Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0408

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 12. С. 738–750.
DOI: 10.7463/1214.0743265
Представлена в редакцию: 02.12.2014
© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 519.71

Стабилизация пассивных динамических систем при наличии возмущений на входе и выходе системы

Голубев А. Е.[1,*]

*nv-algolu@hotmail.com

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье рассматривается задача стабилизации пассивных динамических систем при наличии непрерывных возмущений на входе и выходе системы. Получены достаточные условия стабилизируемости нелинейных динамических систем при помощи статической обратной связи по выходу в присутствии непрерывных возмущений. Рассмотрен пример стабилизации нулевого положения равновесия системы, описывающей динамику ошибки оценки состояния системы наблюдателем, в случае неточных измерений выхода системы. Возможной областью применения полученных в работе теоретических результатов является решение задач автоматического управления техническими системами, например, беспилотными летательными аппаратами и мобильными роботами.

Ключевые слова: стабилизация; динамические системы; статическая обратная связь по выходу; пассивность; устойчивость по отношению к возмущениям

Введение и постановка задачи

Рассмотрим задачу стабилизации нулевого положения равновесия нелинейной динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $u \in \mathbb{R}^m$ — вход системы (управление); $y \in \mathbb{R}^m$ — измеряемый выход системы. Предполагается, что отображения $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ локально липшицевы, $f(0,0) = 0$, $h(0) = 0$.

В случае, когда непосредственным измерениям доступен только выход системы, один из подходов к решению задачи стабилизации системы (1) основан на использовании статических обратных связей по выходу [1]. При синтезе статической обратной связи по выходу для нелинейной системы, имеющей вид (1), ключевым свойством является пассивность. Напомним, что динамическую систему (1) называют пассивной [2, 3], если существует такая непрерывно дифференцируемая неотрицательно определенная функция $V(x)$, называемая

функцией запаса, что при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,u) \leq y^{\mathrm{T}} u.$$

Отметим, что многие механические системы, рассмотренные с определенным выходом, являются пассивными [4, 5].

Для пассивных динамических систем решение задачи стабилизации нулевого положения равновесия при помощи статической обратной связи по выходу хорошо известно и приведено, например, в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Заметим, что решения задач управления техническими системами, как правило, приходится искать в условиях неточности измеряемой информации о системе. Поэтому представляет интерес исследование свойств стабилизирующих управлений при наличии возмущений в каналах управления и измерения выхода.

В настоящей работе рассматривается задача стабилизации пассивных динамических систем вида (1) при наличии непрерывных возмущений на входе и выходе системы. В разд. 1 для удобства изложения полученных в работе результатов приводятся используемые в формулировках теорем определения и доказывается вспомогательная лемма. В разд. 2 получены достаточные условия стабилизируемости нелинейных систем (1) при помощи статической обратной связи по выходу в присутствии непрерывных возмущений на входе системы. В разд. 3 доказываются достаточные условия стабилизируемости систем вида (1) при наличии непрерывных возмущений на выходе системы. В разд. 4 рассмотрен пример стабилизации нулевого положения равновесия системы, описывающей динамику ошибки оценки состояния системы наблюдателем, в случае неточных измерений выхода системы.

1. Предварительные сведения

Для удобства формулировок полученных в работе результатов приведем следующие определения.

Непрерывную функцию α: $[0\,, a) \to \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = [0,\ +\infty)$, $0 < a \leq +\infty$, называют функцией класса K [7], если данная функция строго возрастающая и $\alpha(0) = 0$.

Функцию α класса K называют функцией класса K_∞ [7], если $a = +\infty$ и $\alpha(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$.

Непрерывную функцию β: $[0,\ a) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ называют функцией класса KL [7], если при любом фиксированном t функция $\beta(s,t)$ является функцией класса K по отношению к переменной s, а при любом фиксированном s выполнено $\beta(s,t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Динамическую систему (1) называют строго пассивной по состоянию [2, 3], если она является пассивной и при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,u) \leq y^{\mathrm{T}} u - \psi(x),$$

где $V(x)$ — функция запаса, $\psi(\cdot) > 0$ — некоторая непрерывная положительно определенная функция.

Динамическую систему (1) называют строго пассивной по выходу [2, 3], если она является пассивной и при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq y^{\mathrm{T}} u - y^{\mathrm{T}} \varrho(y),$$

где $V(x)$ — функция запаса, ϱ – некоторая непрерывная функция, $y^{\mathrm{T}} \varrho(y) > 0$ при всех $y \neq 0$.

Динамическую систему (1) называют локально детектируемой в нулевом состоянии [2], если существует такая окрестность $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ точки $x = 0$, что для любого решения $x(t)$ системы (1) при $u = u(t) \equiv 0$, удовлетворяющего условиям $x(0) = x_0 \in D_0$ и $y(t) = h(x(t)) \equiv 0$, выполнено $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. При $D_0 = \mathbb{R}^n$ систему (1) называют детектируемой в нулевом состоянии [2].

Рассмотрим нелинейную динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(x, d), \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $d \in \mathbb{R}^m$ — вход системы, соответствующий действующим на систему возмущениям. Полагаем, что отображение $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ локально липшицево и $f(0, 0) = 0$.

Если найдутся такие функции β класса KL и γ класса K, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и произвольной непрерывной и ограниченной на $[0, +\infty)$ функции $d = d(t)$ на входе решение $x(t)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, определено на интервале $[0, +\infty)$ и при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|d(\tau)\|),$$

то говорят, что динамическая система (2) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d [8].

Если найдутся такие функции α класса K_∞, β класса KL и γ класса K, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и произвольной непрерывной и ограниченной на $[0, +\infty)$ функции $d = d(t)$ на входе решение $x(t)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, определено на интервале $[0, +\infty)$ и при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\alpha(\|x(t)\|) \leq \beta(\|x_0\|, t) + \int_0^t \gamma(\|d(s)\|)\, ds,$$

то говорят, что динамическая система (2) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d [9, 10].

Здесь и далее в работе в качестве нормы векторов используется евклидова норма.

Рассмотрим систему (2) с некоторым фиксированным выходом, имеющую вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, d), \\ y = h(x), \end{cases} \tag{3}$$

где $y \in \mathbb{R}^m$ — выход системы, $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию $h(0) = 0$.

Сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 1. Предположим, что:

1) система (3) строго пассивна по выходу с положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$ функцией запаса $V(x)$ и детектируема в нулевом состоянии;

2) для некоторого $l \in \mathbb{N}$ при всех $y \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$y^{\mathrm{T}} \varrho(y) \geq c\|y\|^{2l}, \tag{4}$$

где функция ϱ — из определения строгой пассивности по выходу, а $c > 0$ – некоторая положительная константа.

Тогда система (3) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d.

Доказательство. Так как согласно условиям леммы система (3) строго пассивна по выходу, то для производной по времени функции запаса $V(x)$ в силу системы (3) при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $d \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, d) \leq y^{\mathrm{T}} d - y^{\mathrm{T}} \varrho(y),$$

где $y^{\mathrm{T}} \varrho(y) > 0$ при любом $y \neq 0$. Далее, с учетом неравенства (4) и неравенства Юнга

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon} a^p + \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} b^{\frac{p}{p-1}}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad b \in \mathbb{R}^+, \quad p > 1, \quad \varepsilon > 0, \tag{5}$$

получим следующую оценку, справедливую при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ и произвольном $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -c\|y\|^{2l} + y^{\mathrm{T}} d \leq -c\|y\|^{2l} + \|y\|\|d\| \leq \\ &\leq -c\|y\|^{2l} + \frac{1}{\varepsilon}\|y\|^{2l} + \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}} \|d\|^{\frac{2l}{2l-1}} = -\left(c - \frac{1}{\varepsilon}\right)\|y\|^{2l} + \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}} \|d\|^{\frac{2l}{2l-1}} = \\ &= -\alpha_3(\|y\|) + \varrho(\|d\|), \end{aligned}$$

где $l \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число, $\alpha_3(s) = \left(c - \frac{1}{\varepsilon}\right) s^{2l}$ при $\varepsilon > \frac{1}{c}$ и $\varrho(s) = \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}} s^{\frac{2l}{2l-1}}$, $s \geq 0$, являются функциями класса K_∞. Заметим, что согласно условиям теоремы функция $V(x)$ является положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$. Дополнительно система (3) детектируема в нулевом состоянии. Тогда согласно работе [10] система (3) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d. Теорема доказана.

2. Стабилизация при наличии возмущений на входе

Рассмотрим нелинейную динамическую систему (1) в присутствии возмущений на входе системы, записанную следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \tilde{u}) = f(x, u + d_1), \\ y = h(x), \end{cases} \tag{6}$$

где $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ — возмущенный вход системы, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $d_1 = d_1(t)$ — некоторая неизвестная непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty)$ функция.

Теорема 1. Допустим, что:

1) система (1) строго пассивна по состоянию с положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$ функцией запаса $V(x)$;

2) $k(y)$ — произвольная локально липшицевая функция, такая, что $k(0) = 0$ и для некоторых $c > 0$ и $l \in \mathbb{N}$ при всех $y \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$y^{\mathrm{T}} k(y) \geq c\|y\|^{2l}. \tag{7}$$

Тогда при управлении $u = -k(y)$ система (6) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1. Если дополнительно функция $\psi > 0$ из определения строгой пассивности по состоянию является бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$, то при управлении $u = -k(y)$ система (6) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1.

Доказательство. Так как согласно условиям теоремы система (1) строго пассивна по состоянию, то для производной по времени функции запаса $V(x)$ в силу системы (6) с $\tilde{u} = -k(y) + d_1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $d_1 \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, -k(y) + d_1) \leq y^{\mathrm{T}}(-k(y) + d_1) - \psi(x) = -y^{\mathrm{T}} k(y) + y^{\mathrm{T}} d_1 - \psi(x).$$

Воспользовавшись неравенством (7) и неравенством Юнга (5), получим следующую оценку, справедливую при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $d_1 \in \mathbb{R}^m$ и произвольном $\varepsilon > \dfrac{1}{c}$:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq -c\|y\|^{2l} + y^{\mathrm{T}} d_1 - \psi(x) \leq -c\|y\|^{2l} + \|y\|\,\|d_1\| - \psi(x) \leq \\ \leq -c\|y\|^{2l} + \frac{1}{\varepsilon}\|y\|^{2l} + \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}}\|d_1\|^{\frac{2l}{2l-1}} - \psi(x) = -\left(c - \frac{1}{\varepsilon}\right)\|y\|^{2l} - \\ - \psi(x) + \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}}\|d_1\|^{\frac{2l}{2l-1}} \leq -\psi(x) + \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}}\|d_1\|^{\frac{2l}{2l-1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что в силу определения строгой пассивности по состоянию функция ψ является непрерывной и положительно определенной. Тогда согласно монографии [7] существует

такая функция $\tilde{\psi}$ класса K, что $\psi(x) \geq \tilde{\psi}(\|x\|)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, неравенство (8) примет вид

$$\dot{V} \leq -\tilde{\psi}(\|x\|) + \varrho(\|d_1\|), \tag{9}$$

где функция $\varrho(s) = \varepsilon^{\frac{1}{2l-1}} s^{\frac{2l}{2l-1}}$, $s \geq 0$, принадлежит классу K_∞. Далее, в силу условий теоремы функция $V(x)$ является положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$. Следовательно, согласно [10] при управлении $u = -k(y)$ система (6) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1.

Если дополнительно функция ψ является бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$, то, согласно [7], существует такая функция $\tilde{\psi}$ класса K_∞, что $\psi(x) \geq \tilde{\psi}(\|x\|)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда справедлива соответствующая оценка (9) и при управлении $u = -k(y)$ система (6) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1 [10]. Теорема доказана.

Теорема 2. Допустим, что:

1) система (1) пассивна с положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$ функцией запаса $V(x)$ и детектируема в нулевом состоянии;

2) $k(y)$ — произвольная локально липшицевая функция, такая, что $k(0) = 0$ и для некоторых $c > 0$ и $l \in \mathbb{N}$ при всех $y \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство (7).

Тогда при управлении $u = -k(y)$ система (6) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1.

Доказательство. Так как согласно условиям теоремы система (1) пассивна, то для производной по времени функции запаса $V(x)$ в силу системы (6) с $\tilde{u} = -k(y) + d_1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $d_1 \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, -k(y) + d_1) \leq y^{\mathrm{T}}(-k(y) + d_1) = -y^{\mathrm{T}} k(y) + y^{\mathrm{T}} d_1,$$

где в силу неравенства (7) для любого $y \neq 0$ выполнено $y^{\mathrm{T}} k(y) > 0$. Следовательно, система (6) при управлении $u = -k(y)$ строго пассивна по выходу. При этом в качестве входа рассматривается $d_1 \in \mathbb{R}^m$. Заметим, что согласно условиям теоремы функция $V(x)$ является положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$. Дополнительно система (6) является детектируемой в нулевом состоянии, так как в силу условий теоремы система (1) детектируема в нулевом состоянии. Тогда согласно лемме 1 при управлении $u = -k(y)$ система (6) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1. Теорема доказана.

Замечание 1. Если замкнутая управлением $u = -k(y)$ система (6) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1, то [8]:

1) при $d_1 = d_1(t) \equiv 0$ замкнутая система асимптотически устойчива в целом в точке $x = 0$;

2) при произвольной непрерывной и ограниченной на $[0, +\infty)$ функции $d_1 = d_1(t)$ для любого начального условия $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(t)$ замкнутой системы определено и ограничено на интервале $[0, +\infty)$;

3) если $d_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то для любого начального условия $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнено $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание 2. Если замкнутая управлением $u = -k(y)$ система (6) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_1, то [9, 10]:

1) при $d_1 = d_1(t) \equiv 0$ замкнутая система асимптотически устойчива в целом в точке $x = 0$;

2) при произвольной непрерывной и ограниченной на $[0, +\infty)$ функции $d_1 = d_1(t)$ на входе замкнутой системы, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_0^{+\infty} \gamma(\|d_1(s)\|)\, ds < +\infty,$$

где функция γ из определения свойства интегральной устойчивости по отношению к возмущениям входа, для любого начального условия $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнено $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

3. Стабилизация при наличии возмущений на выходе

Рассмотрим нелинейную динамическую систему (1) в присутствии возмущений на выходе, имеющую вид

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ \tilde{y} = y + d_2 = h(x) + d_2, \end{cases} \tag{10}$$

где $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ — возмущенный выход системы, $d_2 = d_2(t)$ – некоторая неизвестная непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty)$ функция.

Теорема 3. Допустим, что:

1) система (1) пассивна с положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$ функцией запаса $V(x)$ и детектируема в нулевом состоянии;

2) $k(y)$ — произвольная локально липшицевая функция, такая, что $k(0) = 0$ и для некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $l \in \mathbb{N}$ при всех $y \in \mathbb{R}^m$ справедливы оценки

$$y^{\mathrm{T}} k(y) \geq c_1 \|y\|^{2l}, \quad \|k(y)\| \leq c_2 \|y\|^{2l-1}. \tag{11}$$

Тогда при управлении $u = -k(\tilde{y}) = -k(y + d_2)$ система (10) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_2.

Доказательство. Так как согласно условиям теоремы система (1) пассивна, то для производной по времени функции запаса $V(x)$ в силу системы (10) с управлением $u = -k(y + d_2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $d_2 \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, -k(y + d_2)) \leq -y^{\mathrm{T}} k(y + d_2) = -(y + d_2)^{\mathrm{T}} k(y + d_2) + d_2^{\mathrm{T}} k(y + d_2).$$

Воспользовавшись неравенствами (11) и неравенством Юнга (5), получим следующую оценку, справедливую при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $d_2 \in \mathbb{R}^m$ и произвольном $\varepsilon < \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{2l-1}$:

$$\dot{V} \le -c_1\|y+d_2\|^{2l} + \|d_2\|\,\|k(y+d_2)\| \le -c_1\|y+d_2\|^{2l} +$$
$$+ c_2\|d_2\|\,\|y+d_2\|^{2l-1} \le -c_1\|y+d_2\|^{2l} + \frac{c_2}{\varepsilon}\|d_2\|^{2l} + c_2\varepsilon^{\frac{1}{2l-1}}\|y+d_2\|^{2l} =$$
$$= -\Big(c_1 - c_2\varepsilon^{\frac{1}{2l-1}}\Big)\|y+d_2\|^{2l} + \frac{c_2}{\varepsilon}\|d_2\|^{2l} \le \frac{c_2}{\varepsilon}\|d_2\|^{2l} = \varrho(\|d_2\|),$$

где функция $\varrho(s) = \frac{c_2}{\varepsilon}s^{2l}$, $s \ge 0$, принадлежит классу K_∞. Заметим, что согласно условиям теоремы система (1) пассивна с положительно определенной и бесконечно большой при $\|x\| \to \infty$ функцией запаса $V(x)$ и детектируема в нулевом состоянии. Далее в силу соотношений (11) при всех $y \ne 0$ выполнено $y^{\mathrm{T}}k(y) > 0$. Тогда согласно монографии [7] при $d_2 = d_2(t) \equiv 0$ система (10) с управлением $u = -k(y)$ асимптотически устойчива в целом в точке $x = 0$. Следовательно, согласно работе [10] при управлении $u = -k(y+d_2)$ система (10) обладает интегральным свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d_2. Теорема доказана.

Отметим, что для решений замкнутой управлением $u = -k(y+d_2)$ системы (10) справедливы свойства, аналогичные свойствам решений замкнутой управлением $u = -k(y)$ системы (6), сформулированные в виде замечания 2.

4. Пример стабилизации статической обратной связью по выходу

Рассмотрим задачу оценки состояния динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varrho(y,u), \\ y = Cx, \end{cases} \tag{12}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, пара (A, C) детектируема [11], отображение ϱ: $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to$ $\to \mathbb{R}^n$ локально липшицево. Предполагается, что непосредственным измерениям доступны только выход $y \in \mathbb{R}^p$ и вход $u \in \mathbb{R}^m$ системы.

Одним из способов восстановления информации о состоянии системы на основе имеющихся измерений является построение наблюдателя. Наблюдатель представляет собой специальную динамическую систему, состояние которой с течением асимптотически приближается к состоянию рассматриваемой системы [12]. Состояние наблюдателя в произвольный момент времени может быть использовано как оценка состояния системы в этот момент времени. Наблюдатель системы (12) ищется в виде [12]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varrho(y,u) + k(C\hat{x} - y), \tag{13}$$

где k — локально липшицевая функция, подлежащая определению, $k(0) = 0$. Система, описывающая динамику ошибки $e = \hat{x} - x$ оценки состояния системы (12) наблюдателем (13), имеет вид

$$\dot{e} = Ae + k(Ce). \tag{14}$$

Запишем систему (14) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + v, \\ \tilde{y} = Ce, \end{cases} \tag{15}$$

где $v = k(\tilde{y})$ — вход системы. Задача построения наблюдателя (13) динамической системы (12) эквивалентна задаче стабилизации положения равновесия $e = 0$, $v = 0$ системы (15) при помощи статической обратной связи $v = k(\tilde{y})$ по выходу $\tilde{y} = Ce$.

Так как пара (A, C) детектируема, то существует матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$, такая, что матрица $A + LC$ гурвицева [11]. Следовательно, для любой матрицы $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$ найдется матрица $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$(A + LC)^{\mathrm{T}}P + P(A + LC) = -Q. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию $V(e) = e^{\mathrm{T}}Pe > 0$. Ее производная в силу системы (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{e}^{\mathrm{T}}Pe + e^{\mathrm{T}}P\dot{e} = e^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Pe + v^{\mathrm{T}}Pe + e^{\mathrm{T}}PAe + e^{\mathrm{T}}Pv = \\ = e^{\mathrm{T}}(A + LC)^{\mathrm{T}}Pe + e^{\mathrm{T}}P(A + LC)e - 2e^{\mathrm{T}}PLCe + 2e^{\mathrm{T}}Pv = \\ = -e^{\mathrm{T}}Qe - 2e^{\mathrm{T}}PLCe + 2e^{\mathrm{T}}Pv = -e^{\mathrm{T}}Qe - 2e^{\mathrm{T}}PL\tilde{y} + 2e^{\mathrm{T}}Pv. \end{aligned}$$

Выбрав

$$v = L\tilde{y} + \frac{1}{2}L_1\tilde{v},$$

где $\tilde{v} \in \mathbb{R}^p$ — новый вход системы (15), $L_1 = P^{-1}C^{\mathrm{T}}$, получим

$$\dot{V} = -e^{\mathrm{T}}Qe + e^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\tilde{v} = -e^{\mathrm{T}}Qe + \tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{v}.$$

Следовательно, система

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + LC)e + \frac{1}{2}L_1\tilde{v}, \\ \tilde{y} = Ce \end{cases} \tag{17}$$

является строго пассивной по состоянию.

Выберем $\tilde{v} = -\tilde{k}(\tilde{y})$, где $\tilde{k}(\cdot)$ — любая локально липшицевая функция, такая, что

$$\tilde{k}(0) = 0, \quad \tilde{y}^{\mathrm{T}}\tilde{k}(\tilde{y}) \geq c\|\tilde{y}\|^{2l} \quad \tilde{y} \in \mathbb{R}^p. \tag{18}$$

Здесь $l \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число, $c > 0$.

Предположим, что матрица L помимо уравнения (16) удовлетворяет также соотношению

$$PL = C^{\mathrm{T}},$$

т.е. $L = L_1$. Рассмотрим динамическую систему (17) вида

$$\begin{cases} \dot{e} = (A + LC)e - \frac{1}{2}L\tilde{k}(\tilde{y}) + Ld, \\ \tilde{y} = Ce, \end{cases} \tag{19}$$

где $d \in \mathbb{R}^p$ — вход, соответствующий действующим на систему возмущениям. Тогда согласно теореме 1 система (19) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа d.

Отметим, что вид (19) система (17) может иметь, например, в случае неточных измерений выхода системы (12).

5. Заключение

В статье решена задача стабилизации пассивных динамических систем в присутствии непрерывных возмущений на входе и выходе системы. Получены достаточные условия стабилизируемости нулевого положения равновесия при помощи статических обратных связей по выходу. Рассмотрен пример стабилизации нулевого положения равновесия системы, описывающей динамику ошибки оценки состояния системы наблюдателем, в случае неточных измерений выхода системы.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с обобщением полученных в работе результатов на случай пассифицируемых [3] динамических систем вида (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-00424, 14-07-00813) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-53.2014.1).

Список литературы

1. Syrmos V., Abdallah C., Dorato P., Grigoriadis K. Static output feedback — A survey // Automatica. 1997. Vol. 33. P. 125–137. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00141-0
2. Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. Vol. 36, no. 11. P. 1228–1240. DOI: 10.1109/9.100932
3. Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д. Пассивность и пассификация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 3–37.
4. Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H. Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications. Springer London, 1998. 543 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-3603-3
5. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. Springer London, 2002. 295 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0177-2
6. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
7. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3rd ed. New York: Prentice Hall, 2002. 750 p.
8. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34, no. 4. P. 435–443. DOI: 10.1109/9.28018

9. Sontag E.D. Comments on integral variants of ISS // Systems and Control Letters. 1998. Vol. 34, no. 1. P. 93–100. DOI: 10.1016/S0167-6911(98)00003-6
10. Angeli D., Sontag E.D., Wang Y. A characterization of integral input to state stability // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. Vol. 45, no. 6. P. 1082–1097. DOI: 10.1109/9.863594
11. Wonham W.M. Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. 3rd ed. Springer, 1985. 350 p.
12. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 3–42.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0408

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 12, pp. 738–750.
DOI: **10.7463/1214.0743265**
Received: 02.12.2014
© Bauman Moscow State Technical University

Stabilization of Passive Dynamical Systems with Input and Output Disturbances

Golubev A. E.

*nv-algolu@hotmail.com

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: stabilization, dynamical systems, passivity, input to state stability

In case when only the output of a dynamical system is available for direct measurements static output feedback could be a solution to the zero equilibrium stabilization problem. While synthesizing a static output feedback control law the system passivity proves out to be the key property. Many physical systems are passive when considered with a specific output.

For passive dynamical systems the solution to the zero equilibrium stabilization problem by means of static output feedback is well known. However, when finding solutions to control problems for real-world applications uncertainties and measurement inaccuracies are always to be taken into account. Therefore, it is of great interest how the control laws would be performed under uncertainties, in particular, input and output disturbances.

This paper deals with the zero equilibrium stabilization problems for passive dynamical systems in the presence of input and output disturbances modeled by continuous functions of time. The sufficient conditions are obtained to stabilize the zero equilibrium of such systems by static output feedback control. As an example, stabilization of the state estimation error dynamics produced by an observer is considered in the case when output measurements are inaccurate.

Further research can be focused on extending the results in this note to a case of dynamical systems that are not passive, but can be made passive through a change of the input.

One of the potential application areas for the obtained theoretical results is automatic control of technical plants e.g. unmanned aerial vehicles and mobile robots.

References

1. Syrmos V., Abdallah C., Dorato P., Grigoriadis K. Static output feedback — A survey. *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 125–137. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00141-0

2. Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, vol. 36, no. 11, pp. 1228–1240. DOI: 10.1109/9.100932
3. Polushin I.G., Fradkov A.L., Khill D. Passivity and passification of nonlinear systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 2000, no. 3, pp. 3–37 (English translation: *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 3, pp. 355–388).
4. Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer London, 1998. 543 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-3603-3
5. Fantoni I., Lozano R. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer London, 2002. 295 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0177-2
6. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. *Nelineynoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* [Nonlinear and adaptive control of complex dynamical systems]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000. 549 p. (in Russian).
7. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3rd ed. New York, Prentice Hall, 2002. 750 p.
8. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, vol. 34, no. 4, pp. 435–443. DOI: 10.1109/9.28018
9. Sontag E.D. Comments on integral variants of ISS. *Systems and Control Letters*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 93–100. DOI: 10.1016/S0167-6911(98)00003-6
10. Angeli D., Sontag E.D., Wang Y. A characterization of integral input to state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, vol. 45, no. 6, pp. 1082–1097. DOI: 10.1109/9.863594
11. Wonham W.M. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. 3rd ed*. Springer, 1985. 350 p.
12. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Stabilization of nonlinear dynamic systems using the system state estimates made by the asymptotic observer. *Avtomatika i telemekhanika*, 2005, no. 7, pp. 3–42 (English translation: *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 7, pp. 1021–1058. DOI: 10.1007/s10513-005-0147-5).