (26) и (27) при интегрировании замкнутых систем по времени t .

6. Пример

Численное моделирование переходных процессов в системе (1) проводилось при следующих значениях параметров [1, 2, 5]:

$$\begin{aligned} A_{10} &= 1,1 \text{ с}^{-1}; & E_1 &= 20900 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; & a_0 &= 34,3337 \frac{\text{К}}{\text{с}}; & b_0 &= -12,571 \frac{\text{К}}{\text{с}}; & \gamma_0 &= 41,8 \frac{\text{К}}{\text{с}}; \\ A_{20} &= 172,2 \text{ с}^{-1}; & E_2 &= 41800 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; & a_1 &= -0,1099 \text{ с}^{-1}; & b_1 &= 0,0515 \text{ с}^{-1}; & \gamma_1 &= 83,6 \frac{\text{К}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

и граничных допустимых состояниях $x_0 = (0,993, 0,007, 298)^T$, $x_* = (0,693, 0,3, 333)^T$.

Оказалось, что при $d = 0$ функция (22) и соответствующее ей управление (27) удовлетворяют всем ограничениям в виде неравенств и, более того, это верно для всех $d \in [-0,12, 0,09]$. Для значений параметра d в указанном диапазоне численно определены значения параметра d , удовлетворяющие следующим квазиоптимизационным критериям:

а) наименьшее значение времени t_* , при котором найдено решение терминальной задачи, составляет 649 с и соответствует значению параметра $d = 0,09$. (на рис. 1 приведены результаты численного моделирования переходных процессов в замкнутой системе и график функции управления);

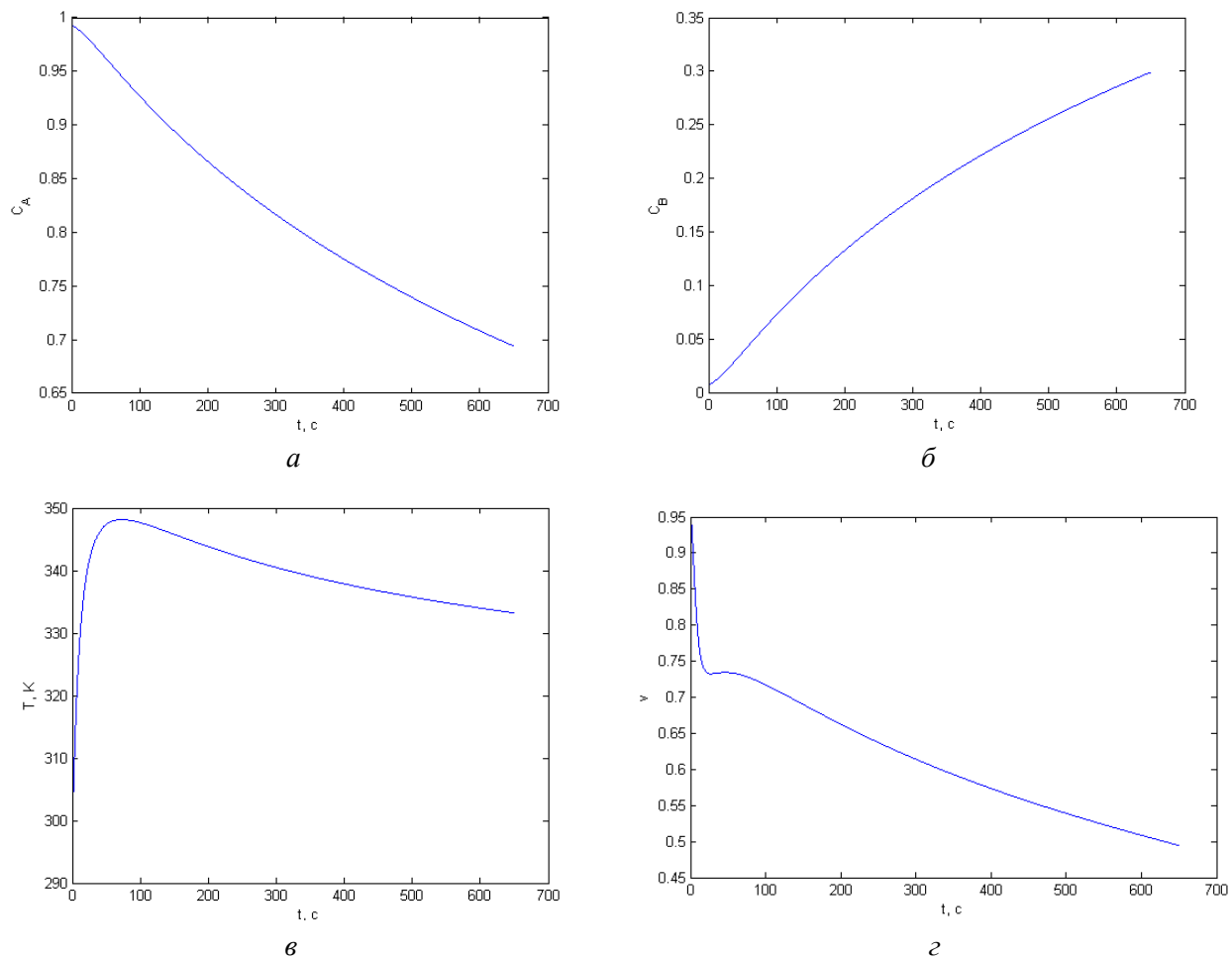


Рис. 1. Моделирование переходных процессов для критерия наименьшего времени: *а* — концентрация C_A ; *б* — концентрация C_B ; *в* — температура; *г* — управление

б) наименьшее значение разницы максимальной и минимальной температуры составляет 45,59 К при $d = -0,12$ (на рис. 2 приведены результаты численного моделирования переходных процессов в замкнутой системе и график функции управления);

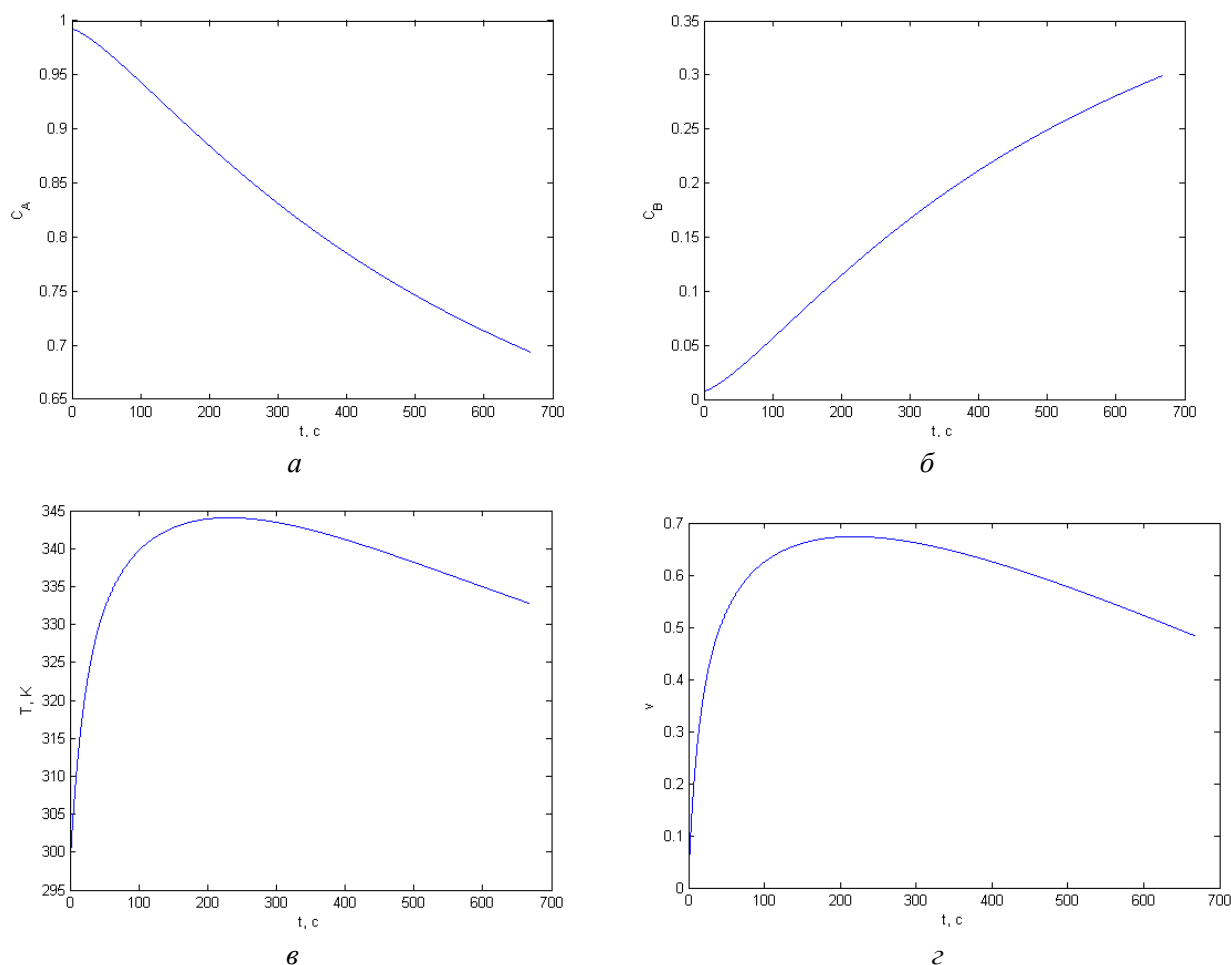


Рис. 2. Моделирование переходных процессов для критерия наименьшего перепада температуры: *a* — концентрация C_A ; *б* — концентрация C_B ; *в* — температура; *г* — управление

в) наименьшее значение разницы максимального и минимального значения управления составляет 0,2046 при $d = -0,01$ (на рис. 3 приведены результаты численного моделирования переходных процессов в замкнутой системе и график функции управления).

Заключение

В работе представлен метод решения задачи терминального управления для аффинных систем 3-го порядка при наличии ограничений на состояние и управление. Данный метод изложен на примере решения терминальной задачи с ограничениями для системы, описывающей процессы, которые протекают в химических реакторах периодического действия с трехкомпонентной смесью. Показано, что аффинная система, описывающая протекание этих процессов, допускает орбитальную линеаризацию с помощью замены независимой переменной и диффеоморфизма пространства состояний.

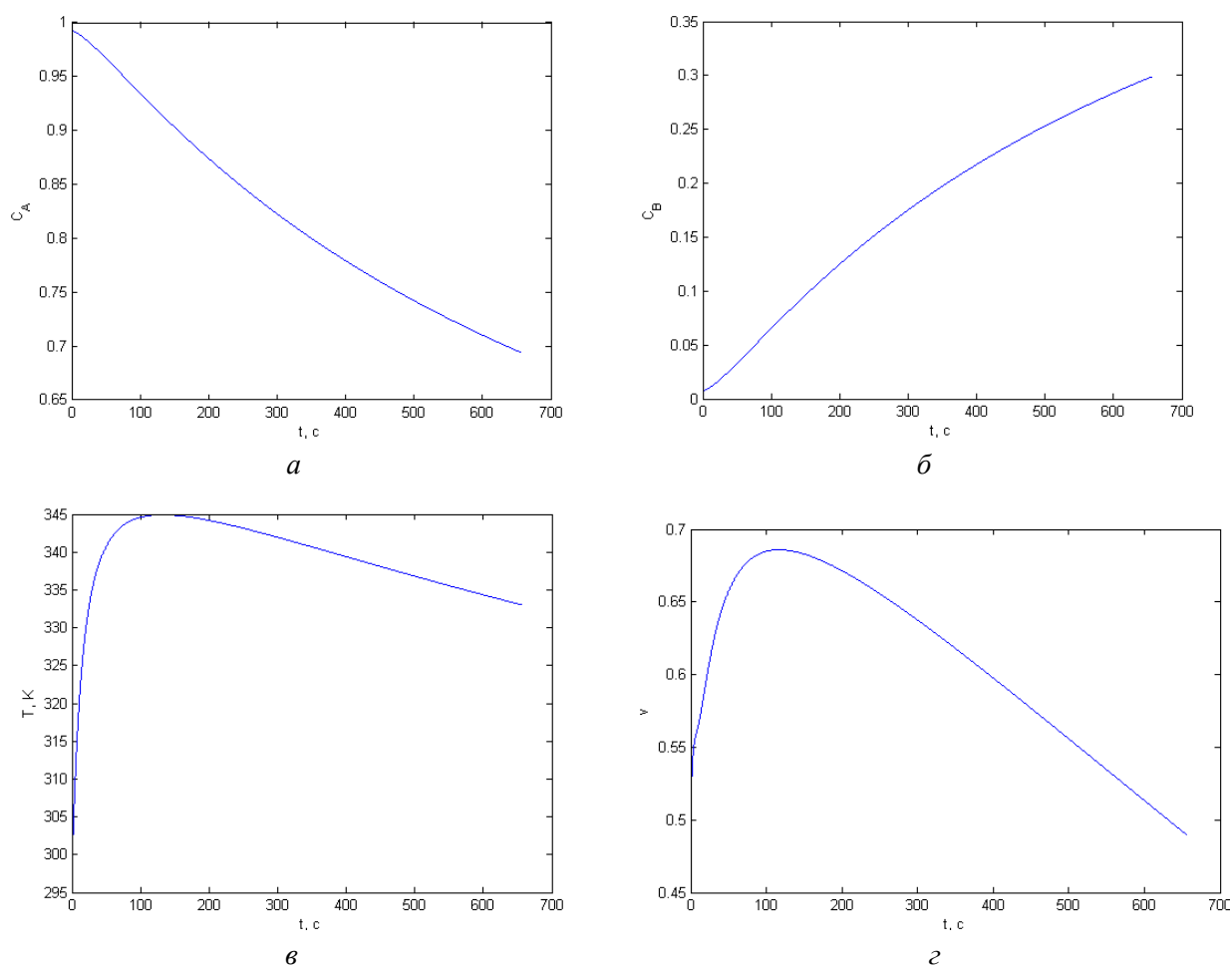


Рис. 3. Моделирование переходных процессов для критерия наименьшего диапазона изменения управления: *а* — концентрация C_A ; *б* — концентрация C_B ; *в* — температура; *г* — управление

Найдено параметрическое множество управлений, переводящих систему из заданного начального положения в конечное.

Преимущество данного подхода заключается в том, что при условии решения задачи терминального управления по всем переменным состояниям найдено параметрическое множество решений. Вариация параметра позволяет строить решения терминальной задачи, которые удовлетворяют различным критериям, определяемым технологическим процессом, что продемонстрировано при анализе результатов численного моделирования в рассмотренном примере.

Работа выполнена в рамках выполнения государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00424, 13-07-00736).

Список литературы

1. Kravaris C., Chung C.-B. Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization // AIChE Journal. 1987. Vol. 33, no. 4. P. 592–603. DOI: [10.1002/aic.690330408](https://doi.org/10.1002/aic.690330408)

2. Chen C.-T. A Sliding Mode Control Strategy for Temperature Trajectory Tracking in Batch Processes // Preprints of the 8th IFAC Symposium on Advances Control Chemical Processes, July 10–13, 2012, Furama Riverfront, Singapore (unpublished).
3. Tanizawa H., Ohta Y. Sliding Mode Control under State and Control Constraints // IEEE International Conference on Control Application, 2007 (CCA 2007). IEEE Publ., 2007. P. 1173–1178. DOI: [10.1109/CCA.2007.4389394](https://doi.org/10.1109/CCA.2007.4389394)
4. Nowacka-Leverton A., Pazderski D., Michalek M., Bartoszewicz A. Experimental Results on Sliding Mode Control of Hoisting Crane Subject to State Constraints // IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering. IEEE Publ., 2010. P. 842–847. DOI: [10.1109/SIBIRCON.2010.5555016](https://doi.org/10.1109/SIBIRCON.2010.5555016)
5. Rubagotti M., Ferrara A. Second Order Sliding Mode Control of a Perturbed Double Integrator with State Constraints // American Control Conference (ACC). Baltimore. June 30 – July 2, 2010. IEEE Publ., 2010. P. 985–990. DOI: [10.1109/ACC.2010.5530711](https://doi.org/10.1109/ACC.2010.5530711)
6. Huifang W., Yangzhou C., Soueres P. A Geometric Algorithm to Compute Time-Optimal Trajectories for a Bidirectional Steered Robot // IEEE Transaction on Robotics. 2009. Vol. 25, is. 2. P. 399–413. DOI: [10.1109/TRO.2009.2015610](https://doi.org/10.1109/TRO.2009.2015610)
7. Velagic J., Delic E. Calculation of optimal trajectories of mobile robot based on minimal curving radius and task free based approach // 13th International Symposium on Information, Communication and Automation Technologies, Sarajevo, 27–29 Oct. 2011. IEEE Publ., 2011. P. 1–8. DOI: [10.1109/ICAT.2011.6102132](https://doi.org/10.1109/ICAT.2011.6102132)
8. Arutyunov A.V., Aseev S.M. The Degeneracy Phenomenon in Optimal Control Problems with State Constraints // Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 1. IEEE Publ., 1997. P. 300–304. DOI: [10.1109/CDC.1997.650635](https://doi.org/10.1109/CDC.1997.650635)
9. Patil D.U., Chakraborty D. Computation of Time Optimal Feedback Control Using Groebner Basis // IEEE Transaction on Automatic Control. 2014. Vol. 59, is. 8. P. 2271–2276. DOI: [10.1109/TAC.2014.2303239](https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2303239)
10. Zeidan V. Second-Order Conditions for Optimal Control Problems with Mixed State-Control Constraints // Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 4. IEEE Publ., 1993. P. 3800–3805. DOI: [10.1109/CDC.1993.325929](https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325929)
11. Pales Z., Zeidan V. Strong Local Optimality Conditions for Control Problems with Mixed State-Control Constraints // 41th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 4. IEEE Publ., 2002. P. 4738–4743. DOI: [10.1109/CDC.2002.1185127](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185127)
12. Bettiol P., Frankowska H. On the Solution Map of Control Systems with Multiple State Constraints // 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta. 15–17 Dec., 2010. IEEE Publ., 2010. P. 3409–3414. DOI: [10.1109/CDC.2002.1185127](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185127)
13. Четвериков В.Н. Метод накрытий для решения задачи терминального управления //

Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 2. С. 125–143.
DOI: [10.7463/0214.0699730](https://doi.org/10.7463/0214.0699730)

14. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Терминальное управление процессами в химических реакторах методом орбитальной линеаризации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. DOI: [10.7463/1013.0612563](https://doi.org/10.7463/1013.0612563)
15. Guay M. An Algorithm for Orbital Feedback Linearization of Single-Input Nonlinear Affine Systems // Systems Control Letters. 1999. Vol. 38, no. 4–5. P. 271–281. DOI: [10.1016/S0167-6911\(99\)00074-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00074-2)
16. Kravaris C., Wright R.A., Carrier J.F. Nonlinear Controllers for Trajectory Tracking in Batch Processes // Computers and Chemical Engineering. 1989. Vol. 13, no. 1–2. P. 73–82. DOI: [10.1016/0098-1354\(89\)89008-8](https://doi.org/10.1016/0098-1354(89)89008-8)
17. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 520 с.
18. Sampei M., Furuta K. On Time Scaling for Nonlinear Systems: Application to Linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31, no. 5. P. 459–462. DOI: [10.1109/TAC.1986.1104290](https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104290)
19. Fang B., Kalker G. Exact Linearization of Nonlinear Systems by Time Scale Transformation // Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado, June 4–6, 2003. Vol. 4. IEEE Publ., 2003. P. 3555–3560. DOI: [10.1109/ACC.2003.1244097](https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1244097)
20. Sekiguchi K., Sampei M. On Multi Time-Scale Form of Nonlinear Systems // 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Toulouse, France, September 4–6, 2013. Toulouse: LAAS-CNRS, 2013. P. 524–530.

Solving the Terminal Problem for the Third Order Systems Using the Orbital Linearization

Kasatkina T. S.^{1,*}, Krishchenko A. P.¹

*kasatkina_t_s@mail.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: phase plane, quasicanonical form, orbital linearization, terminal control

The paper considers a terminal problem for affine systems, which are not feedback linearizable. It is assumed that in the problem, besides the endpoint states, there are restrictions for state and control. The solution method for this problem is proposed which is based on the change of the independent variable. The using method is demonstrated on the 3rd order affine system with one control, which describes processes in a batch chemical reactor with a three-component mixture.

Temperature tracking problem is discussed in different articles. In these papers global linearization [1] and sliding mode control [2] approach are described. But that approaches don't let solve the terminal control problem for all state variables. Scheme of solution of the terminal control problem for all state variables is suggested in [3], but the solution, which is obtained using this approach, is single. Moreover, the algorithm doesn't consider the restrictions on the state and control. Advantage of an approach, described in this paper, is a synthesis of a set of the terminal problem solutions taking into consideration existing restrictions. Thus, solutions, which satisfy some extra conditions, can be chosen.

The system was proved to allow an orbital linearization by a feedback. Time-scaling technique was used to solve the terminal problem so that system had new time scale. For the scaled system transformation of state, which transforms the system to the equivalent the same order system of the regular canonical form, was presented. An equivalent terminal control problem was formulated for the system of the canonical form.

Phase trajectory, which is a projection of the solution on the phase plane, was obtained. The trajectory includes parameter. Solution set, which assigns the movement along the phase trajectory, was obtained. Solution set of the original terminal problem was reconstructed. Parameter variation gives an additional freedom degree of the terminal problem solution.

Obtained results were illustrated by numerical modeling.

References

1. Kravaris C., Chung C.-B. Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization. *AIChE Journal*, 1987, vol. 33, no. 4, pp. 592–603. DOI: [10.1002/aic.690330408](https://doi.org/10.1002/aic.690330408)
2. Chen C.-T. A Sliding Mode Control Strategy for Temperature Trajectory Tracking in Batch Processes. *Preprints of the 8th IFAC Symposium on Advanced Control Chemical Processes*, July 10–13, 2012, Furama Riverfront, Singapore (unpublished).
3. Tanizawa H., Ohta Y. Sliding Mode Control under State and Control Constraints. *IEEE International Conference on Control Application, 2007 (CCA 2007)*. IEEE Publ., 2007, pp. 1173–1178. DOI: 10.1109/CCA.2007.4389394 DOI: [10.1109/CCA.2007.4389394](https://doi.org/10.1109/CCA.2007.4389394)
4. Nowacka-Leverton A., Pazderski D., Michalek M., Bartoszewicz A. Experimental Results on Sliding Mode Control of Hoisting Crane Subject to State Constraints. *IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering*. IEEE Publ., 2010, pp. 842–847. DOI: 10.1109/SIBIRCON.2010.5555016 DOI: [10.1109/SIBIRCON.2010.5555016](https://doi.org/10.1109/SIBIRCON.2010.5555016)
5. Rubagotti M., Ferrara A. Second Order Sliding Mode Control of a Perturbed Double Integrator with State Constraints. *American Control Conference (ACC)*. Baltimore. June 30 – July 2, 2010. IEEE Publ., 2010, pp. 985–990. DOI: [10.1109/ACC.2010.5530711](https://doi.org/10.1109/ACC.2010.5530711)
6. Huifang W., Yangzhou C., Soueres P. A Geometric Algorithm to Compute Time-Optimal Trajectories for a Bidirectional Steered Robot. *IEEE Transaction on Robotics*, 2009, vol. 25, is. 2, pp. 399–413. DOI: [10.1109/TRO.2009.2015610](https://doi.org/10.1109/TRO.2009.2015610)
7. Velagic J., Delic E. Calculation of optimal trajectories of mobile robot based on minimal curving radius and task free based approach. *13th International Symposium on Information, Communication and Automation Technologies*, Sarajevo, 27-29 Oct. 2011. IEEE Publ., 2011, pp. 1–8. DOI: [10.1109/ICAT.2011.6102132](https://doi.org/10.1109/ICAT.2011.6102132)
8. Arutyunov A.V., Aseev S.M. The Degeneracy Phenomenon in Optimal Control Problems with State Constraints. *Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 1*. IEEE Publ., 1997, pp. 300–304. DOI: [10.1109/CDC.1997.650635](https://doi.org/10.1109/CDC.1997.650635)
9. Patil D.U., Chakraborty D. Computation of Time Optimal Feedback Control Using Groebner Basis. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2014, vol. 59, is. 8, pp. 2271–2276. DOI: [10.1109/TAC.2014.2303239](https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2303239)
10. Zeidan V. Second-Order Conditions for Optimal Control Problems with Mixed State-Control Constraints. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 4*. IEEE Publ., 1993, pp. 3800–3805. DOI: [10.1109/CDC.1993.325929](https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325929)
11. Pales Z., Zeidan V. Strong Local Optimality Conditions for Control Problems with Mixed State-Control Constraints. *41th IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 4*. IEEE Publ., 2002, pp. 4738–4743. DOI: [10.1109/CDC.2002.1185127](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185127)

12. Bettiol P., Frankowska H. On the Solution Map of Control Systems with Multiple State Constraints. *49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, 15–17 Dec., 2010. IEEE Publ., 2010, pp. 3409–3414. DOI: [10.1109/CDC.2002.1185127](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1185127)
13. Chetverikov V.N. The covering method for the solution of terminal control problem. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 2, pp. 125–143. DOI: [10.7463/0214.0699730](https://doi.org/10.7463/0214.0699730) (in Russian).
14. Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Terminal control of processes in chemical reactors using orbital linearization. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 10. DOI: [10.7463/1013.0612563](https://doi.org/10.7463/1013.0612563) (in Russian).
15. Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems. *Systems and Control Letters*, 1999, vol. 38, no. 4–5, pp. 271–281. DOI: [10.1016/S0167-6911\(99\)00074-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00074-2)
16. Kravaris C., Wright R.A., Carrier J.F. Nonlinear Controllers for Trajectory Tracking in Batch Processes. *Computers and Chemical Engineering*, 1989, vol. 13, no. 1–2, pp. 73–82. DOI: [10.1016/0098-1354\(89\)89008-8](https://doi.org/10.1016/0098-1354(89)89008-8)
17. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p. (in Russian).
18. Sampei M., Furuta K. On Time Scaling for Nonlinear Systems: Application to Linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, no. 5, pp. 459–462. DOI: [10.1109/TAC.1986.1104290](https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104290)
19. Fang B., Kalker G. Exact Linearization of Nonlinear Systems by Time Scale Transformation. *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, June 4–6, 2003. Vol. 4. IEEE Publ., 2003, pp. 3555–3560. DOI: [10.1109/ACC.2003.1244097](https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1244097)
20. Sekiguchi K., Sampei M. On Multi Time-Scale Form of Nonlinear Systems. *9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Toulouse, France, September 4–6, 2013. Toulouse, LAAS-CNRS, 2013, pp. 524–530.