Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 635–663.
DOI: 10.7463/1114.0732189

Представлена в редакцию: 01.10.2014
Исправлена: 22.10.2014

УДК 517.997+681.51

Метод гомотопии в прикладных задачах анизотропийной теории управления

Юрченков А. В.[1,*]

[*]sasha_2264@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье рассмотрен способ решения связанных уравнений Риккати, уравнения специального вида и уравнения Ляпунова, возникающие в анизотропийной теории управления при синтезе регуляторов, обеспечивающих робастное качество, названный методом гомотопии. Данный метод позволяет из стандартного гауссовского регулятора путем специально организованного итерационного процесса получить анизотропийный регулятор. Приведены основные сведения относительно применения метода гомотопии к задачам анизотропийной теории управления. Получены все производные матричнозначных выражений, необходимых для реализации численного алгоритма. Для упрощения выражений матричных производных приведены свойства кронекерова произведения и дифференцирования матрицы по матрице.

Ключевые слова: анизотропийная теория управления; метод гомотопий; матричные производные

Введение

В современной теории управления большое число работ посвящено $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-критериям качества систем управления и обеспечению устойчивости или робастной устойчивости замкнутых объектов управления. Однако упомянутые теории накладывают ряд ограничений на возмущения, воздействующие на объект управления.

Подходы $\mathcal{H}_2$-теории управления применяются только для объектов, на вход которых поступает сигнал с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. При нарушении этого требования синтезированный закон управления не будет стабилизировать замкнутую систему. Также и для синтеза $\mathcal{H}_\infty$-управления затраты энергии будут чрезмерными, если возмущение близко по стохастическим характеристикам к «белому шуму», поскольку управление строится для случая наихудшего входного сигнала из l_2. Современные примеры задач $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации можно найти в работах J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar и B.A. Francis [1], G. Zames [2], J. Doyle [3], B.A. Francis [4], K. Glover [1], D. Gu [4], N. Berman, U. Shaked [5, 6], C. Scherer [7, 8], T. Iwasaki, R.E. Skelton [9, 10], P. Gahinet [11, 12], P. Apkarian [13, 14] и др.

Устранить недостатки $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий для линейных дискретных стационарных систем может помочь так называемая анизотропийная теория управления, получившая развитие в последние двадцать лет [9, 15, 17]. Эта теория использует понятие относительной энтропии, т.е. меры отличия расширенного вектора случайной последовательности от гауссовского «белого шума», заимствованное из теории информации. В анизотропийной теории вводят коэффициент усиления от задающего воздействия к управляемому выходу, который называется анизотропийной нормой.

При решении задачи обеспечения робастного качества для линейной дискретной системы вводят a-анизотропийную норму системы $|||F|||$, которая является частным случаем стохастической нормы. Это направление развивается в ряде работ А.В. Семенова, И.Г. Владимирова, А.П. Курдюкова [9, 15], M. Karny [16], I.R. Petersen, M.R. James, P. Diamond [17, 18]. Поскольку значение a-анизотропийной нормы принадлежит интервалу, левым концом которого является масштабированная $\mathcal{H}_2$-норма системы $\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2$, а правым — $\mathcal{H}_\infty$-норма $\|F\|_\infty$, то при предельных значениях уровня средней анизотропии входного сигнала a, равным нулю или бесконечности, величина a-анизотропийной нормы $|||F|||$ будет совпадать с одним из значений $\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2$ или $\|F\|_\infty$ соответственно.

К известным результатам анизотропийной теории относятся решенные задачи стохастической $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации систем с параметрической неопределенностью [19], многокритериальной оптимизация [20], анализа устойчивости дескрипторных систем [21], синтеза субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации [22].

В работе [19] приведено решение стохастической задачи $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации для системы с параметрической неопределенностью. Предложен метод, с помощью которого можно свести задачу к более общей, которая, в свою очередь, уже решается методами анизотропийной теории.

При решении задач анизотропийной теории управления, в частности задачи из [19], возникает необходимость решения связанных уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и уравнения специального вида, которые невозможно разрешить стандартными методами. Одним из возможных способов решения таких систем является метод гомотопии. Особенность метода заключается в том, что необходимо знать начальное приближение к решению, с помощью которого путем специально организованного итерационного процесса можно получить оптимальное решение. В данной работе на основе метода гомотопии разрабатывается алгоритм решения связанных уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и уравнения специального вида. Результаты могут применяться для задач анизотропийной оптимизации.

Статья организована следующим образом. В первой части ставится задача анизотропийной оптимизации, во второй описаны основные понятия метода гомотопии, в третьей приведен вычислительный алгоритм поиска решения системы связанных уравнений, в четвертой изложены основные понятия дифференцирования матричнозначных отображений, в пятой приведены точные выражения для матричных производных решений уравнений Риккати, уравнения специального вида и уравнения Ляпунова. В приложении приведены полезные свойства кронекерова произведения для упрощенного дифференцирования матричных выражений.

1. Постановка задачи анизотропийной $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_0 q_k + B_1 w_k + B_2 u_k, \\ z_k = C_1 x_k + D_{12} u_k, \\ p_k = C_2 x_k + D_{22} u_k, \\ y_k = C_3 x_k + D_{33} w_k, \\ q_k = \Delta p_k, \end{cases} \tag{1}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы; $z_k \in \mathbb{R}^{r_1}$ — управляемый выход; $p_k \in \mathbb{R}^{m_0}$ — выход неопределенности; $y_k \in \mathbb{R}^{r_2}$ — наблюдаемый выход; $q_k \in \mathbb{R}^{m_0}$ — вход неопределенности; $u_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление; $w_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ — возмущение. Матрицы системы (1) будем считать известными, за исключением матрицы оператора неопределенности Δ, которая принадлежит множеству

$$\mathfrak{D} = \left\{ \Delta = \text{block diag}\,(\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}, \|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Последнее равенство в системе (1) представляет собой связь между входом p и выходом q посредством линейного оператора неопределенности Δ. Структурная схема рассматриваемого объекта представлена на рис. 1, в ней M — объект управления (1); K — регулятор, синтезирующий закон управления u_k; Δ — структурированная неопределенность.

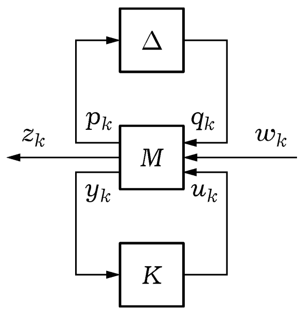

Рис. 1. Система с неопределенностью и регулятором в контуре обратной связи

Задача анизотропийной оптимизации состоит в следующем: *для системы вида* (1)*, на которую действует возмущение с уровнем средней анизотропии не более* $a \geqslant 0$*, найти стабилизирующий регулятор* K*, который минимизирует максимальное значение* a*-анизотропийной нормы системы* $F_l\left(F_u\left(M, \Delta\right), K\right)$ *по всем допустимым значениям неопределенности* $\Delta \in \mathfrak{D}$*, т.е. доставляет минимум функционалу*

$$J_0\left(K\right) = \sup_{\Delta \in \mathfrak{D}} |\!|\!| F_l\left(F_u\left(M, \Delta\right), K\right) |\!|\!|. \tag{2}$$

Обозначения F_u и F_l закреплены за верхним и нижним дробно-линейными преобразованиями соответственно [23]. Под поиском регулятора K будем подразумевать построение таких матриц $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, для которых реализация

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = \widehat{A}\xi_k + \widehat{B}y_k, \\ u_k = \widehat{C}\xi_k, \end{cases} \tag{3}$$

в пространстве состояний регулятора K доставляет минимум функционалу (2). В рамках рассматриваемой системы (1) потребуем выполнение основных предположений:

а) $D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 = 0$, $D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12} = I$;

б) номинальная система (при $\Delta \equiv 0$) наблюдаема и управляема;

в) $r_1 < m_1$;

г) матрица D_{33} в (1) имеет полный строчный ранг (то есть ее ранг равен количеству строк): $\operatorname{rank} D_{33} = r_2 \leqslant m_1$;

д) матрица D_{12} в (1) имеет полный столбцовый ранг: $\operatorname{rank} D_{12} = m_2 \leqslant r_1$.

Предположение а) не ограничивает общности, так как если оно не выполнено, то к системе следует применить преобразование, указанное в [23], которое приводит систему к виду, для которого предположение а) выполнено. Предположение б) является стандартным для задач управления. Предположение в) гарантирует [25], что для любого регулятора K система $F_l(F_u(M,\Delta),K)$ удовлетворяет неравенству $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\|F_l(*)\|_2 < \|F_l(*)\|_\infty$. Предположения г) и д) гарантируют невырожденность уравнений Риккати, которые будут приведены в дальнейшем.

Как известно, для синтеза регулятора, доставляющего минимум анизотропийной нормы замкнутой системы, необходимо решить систему из четырех связанных уравнений Риккати, уравнения специального вида и уравнения Ляпунова [25]. Рассмотрим первое дискретное алгебраическое уравнение Риккати из упомянутой системы относительно матрицы $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$

$$\tilde{Y} = \bar{A}^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{A} + L^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}L + \Xi, \tag{4}$$

где

$$L = \Sigma\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{A}; \quad \Sigma = \left(\Gamma^2 - \bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{B}_1\right)^{-1};$$

матрицы $\bar{A}$, $\bar{B}_1$, $\bar{C}$ и Ξ в блочном виде можно записать следующим образом:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B_2\widehat{C} \\ \widehat{B}C_3 & \widehat{A} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_1 = B_3, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 & D_{12}\widehat{C} \\ \gamma_1 C_{12} & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22}\widehat{C} \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22}\widehat{C} \end{pmatrix};$$

$$\Xi = \left(\begin{array}{c|c} C_1^{\mathrm{T}}C_1 + \gamma_1^2 C_{12}^{\mathrm{T}}C_{12} + \gamma_2^2 C_{22}^{\mathrm{T}}C_{22} & 0 \\ \hline 0 & \widehat{C}^{\mathrm{T}}\left(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12} + \gamma_1^2 D_{1,22}^{\mathrm{T}}D_{1,22} + \gamma_2^2 D_{1,22}^{\mathrm{T}}D_{2,22}\right)\widehat{C} \end{array}\right);$$

$\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2)$ — блочная матрица, составленная с помощью некоторых положительных параметров γ_1 и γ_2. Матрица B_3 имеет блочный вид $B_3 = (B_{01},\ B_{02},\ B_{01},\ B_{02})^{\mathrm{T}}$, в котором отдельные блоки получены из матрицы B_0 следующим образом: $B_0 = [B_{01}, B_{02}]$, $B_{0i} \in \mathbb{R}^{n\times l_i}$. В уравнении (4) матрица $L \in \mathbb{R}^{l\times 2n}$ разделена на два блока L_1 и L_2. Решение $\tilde{Y}$ уравнения (4) называется стабилизирующим, если матрица $\tilde{Y}$ симметрическая, матрица Σ положительно определена и матрица $\bar{A} + \bar{B}_1 L$ гурвицева.

Приведем второе уравнение Риккати относительно матрицы $R \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$:

$$R = A_w^{\mathrm{T}} R A_w + q C_w^{\mathrm{T}} C_w + L_w^{\mathrm{T}} \Sigma_w^{-1} L_w, \tag{5}$$

где

$$L_w = \Sigma_w (B_w^{\mathrm{T}} R A_w + q D_w^{\mathrm{T}} C_w); \quad \Sigma_w = (I_{m_1} - B_w^{\mathrm{T}} R B_w)^{-1};$$

матрицы A_w, B_w, C_w в блочном виде можно записать следующим образом:

$$A_w = \begin{pmatrix} A + B_3 L_1 & B_2 \widehat{C} + B_3 L_2 \\ \widehat{B} C_3 & \widehat{A} \end{pmatrix}; \quad B_w = \begin{pmatrix} B_1 + B_3 \Sigma^{1/2} \\ \widehat{B} D_{33} \end{pmatrix};$$

$$C_w = \begin{pmatrix} C_1 & D_{12}\widehat{C} \\ \gamma_1 C_{12} & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22}\widehat{C} \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22}\widehat{C} \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (5) называется стабилизирующим, если матрица R симметрическая, матрица Σ_w положительно определена, а матрица $A_w + B_w L_w$ устойчива.

Запишем третье уравнение Риккати относительно матрицы $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$S = \tilde{A}_{11} S \tilde{A}_{11}^{\mathrm{T}} + \tilde{B}\tilde{B}^{\mathrm{T}} - \Lambda \Theta \Lambda^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

где

$$\Theta = \tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^{\mathrm{T}} + \tilde{D}\tilde{D}^{\mathrm{T}}, \quad \Lambda = (\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^{\mathrm{T}} + \tilde{B}\tilde{D}^{\mathrm{T}})\Theta^{-1},$$

$$\tilde{A}_{11} = A + B_3 L_1 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w1}, \quad \tilde{A}_{12} = B_2 \widehat{C} + B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w2},$$

$$\tilde{B} = (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_w^{1/2}, \quad \tilde{C}_{21} = C_3 + D_{33} L_{w1}, \quad \tilde{C}_{22} = D_{33} L_{w2}, \quad \tilde{D} = D_{33} \Sigma_w^{1/2}.$$

Решение $S = S^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ уравнения (6) называется стабилизирующим, если матрица S является положительно полуопределенной и матрица $\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}$ гурвицева.

И последнее, четвертое, уравнение Риккати относительно матрицы $T \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ выглядит следующим образом:

$$T = A_u^{\mathrm{T}} T A_u + C_u^{\mathrm{T}} C_u - N^{\mathrm{T}} \Upsilon N, \tag{7}$$

где

$$\Upsilon = B_u^{\mathrm{T}} T B_u + D_{12}^{\mathrm{T}} D_{12}; \quad N = -\Upsilon^{-1}(B_u^{\mathrm{T}} T A_u + D_{12}^{\mathrm{T}} C_u);$$

матрицы $A_u \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{2n\times m_2}$ и $C_u \in \mathbb{R}^{r_1\times 2n}$ в блочном виде можно записать следующим образом:

$$A_u = \begin{pmatrix} A & (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_w + B_3L \\ 0 & A + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_w + B_3L + B_2\widehat{C} \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_u = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Решение $T = T^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ уравнения (7) будем называть стабилизирующим, если матрица T положительно определена, а матрица $A_u + B_uN$ устойчива. Рассмотрим еще два уравнения:

$$P = (A_w + B_wL_w)P(A_w + B_wL_w)^{\mathrm{T}} + B_w\Sigma_wB_w^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

$$a = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m_1\Sigma_w}{\operatorname{trace}\left(L_wPL_w^{\mathrm{T}} + \Sigma_w\right)}\right). \tag{10}$$

Уравнение (9) является уравнением Ляпунова, а уравнение (10) — уравнением специального вида.

Решение полученной системы из четырех уравнений Риккати (4)–(7), уравнения Ляпунова (9) и уравнения специального вида (10) позволяет предъявить [25] следующую реализацию регулятора K в пространстве состояний (3):

$$\begin{cases} \widehat{A} = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} - \Lambda(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22}), \\ \widehat{B} = \Lambda, \\ \widehat{C} = N_1 + N_2. \end{cases}$$

Методы оптимизации не позволяют найти решение системы (4)–(7), (9), (10), поскольку уравнения в указанной системе не задаются выпуклыми функциями. Поэтому в статье рассматривается метод гомотопии, с помощью которого строится алгоритм, позволяющий получить матрицы стабилизирующего регулятора (3).

2. Метод гомотопии с ньютоновскими итерациями

Следуя [24], кратко рассмотрим основы метода гомотопии (метода Давыденко) решения нелинейных алгебраических уравнений. Пусть X — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, на котором задано достаточно гладкое отображение $\mathcal{F}\colon X \to \mathbb{R}^n$. Требуется отыскать решение уравнения

$$\mathcal{F}(x) = 0 \tag{11}$$

относительно неизвестного вектора $x \in X$.

Даже если для отображения $\mathcal{F}$ предположить существование и единственность нуля в X, возможны ситуации, когда численное нахождение такого решения плохо поддается локальным методам, успешность которых зависит от качества начального приближения.

Основная идея метода гомотопии, призванного преодолеть указанную трудность, состоит в замене (11) совокупностью уравнений, которые начинаются легко разрешимым уравнением и плавно переходят в уравнение (11). Решение очередного уравнения в этой цепочке опирается на должным образом откорректированное предыдущее уравнение.

Пусть $\mathcal{H}\colon\ X \times [0,\ 1] \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, которое удовлетворяет условию

$$\mathcal{H}(x,1) = \mathcal{F}(x), \quad x \in X, \tag{12}$$

а уравнение

$$\mathcal{H}(x,0) = 0 \tag{13}$$

имеет решение $x_0 \in X$, которое легко находится. Преобразование $\mathcal{H}$ осуществляет гомотопию (деформацию) отображения $\mathcal{H}(\cdot,0)$ в отображение $\mathcal{H}(\cdot,1) \equiv \mathcal{F}$, т.е. гладкий переход от легко решаемого уравнения (13) к уравнению (12), которое требуется решить.

Фактически функция гомотопии представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию

$$\mathcal{H}(x(q),q) = 0, \quad q \in [0,1].$$

Таким образом, итерационный вычислительный процесс начинается с простой задачи с известным решением, которое деформируется посредством непрерывного изменения параметра q, пока не будет получено решение первоначальной задачи.

Предположим теперь, что отображение $\mathcal{H}(\cdot,q)\colon\ X \to \mathbb{R}^n$ имеет единственный нуль $\xi(q)$ для любого $q \in [0,1]$, т.е.

$$\mathcal{H}(\xi(q),q) = 0. \tag{14}$$

В частности, в силу (12), $\xi(1)$ есть искомое решение уравнения (11). Если определенное таким образом отображение $\xi\colon\ [0,\ 1] \to X$ является гладким, то, дифференцируя левую часть уравнения (14) как сложную функцию от q, получаем

$$\left.\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^{\mathrm{T}}}\right|_{x=\xi(q)} \xi'(q) + \left.\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right|_{x=\xi(q)} = 0. \tag{15}$$

Здесь

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^{\mathrm{T}}} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}_i(x,q)}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

— якобиан отображения $\mathcal{H}(x,q)$ относительно вектора x, вычисляемый в (15) при $x = \xi(q)$. В предположении о невырожденности якобиана, уравнение (15) разрешимо относительно производной $\xi'(q) = d\xi(q)/dq$, принимая вид

$$\xi'(q) = -\left(\left.\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^{\mathrm{T}}}\right|_{x=\xi(q)}\right)^{-1} \left.\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right|_{x=\xi(q)}.$$

Собственно метод Давыденко заключается в замене уравнения (11) задачей Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(q) = -\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}, \quad x(0) = x_0. \tag{16}$$

где $q \in [0,\ 1]$ играет роль фиктивного времени, а начальное условие $x_0 \in X$ есть нуль отображения $\mathcal{H}(\cdot,0)$, которое гомотопно исходному отображению $\mathcal{F}$.

Дискретный вариант метода гомотопии, рассматриваемый в данной работе, предполагает разбиение интервала $[0,\ 1]$ для получения конечной последовательности задач

$$\mathcal{H}(x, q_k) = 0, \quad 0 = q_0 < q_1 < \ldots < q_N = 1.$$

Начиная с известного решения при q_0, решение для $\mathcal{H}(x, q_{k+1})$ вычисляется с использованием локальной итерационной схемы — ньютоновских итераций.

3. Вычислительный алгоритм

Согласно описанному методу гомотопии, система (4)–(7), (9), (10) записывается в виде (11), где $x \in \mathbb{R}^n$ — решение. В случае, когда необходимо найти реализацию матриц регулятора $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ в пространстве состояний (3), столбцы этих матриц следует последовательно соединить в один столбец, который и следует определить по вычислительному алгоритму. Для этой цели вводится оператор векторизации

$$\mathrm{col}\colon\ \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{nm},$$

сопоставляющий матрице $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ вектор $\mathrm{col}(X)$, сформированный последовательно объединенными столбцами матрицы X:

$$\mathrm{col}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что отображение col является линейной биекцией пространств $\mathbb{R}^{n\times m}$ и $\mathbb{R}^{nm}$.

Ассоциируем регулятор K в виде (3) с вектором

$$Q = \begin{pmatrix} \mathrm{col}(\widehat{A}) \\ \mathrm{col}(\widehat{B}) \\ \mathrm{col}(\widehat{C}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s, \quad s = n(n + m_2 + r_2),$$

и обозначим $\gamma(Q) = \left\| F_l(M, K) \right\|_\infty^{-2}$. Систему уравнений (4)–(10) для оптимального регулятора в зависимости от параметра q можно записать следующим образом:

$$\mathcal{F}(q, Q) - Q = 0, \tag{17}$$

$$\mathcal{A}(q, Q) = \alpha. \tag{18}$$

Первое уравнение объединяет алгебраические уравнения Риккати (4)–(7) и уравнение Ляпунова (9), в то время как второе уравнение есть нелинейное алгебраическое уравнение (10). Отметим, что при $q = 0$ решение уравнения (17) соответствует уровню средней анизотропии $\alpha = 0$ и является решением задачи синтеза $\mathcal{H}_2$–оптимального регулятора, который можно легко получить с использованием стандартных методов. Таким образом, $\mathcal{H}_2$-оптимальный регулятор является исходной точкой для метода гомотопии.

Далее, единственная гладкая ветвь решений $Q\colon\ [0,\ q_*) \to \mathbb{R}^s$ уравнения (17), где

$$q_* = \left(\inf_K \|F_l(M,K)\|_\infty\right)^{-2},$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q},$$

где $\mathcal{G} = \left(I_s - \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)^{-1}$, при начальном условии $Q(0)$, соответствующем $\mathcal{H}_2$-оптимальному регулятору. Вычислительный алгоритм метода гомотопии решения системы уравнений (17), (18) сводится к построению рекуррентной последовательности $(q_k, Q_k), k \geqslant 0$, с начальной точкой $(0, Q(0))$. При фиксированном значении q_k производится серия ньютоновских итераций

$$Q_{k,l+1} = Q_{k,l} + \mathcal{G}(q_k, Q_{k,l})(\mathcal{F}(q_k, Q_{k,l}) - Q_{k,l}),\ 1 \leqslant l < l_k$$

с начальным условием $Q_{k,0} = Q_k$ и условием остановки

$$\left|\frac{Q_{k,l_k} - Q_{k,l_{k-1}}}{Q_{k,l_k}}\right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число. После этого следующий элемент последовательности вычисляется способом, указанным ниже:

$$q_{k+1} = q_k + \Delta q_k, \quad Q_{k+1} = Q_{k,l_k} + \Delta Q_k,$$

где

$$\Delta q_k = \begin{cases} \dfrac{\gamma(Q_{k,l_k}) - q_k}{2}, & \max\limits_{0\leqslant j\leqslant k} \mathcal{A}(q_j, Q_{j,l_j}) < \alpha; \\ \dfrac{\alpha - \mathcal{A}(q_k, Q_{k,l_k})}{\left(\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q} + \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q}\mathcal{G}\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)(q_k, Q_{k,l_k})}, & \end{cases} \tag{19}$$

$$\Delta Q_k = \mathcal{G}(q_k, Q_{k,l_k})\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}(q_k, Q_{k,l_k})\Delta q_k. \tag{20}$$

Для реализации данного вычислительного алгоритма необходимо получить явные аналитические выражения для производных матричнозначных отображений $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}$, $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}$, $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q}$. Эти производные описываются в [27, 28, 29], и для конкретной системы (4)–(7), (9), (10) будут выведены в последующих параграфах работы.

Условие

$$\max\left\{\frac{|\mathcal{A}(q_k, Q_k) - \alpha|}{\alpha}, \frac{|\Delta Q_k|}{|Q_k|}\right\} < \varepsilon$$

используется для остановки процесса вычисления последовательности (q_k, Q_k). Сходимость алгоритма зависит от выбора значений параметров $\gamma_i, i = \overline{1, 2}$.

4. Дифференцирование матричнозначных отображений

Как видно, в уравнении (16) присутствуют производные матричнозначных выражений. В этом разделе подробно рассмотрено матричное дифференцирование на примере уравнения Риккати. Все полученные ниже выражения потребуются для вычислительного алгоритма.

Для любых матриц $A \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ и $C \in \mathbb{R}^{s\times q}$ [26]

$$\mathrm{col}(ABC^{\mathrm{T}}) = (C \otimes A)\,\mathrm{col}(B),$$

где $C \otimes A$ — кронекерово произведение матриц C и A. Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ [26]

$$\mathrm{col}(A^{\mathrm{T}}) = \Upsilon_{p,q}\,\mathrm{col}(A), \tag{21}$$

где

$$\Upsilon_{p,q} = \left\{\delta_{(j-1)p-\left\lfloor\frac{j-1}{q}\right\rfloor(pq-1)+1,k}\right\}, \tag{22}$$

и внутренний цикл берется по $k = \overline{1,pq}$, а внешний — по $j = \overline{1,pq}$. Производная $\frac{\partial Y}{\partial X}$ гладкого матричнозначного отображения $Y\colon \mathbb{R}^{p\times q} \to \mathbb{R}^{r\times s}$ представляет собой матрицу Якоби $\dfrac{\partial\,\mathrm{col}(Y)}{\partial\,\mathrm{col}(X)^{\mathrm{T}}}$ размерности $(rs)\times(pq)$.

Для упорядоченного набора матричнозначных отображений $Y_1,\ldots,Y_b$, зависящих от матриц $X_1,\ldots,X_a$ полагаем

$$\frac{\partial(Y_1,\ldots,Y_b)}{\partial(X_1,\ldots,X_a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_a} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \frac{\partial Y_b}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial Y_b}{\partial X_a} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Для любых гладких отображений $X\colon \mathbb{R}^{s\times t} \to \mathbb{R}^{p\times q}$ и $Y\colon \mathbb{R}^{s\times t} \to \mathbb{R}^{q\times r}$, зависящих от матрицы Z,

$$\frac{\partial(XY)}{\partial Z} = (Y^{\mathrm{T}} \otimes I_p)\frac{\partial X}{\partial Z} + (I_r \otimes X)\frac{\partial Y}{\partial Z} \tag{24}$$

и

$$\frac{\partial(X\otimes Y)}{\partial Z} = (I_t \otimes \Upsilon_{n,s} \otimes I_q)\left\{(I_{st}\otimes \mathrm{col}(Y))\frac{\partial X}{\partial Z} + (\mathrm{col}(X)\otimes I_{qr})\frac{\partial Y}{\partial Z})\right\}.$$

Для любой блочной матрицы A с блоками $A_{ij}(X) \in \mathbb{R}^{n_i\times m_j}$, $i,\ j = \overline{1,2}$,

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix} A_{11}(X) & A_{12}(X) \\ A_{21}(X) & A_{22}(X)\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial X}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes A_{11}(X) + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes A_{12}(X) + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\otimes A_{21}(X) + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes A_{22}(X)\right\} = \begin{pmatrix} (I_2\otimes\Upsilon_{m_1,2}\otimes I_{n_1})\frac{\partial A_{11}}{\partial X} \\ (I_2\otimes\Upsilon_{m_1,2}\otimes I_{n_2})\frac{\partial A_{21}}{\partial X} \\ (I_2\otimes\Upsilon_{m_2,2}\otimes I_{n_1})\frac{\partial A_{12}}{\partial X} \\ (I_2\otimes\Upsilon_{m_2,2}\otimes I_{n_2})\frac{\partial A_{22}}{\partial X} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В частности, если $n_i = m_j = n$ при $i,\ j = 1, 2$, получаем

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix} A_{11}(X) & A_{12}(X) \\ A_{21}(X) & A_{22}(X)\end{pmatrix} = (I_2 \otimes \Upsilon_{n,2} \otimes I_n)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_{11}}{\partial X} \\ \dfrac{\partial A_{21}}{\partial X} \\ \dfrac{\partial A_{12}}{\partial X} \\ \dfrac{\partial A_{22}}{\partial X}\end{pmatrix}.$$

Для любой блочно-столбцовой матрицы B с блоками $B_i(X) \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $i = \overline{1,\ 2}$,

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix} B_1(X) \\ B_2(X)\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial X}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes B_1(X) + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes B_2(X)\right\} =$$
$$= \begin{pmatrix} (I_1 \otimes \Upsilon_{m_1,2} \otimes I_{n_1})\dfrac{\partial B_1}{\partial X} \\ (I_2 \otimes \Upsilon_{m_1,2} \otimes I_{n_2})\dfrac{\partial B_2}{\partial X}\end{pmatrix}.$$

Для любой блочно-строчной матрицы C с блоками $C_i(X) \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$, $i = \overline{1, 2}$

$$\frac{\partial C}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix} C_1(X) & C_2(X)\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial X}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \otimes C_1(X) + \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \otimes C_2(X)\right\} =$$
$$= \begin{pmatrix} (I_2 \otimes \Upsilon_{m_1,1} \otimes I_n)\dfrac{\partial C_1}{\partial X} & (I_2 \otimes \Upsilon_{m_2,1} \otimes I_n)\dfrac{\partial C_2}{\partial X}\end{pmatrix}. \quad (26)$$

Векторизованное решение $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ уравнения Ляпунова

$$AXA^{\mathrm{T}} - X + Y + Y^{\mathrm{T}} = 0,$$

где $A,\ Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — некоторые заданные матрицы, а матрица A устойчива по Шуру, имеет вид [26]

$$\operatorname{col}(X) = (I_{n^2} - A \times A)^{-1}(I_{n^2} + \Upsilon_{n,n})\operatorname{col}(Y). \quad (27)$$

Стабилизирующее решение $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ алгебраического уравнения Риккати

$$S = ASA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} - \Lambda\Theta\Lambda^{\mathrm{T}},$$

где

$$\Theta = CSC^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}}, \quad \Lambda = (ASC^{\mathrm{T}} + BD^{\mathrm{T}})\Theta^{-1},$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ — заданные матрицы, единственно и гладким образом зависит от матриц A, B, C, D в окрестности тех их значений, где оно существует. Производные стабилизирующего решения S алгебраического уравнения Риккати и сопутствующих матриц Θ, Λ имеют вид [26]:

$$\frac{\partial S}{\partial(A, B, C, D)} = (I_{n^2} - (F \otimes A) + \Upsilon_{n,n}((\Lambda C) \otimes F))^{-1}(I_{n^2} + \Upsilon_{n,n}) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} ([FS, B - \Lambda D] \otimes I_n) & -([FS, B - \Lambda D] \otimes \Lambda)\end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta}{\partial(A,B,C,D)} = (C\otimes C)\frac{\partial S}{\partial(A,B,C,D)} + [0_{p^2\times n(n+m)}, (I_{p^2}+\Upsilon_{p,p})([CS,D]\otimes I_p)],\\
&\frac{\partial\Lambda}{\partial(A,B,C,D)} = (\Theta^{-1}\otimes I_n)\left\{(C\otimes A)\frac{\partial S}{\partial(A,B,C,D)}+\right.\\
&\qquad\left.+([CS,D]\otimes I_n), \Upsilon_{p,n}([AS,B]\otimes I_p)] - (I_p\otimes\Lambda)\frac{\partial\Theta}{\partial(A,B,C,D)}\right\} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

где $F = A - \Lambda C$.

5. Выражения для матричных производных

Получим явные аналитические выражения для производных $\dfrac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{A})}{\partial(q,Q)}$, используя правила дифференцирования матричнозначных отображений, установленные в предыдущем параграфе.

Обозначим

$$
\widetilde{\Omega}_n = I_2\otimes\Upsilon_{n,2}\otimes I_n.
$$

Пусть $l = s_1+s_2+s_3$ и $s = 1+n_2+np_2+nm_2$.

В соответствии с формулами (23)–(26), производные матриц замкнутой системы по параметру q и матрицам регулятора $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ можно выразить следующим образом:

$$
\frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{A}} = \widetilde{\Omega}_n\begin{pmatrix}0_{n^2\times n^2}\\0_{n^2\times n^2}\\0_{n^2\times n^2}\\I_{n^2}\end{pmatrix},\quad
\frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{B}} = \widetilde{\Omega}_n\begin{pmatrix}0_{n^2\times np}\\C_2\otimes I_n\\0_{n^2\times np}\\0_{n^2\times np}\end{pmatrix},\quad
\frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{C}} = \widetilde{\Omega}_n\begin{pmatrix}0_{n^2\times m_2n}\\0_{n^2\times m_2n}\\I_n\otimes B_2\\0_{n^2\times m_2n}\end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\partial\bar{C}_1}{\partial\widehat{C}} = (I_2\otimes\Upsilon_{n,1}I_{p_1})\begin{pmatrix}0_{np_1\times np_2}\\I_n\otimes D_{12}\end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\partial\bar{B}_1}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{B}_1}{\partial\widehat{A}} & \frac{\partial\bar{B}_1}{\partial\widehat{B}} & \frac{\partial\bar{B}_1}{\partial\widehat{C}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0_{2nl\times n^2} & 0_{2nl\times np_2} & 0_{2nl\times nm_2}\end{pmatrix} = 0_{2nl\times(s-1)},
$$

$$
\frac{\partial\bar{A}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix}0_{4n^2\times1} & \frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{A}} & \frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{B}} & \frac{\partial\bar{C}}{\partial\widehat{C}}\end{pmatrix},\quad
\frac{\partial\bar{B}_1}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix}0_{2nl\times1} & \frac{\partial\bar{B}_1}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}, \qquad (30)
$$

$$
\frac{\partial\bar{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix}0_{2np_1\times1} & 0_{2np_1\times n^2} & 0_{2np_1\times np_2} & \frac{\partial\bar{C}}{\partial\widehat{C}}\end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{A}} & \frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{B}} & \frac{\partial\bar{A}}{\partial\widehat{C}}\\
0_{2nl\times n^2} & 0_{2nl\times np_2} & 0_{2nl\times nm_2}\\
0_{2np_1\times n^2} & 0_{2np_1\times np_2} & \frac{\partial\bar{C}}{\partial\widehat{C}}\\
0_{p_1l\times n^2} & 0_{p_1l\times np_2} & 0_{p_1l\times nm_2}
\end{pmatrix},
$$

$$
\frac{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix}0_{(4n^2+2nl+2np_1+p_1l)\times1} & \frac{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}. \qquad (31)
$$

Получим производные решения уравнения Риккати (4) и сопутствующих матриц. Дифференцирование первого уравнения из (4) дает

$$\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = (\bar{A}^{\mathrm{T}}\otimes\bar{A}^{\mathrm{T}})\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} +$$

$$+\Big((I_{2n}\otimes(\tilde{Y}\bar{A})^{\mathrm{T}})+((\tilde{Y}\bar{A})^{\mathrm{T}}\otimes I_{2n})\Big)\Upsilon_{2n,2n}\frac{\partial\bar{A}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}+(L^{\mathrm{T}}\otimes L^{\mathrm{T}})\frac{\partial\Pi^{-1}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}+$$

$$+\frac{\partial\Xi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}+\Big((I_{2n}\otimes(\Pi^{-1}L)^{\mathrm{T}})+((\Pi^{-1}L)^{\mathrm{T}}\otimes I_{2n})\Big)\Upsilon_{2n,l}\frac{\partial L}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}. \quad (32)$$

Можно видеть, что

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = \begin{pmatrix} I_{4n^2} & 0_{4n^2\times 2nl} & 0_{4n^2\times 2np_1} & 0_{4n^2\times p_1 l}\end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial\bar{B}_1}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = \begin{pmatrix} 0_{2nl\times 4n^2} & I_{2nl} & 0_{2nl\times 2np_1} & 0_{2nl\times p_1 l}\end{pmatrix}. \quad (34)$$

Также

$$\frac{\partial(\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{A})}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = \begin{pmatrix} I_{2n}\otimes(\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}) & ((\tilde{Y}\bar{A})^{\mathrm{T}}\otimes I_l)\Upsilon_{2n,l} & 0_{2nl\times np_1} & 0_{2nl\times p_1 l}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{B}_0)}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = \begin{pmatrix} 0_{m_1 l\times 4n^2} & ((\tilde{Y}\bar{B}_0)^{\mathrm{T}}\otimes I_l)\Upsilon_{2n,l} & 0_{m_1 l\times 2np_1} & 0_{m_1 l\times m_1 p_1}\end{pmatrix}.$$

Дифференцируя очевидное равенство $\Pi\Pi^{-1}=I_l$, получаем

$$(I_l\otimes\Pi)\frac{\partial\Pi^{-1}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}+(\Pi^{-1}\otimes I_l)\frac{\partial\Pi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = 0_{l_2\times\psi},$$

где $\psi = 4n^2+2nl+2np_1+p_1 l$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\Pi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = -(\Pi^{-1}\otimes I_l)^{-1}(I_l\otimes\Pi)\frac{\partial\Pi^{-1}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}. \quad (35)$$

С другой стороны, с учетом (34) и (21), имеем

$$\frac{\partial\Pi^{-1}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = -(\bar{B}_1\otimes\bar{B}_1)^{\mathrm{T}}\frac{\partial\tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} -$$

$$-\Big(((\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y})\otimes I_l)\Upsilon_{2n,l}+(I_l\otimes(\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}))\Big)\frac{\partial\bar{B}_1}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}. \quad (36)$$

Далее,

$$\frac{\partial L}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = ((\bar{A}\tilde{Y}\bar{B}_1)\otimes I_l)\frac{\partial \Pi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} + (I_{2n}\otimes \Pi)\frac{\partial(\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{A})}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} \tag{37}$$

и

$$\frac{\partial \Xi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = 0_{4n^2\times\psi}. \tag{38}$$

С учетом приведенных выражений (33)–(38), можно записать вид производной для $\dfrac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}$ из (32)

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = \Big\{ I_{4n^2} - (\bar{A}^{\mathrm{T}}\otimes\bar{A}^{\mathrm{T}}) + \Upsilon_{2n,2n}(L^{\mathrm{T}}\otimes L^{\mathrm{T}})(\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\otimes\bar{B}_1^{\mathrm{T}}) -$$

$$- (I_{4n^2}+\Upsilon_{2n,2n})(\bar{A}^{\mathrm{T}}\otimes(\bar{B}_1L)^{\mathrm{T}})\Big\}^{-1}(I_{4n^2}+\Upsilon_{2n,2n})\Big\{\Big(((I_{2n}\otimes(\tilde{Y}\bar{A})^{\mathrm{T}}) +$$

$$(I_{2n}\otimes(L^{\mathrm{T}}\bar{B}_1)^{\mathrm{T}}\tilde{Y}))\Big)\frac{\partial \bar{A}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} + \Big(((\tilde{Y}\bar{A})^{\mathrm{T}}\otimes L^{\mathrm{T}})\Upsilon_{2n,l} -$$

$$- (L^{\mathrm{T}}\otimes(L^{\mathrm{T}}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}))\Big)\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}\Big\}. \tag{39}$$

Подставляя выражение (39) для производной $\dfrac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}$ в формулу (36), можно получить производную $\dfrac{\partial \Pi^{-1}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}$, и затем по формулам (35) и (37) — производные $\dfrac{\partial \Pi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}$ и $\dfrac{\partial L}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}$ соответственно. Более того,

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} = (\bar{B}_0^{\mathrm{T}}\otimes(\Pi\bar{B}_1^{\mathrm{T}}))\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} +$$

$$+ ((\bar{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{Y}\bar{B}_0)^{\mathrm{T}}\otimes I_l)\frac{\partial \Pi}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})} + ((\tilde{Y}\bar{B}_0)^{\mathrm{T}}\otimes\Pi)\Upsilon_{2n,l}\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}. \tag{40}$$

Затем, используя выражения (37) и (40), получим производные

$$\frac{\partial L}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \frac{\partial L}{\partial(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})}\,\frac{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B}_1,\widehat{C})}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B}_1,\widehat{C})} = \frac{\partial \Sigma}{\partial(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})}\,\frac{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}, \tag{42}$$

где производная $\dfrac{\partial(\bar{A},\bar{B}_1,\bar{C},\bar{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяется формулой (31).

Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial L_1}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ \dfrac{\partial L_2}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}\tag{43}$$

и $M=L_1+L_2$, имеем

$$\frac{\partial M}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}I_{nl} & I_{nl}\end{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}.\tag{44}$$

Определим производные матриц A_w, B_w и C_w из уравнения Риккати (5) реализации вспомогательной замкнутой по матрицам регулятора $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$:

$$\frac{\partial A_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\frac{\partial \bar{A}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}+\widetilde{\Omega}_n\begin{pmatrix}(I_n\otimes B_1)\dfrac{\partial L_1}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ 0_{n^2\times s}\\ (I_n\otimes B_1)\dfrac{\partial L_2}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ 0_{n^2\times s}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial B_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=(\Upsilon_{m_1,2}\otimes I_n)\begin{pmatrix}(I_{m_1}\otimes B_1)\dfrac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ 0_{nm_1\times s}\end{pmatrix}+$$
$$+(\Upsilon_{m_1,2}\otimes I_n)\begin{pmatrix}0_{nm_1\times s}\\ (D_{21}^{\mathrm{T}}\otimes I_n)\dfrac{\partial \widehat{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial C_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\frac{\partial \bar{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},$$

где

$$\frac{\partial \widehat{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}0_{np_2\times 1} & 0_{np_2\times n^2} & I_{np_2} & 0_{np_2\times m_2 n}\end{pmatrix},$$

производные $\dfrac{\partial L_1}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ и $\dfrac{\partial L_2}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяются блочным разбиением (43) и выражением (41), а производные $\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$, $\dfrac{\partial \bar{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ и $\dfrac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяются формулами (30) и (42) соответственно. Тогда

$$\frac{\partial(A_w,B_w,C_w)}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ \dfrac{\partial B_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ \dfrac{\partial C_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}$$

и

$$\frac{\partial(A_w,B_w,C_w)}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_w,B_w,C_w}{\partial q} & \dfrac{\partial(A_w,B_w,C_w)}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}. \tag{45}$$

Производные стабилизирующего решения R уравнения Риккати (5) и сопутствующих матриц L_w, Σ_w по параметру q и матрицам реализации вспомогательной системы F_w имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}=\Big\{I_{4n^2}-(A_w^{\mathrm{T}}\otimes A_w^{\mathrm{T}})-\Upsilon_{2n,2n}(L_w^{\mathrm{T}}B_w^{\mathrm{T}}\otimes L_w^{\mathrm{T}}B_w^{\mathrm{T}})\Big\}^{-1}\times$$
$$\times\Big\{\mathrm{col}(C_w^{\mathrm{T}}C_w)+(I_{4n^2}+\Upsilon_{2n,2n})\,\mathrm{col}(L_w^{\mathrm{T}}D_w^{\mathrm{T}}C_w),(I_{4n^2}+\Upsilon_{2n,2n})\Big[(I_{2n}\otimes(A_w^{\mathrm{T}}+L_w^{\mathrm{T}}B_w^{\mathrm{T}})R),$$
$$(L_w^{\mathrm{T}}\otimes(L_w^{\mathrm{T}}B_w^{\mathrm{T}}R))+((A_w^{\mathrm{T}}R)\otimes L_w^{\mathrm{T}})\Upsilon_{2n,m_1},(I_{2n}\otimes q(C_w^{\mathrm{T}}+L_w^{\mathrm{T}}D_w^{\mathrm{T}}))\Big]\Big\},$$

$$\frac{\partial\Sigma_w}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}=((\Sigma_wB_w^{\mathrm{T}})\otimes(\Sigma_wB_w^{\mathrm{T}}))\frac{\partial R}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}+$$
$$\begin{pmatrix}0_{m_1^2\times1} & 0_{m_1^2\times4n^2} & (I_{m_1^2}+\Upsilon_{m_1,m_1})(\Sigma_w\otimes(\Sigma_wB_w^{\mathrm{T}}R)) & 0_{m_1^2\times2np_1}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial L_w}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}=((L_w^{\mathrm{T}}\Sigma_w^{-1})\otimes I_{m_1})\frac{\partial\Sigma_w}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}+(A_w^{\mathrm{T}}\otimes(\Sigma_wB_w^{\mathrm{T}}))\frac{\partial R}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}+$$
$$+\begin{pmatrix}((D_w^{\mathrm{T}}C_w)^{\mathrm{T}}\otimes\Sigma_w) & (I_{2n}\otimes(\Sigma_wB_w^{\mathrm{T}}R)) & \Upsilon_{m_1,2n}(\Sigma_w\otimes(RA_w)^{\mathrm{T}}) & (I_{2n}\otimes(q\Sigma_wD_w^{\mathrm{T}}))\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial L_w}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial L_w}{\partial q} & \dfrac{\partial L_w}{\partial(A_w,B_w,C_w)}\end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial\Sigma_w}{\partial(q,A_w,B_w,C_w)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Sigma_w}{\partial q} & \dfrac{\partial\Sigma_w}{\partial(A_w,B_w,C_w)}\end{pmatrix}. \tag{47}$$

С учетом блочных разбиений (45), (46) и (47) можем записать

$$\frac{\partial L_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial L_w}{\partial q} & \dfrac{\partial L_w}{\partial(A_w,B_w,C_w)}\dfrac{\partial(A_w,B_w,C_w)}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial\Sigma_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Sigma_w}{\partial q} & \dfrac{\partial\Sigma_w}{\partial(A_w,B_w,C_w)}\dfrac{\partial(A_w,B_w,C_w)}{\partial(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}. \tag{49}$$

Поскольку

$$\frac{\partial L_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial L_{1w}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ \dfrac{\partial L_{2w}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix} \tag{50}$$

и $M_w = L_{1w} + L_{2w}$, то

$$\frac{\partial M_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} = \begin{pmatrix} I_{nm_1} & I_{nm_1} \end{pmatrix} \frac{\partial L_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})}. \tag{51}$$

Чтобы определить матричную производную $\dfrac{\partial P}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})}$, рассмотрим уравнение Ляпунова (9). По формулам (24), (27)

$$\frac{\partial P}{\partial \Sigma_w} = \{I_{4n^2} - (A_w + B_w L_w) \otimes (A_w + B_w L_w)\}^{-1} (B_w \otimes B_w),$$

$$\frac{\partial P}{\partial L_w} = \{I_{4n^2} - (A_w + B_w L_w) \otimes (A_w + B_w L_w)\}^{-1} \times \\ \times (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n})(((A_w + B_w L_w)P) \otimes B_w),$$

$$\frac{\partial P}{\partial(A_w, B_w)} = \{I_{4n^2} - (A_w + B_w L_w) \otimes (A_w + B_w L_w)\}^{-1} \times \\ \times (I_{4n^2} + \Upsilon_{2n,2n})\Big(\begin{pmatrix} (A_w + B_w L_w)P & (A_w + B_w L_w)P L_w^{\mathrm{T}} + B_w \Sigma_w \end{pmatrix} \otimes I_{2n}\Big),$$

и тогда

$$\frac{\partial P}{\partial q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} = \begin{pmatrix} 0_{4n^2 \times 1} & \dfrac{\partial P}{\partial(A_w, B_w)} \dfrac{\partial(A_w, B_w)}{\partial(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} \end{pmatrix} + \\ + \frac{\partial P}{\partial L_w} \frac{\partial L_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} + \frac{\partial P}{\partial \Sigma_w} \frac{\partial \Sigma_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})}.$$

Найдем производную $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})}$. Поскольку

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \ln \det \left\{ \frac{m_1 \Sigma_w}{\Phi} \right\},$$

где $\Phi = \mathrm{trace}(L_w P L_w^{\mathrm{T}} + \Sigma_w)$, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Sigma_w} \frac{\partial \Sigma_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})}, \tag{52}$$

где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} = \frac{\partial \Phi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} + \frac{\partial \Phi}{\partial L_w} \frac{\partial L_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_w} \frac{\partial \Sigma_w}{\partial(q, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = \mathrm{coltrace}(m_1)(L_w \otimes L_w), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial L_w} = 2\,\mathrm{coltrace}(m_1)((L_w P) \otimes I_{m_1}), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_w} = \mathrm{coltrace}(m_1),$$

матрица $\operatorname{col}\operatorname{trace}(m1) \in \mathbb{R}^{1\times m_1^2}$ образована последовательным объединением транспонированных столбцов единичной матрицы I_{m_1} и производные $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Phi}$, $\dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Sigma_w}$ определяются как

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Phi} = \frac{m_1}{2\Phi}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Sigma_w} = -\frac{1}{2}\operatorname{col}\operatorname{trace}(m_1)(I_{m_1}\otimes \Sigma_w).$$

Найдем производные матриц реализации замкнутой системы из уравнения Риккати (6) в пространстве состояний $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{C}_{21}$ и $\tilde{D}_{21}$ по параметру q и матрицам регулятора $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$:

$$\frac{\partial \tilde{A}_{11}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \frac{\partial(A + B_3L_1 + (B_1 + B_3\Sigma^{1/2})L_{w1})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = (I_n\otimes B_3)\frac{\partial L_{1w}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} +$$
$$+ (I_n\otimes B_1)\frac{\partial L_1}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + (L_{1w}^{\mathrm{T}}\otimes B_1)\frac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + (I_n\otimes (B_1\Sigma))\frac{\partial L_{1w}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \frac{\partial(B_1 + B_3\Sigma^{1/2})\Sigma_w^{1/2}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} =$$
$$= (I_{m_1}\otimes(B_3 + B_1\Sigma))\frac{\partial \Sigma_w^{1/2}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + (\Sigma_w^{1/2}\otimes B_1)\frac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},$$

$$\frac{\partial \tilde{C}_{21}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \frac{\partial(C_3 + D_{33}L_{1w})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = (I_n\otimes D_{33})\frac{\partial L_{1w}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},$$
$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = (I_{m_1}\otimes D_{33})\frac{\partial \Sigma_w^{1/2}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},$$

$$\frac{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = (I_{m_1}\otimes D_{33})\frac{\partial \Sigma_w^{1/2}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{A}_{11}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \\ \dfrac{\partial \tilde{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \\ \dfrac{\partial \tilde{C}_{21}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \\ \dfrac{\partial \tilde{D}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \end{pmatrix},$$

где матричные производные $\dfrac{\partial L_{1w}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$, $\dfrac{\partial L_1}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ и $\dfrac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяются формулами (50), (43) и (42) соответственно, а матричную производную $\dfrac{\partial \Sigma_w^{1/2}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ можно определить, продифференцировав очевидное равенство $\Sigma_w^{1/2}\Sigma_w^{1/2} = \Sigma_w$:

$$\frac{\partial \Sigma_w^{1/2}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \left\{(I_{m_1}\otimes \Sigma_w^{1/2}) + (\Sigma_w^{1/2}\otimes I_{m_1})\right\}^{-1}\frac{\partial \Sigma_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}.$$

Производные стабилизирующего решения S алгебраического уравнения Риккати (6) и сопутствующих матриц Θ, Λ по матрицам реализации системы $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}_{21}$, $\tilde{D}$, в соответствии с выражениями (28)–(29), имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}=\Big(I_{n^2}-((\tilde{A}_{11}-\Lambda\tilde{C}_{21})\otimes\tilde{A}_{11})+\Upsilon_{n,n}((\Lambda\tilde{C}_{21})\otimes(\tilde{A}_{11}-\Lambda\tilde{C}_{21}))\Big)^{-1}\times$$
$$\times(I_{n^2}+\Upsilon_{n,n})\Big(([(\tilde{A}_{11}-\Lambda\tilde{C}_{21})S,\tilde{B}-\Lambda\tilde{D}]\otimes I_n)\quad -([(\tilde{A}_{11}-\Lambda\tilde{C}_{21})S,\tilde{B}-\Lambda\tilde{D}]\otimes\Lambda)\Big),$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}=(\tilde{C}_{21}\otimes\tilde{C}_{21})\frac{\partial S}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}+$$
$$+\Big(0_{p_2^2\times n(n+m_1)}\quad (I_{p_2^2}+\Upsilon_{p_2,p_2})([\tilde{C}_{21}S,\tilde{D}]\otimes I_{p_2})\Big),$$
$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}=(\Theta^{-1}\otimes I_n)\Big\{(\tilde{C}_{21}\otimes\tilde{A}_{11})\frac{\partial S}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}+$$
$$+([\tilde{C}_{21}S,\tilde{D}]\otimes I_n),\Upsilon_{p_2,n}([\tilde{A}_{11}S,\tilde{B}]\otimes I_{p_2})]-(I_{p_2}\otimes\Lambda)\frac{\partial\Theta}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}\Big\}. \quad (53)$$

Теперь можно выразить матричную производную $\frac{\partial\Lambda}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ следующим образом:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\frac{\partial\Lambda}{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}\,\frac{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}, \quad (54)$$

где матричная производная $\frac{\partial(\tilde{A}_{11},\tilde{B},\tilde{C}_{21},\tilde{D})}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяется выражением (53).

Далее, найдем производные матриц A_u и C_u реализации системы из уравнения Риккати (7) в пространстве состояний по параметру q и матрицам регулятора $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$:

$$\frac{\partial A_u}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\widetilde{\Omega}_n\begin{pmatrix}0_{n^2\times s}\\ 0_{n^2\times s}\\ \mathcal{D}_1\\ \mathcal{D}_2\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial C_u}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=0_{2np_1\times s},$$

где

$$\mathcal{D}_1=(I_n\otimes(B_3+B_1\Sigma))\frac{\partial M_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}+(I_n\otimes B_1)\frac{\partial M}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}+(M_w^{\mathrm{T}}\otimes B_1)\frac{\partial\Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},$$
$$\mathcal{D}_2=(I_n\otimes B_2)\frac{\partial\widehat{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}+(I_n\otimes(B_3+B_1\Sigma))\frac{\partial M_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}+$$
$$+(I_n\otimes B_1)\frac{\partial M}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}+(M_w^{\mathrm{T}}\otimes B_1)\frac{\partial\Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}.$$

Далее

$$\frac{\partial(A_u,C_u)}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_u}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\\ \dfrac{\partial C_u}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}\end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial\widehat{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}=\Big(0_{nm_2\times 1}\quad 0_{nm_2\times n^2}\quad 0_{nm_2\times np_2}\quad I_{nm_2}\Big),$$

и матричные производные $\dfrac{\partial M_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$, $\dfrac{\partial M}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ и $\dfrac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяются выражениями (51), (44) и (42) соответственно.

Производные стабилизирующего решения T алгебраического уравнения Риккати (7) и сопутствующих матриц Υ, M по матрицам реализации системы (8), в соответствии с формулами (28)–(29), имеют вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)} &= \Big\{ I_{4n^2} - (A_u^{\mathrm T}\otimes(A_u^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}B_u^{\mathrm T})) - \\
&\qquad - \Upsilon_{2n,2n}((A_u^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}B_u^{\mathrm T})\otimes(N^{\mathrm T}B_u^{\mathrm T}))\Big\}^{-1}(I_{4n^2}+\Upsilon_{2n,2n})\times \\
&\qquad \times\Big([I_{2n},N^{\mathrm T}]\otimes(A_u^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}B_u^{\mathrm T})T \quad \begin{pmatrix} I_{2n} & N^{\mathrm T}\end{pmatrix}\otimes(N^{\mathrm T}D_u^{\mathrm T}+C_u^{\mathrm T})\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Upsilon}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)} &= (B_u^{\mathrm T}\otimes B_u^{\mathrm T})\frac{\partial T}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)} + \times \\
&\qquad \times (I_{m_2^2}+\Upsilon_{m_2,m_2})\Big(0_{m_2^2\times 4n^2} \quad (I_{m_2}\otimes(B_u^{\mathrm T}T)) \quad 0_{m_2^2\times 2np_1} \quad (I_{m_2}\otimes D_u^{\mathrm T})\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)} &= -(I_{2n}\otimes\Upsilon^{-1})\Big\{(A_u^{\mathrm T}\otimes B_u^{\mathrm T})\frac{\partial T}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)} + \\
&+\Big((I_{2n}\otimes(B_u^{\mathrm T}T)) \quad \Upsilon_{2n,m_2}(I_{m_2}\otimes(A_u^{\mathrm T}T)) \quad (I_{2n}\otimes D_u^{\mathrm T}) \quad \Upsilon_{2n,m_2}(I_{m_2}\otimes C_u^{\mathrm T})\Big) + \\
&\qquad + (N^{\mathrm T}\otimes I_{m_2})\frac{\partial \Upsilon}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что

$$
\frac{\partial N}{\partial(A_u,B_u,C_u,D_u)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial A_u} & \dfrac{\partial N}{\partial B_u} & \dfrac{\partial N}{\partial C_u} & \dfrac{\partial N}{\partial D_u}\end{pmatrix}
$$

Производные матриц регулятора имеют вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{A}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} &= \frac{\partial \widehat{A}}{\partial M_w}\,\frac{\partial M_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + \frac{\partial \widehat{A}}{\partial \Lambda}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + \\
&+ \frac{\partial \widehat{A}}{\partial M}\,\frac{\partial M}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + \frac{\partial \widehat{A}}{\partial \Sigma}\,\frac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} + \frac{\partial \widehat{A}}{\partial \widehat{C}}\,\frac{\partial \widehat{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},
\end{aligned} \tag{56}
$$

$$
\frac{\partial \widehat{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \frac{\partial \Lambda}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}, \qquad \frac{\partial \widehat{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \begin{pmatrix} I_{nm_2} & I_{nm_2}\end{pmatrix}\frac{\partial N}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}, \tag{57}
$$

где

$$
\frac{\partial \widehat{A}}{\partial \Lambda} = -(C_2+D_{21}M_w)^{\mathrm T}\otimes I_n, \qquad \frac{\partial \widehat{A}}{\partial M_w} = I_n\otimes(B_3+B_1\Sigma_w-\Lambda D_{21}),
$$

$$
\frac{\partial \widehat{A}}{\partial \widehat{C}} = I_n\otimes B_2, \qquad \frac{\partial \widehat{A}}{\partial M} = I_n\otimes B_1, \qquad \frac{\partial \widehat{A}}{\partial \Sigma} = M_w^{\mathrm T}\otimes B_1,
$$

$$
\frac{\partial N}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} = \frac{\partial N}{\partial(A_u,C_u)}\,\frac{\partial(A_u,C_u)}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}
$$

и матричные производные

$$\frac{\partial M_w}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},\quad \frac{\partial \Lambda}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},\quad \frac{\partial M}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},\quad \frac{\partial \Sigma}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})},\quad \frac{\partial (A_u,C_u)}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$$

определяются выражениями (50), (54), (44), (42) и (55) соответственно.

Теперь можно сформировать матричную производную $\dfrac{\partial\mathcal{F}(q,Q)}{\partial(q,Q)}$ следующим образом:

$$\frac{\partial\mathcal{F}(q,Q)}{\partial(q,Q)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widehat{A}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \\ \dfrac{\partial \widehat{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \\ \dfrac{\partial \widehat{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})} \end{pmatrix},$$

где матричные производные $\dfrac{\partial \widehat{A}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$, $\dfrac{\partial \widehat{B}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ и $\dfrac{\partial \widehat{C}}{\partial(q,\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})}$ определяются выражениями (56)–(57).

Поскольку

$$\frac{\partial\mathcal{F}(q,Q)}{\partial(q,Q)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mathcal{F}(q,Q)}{\partial q} & \dfrac{\partial\mathcal{F}(q,Q)}{\partial Q} \end{pmatrix},$$

можно легко получить матричные производные $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}$ и $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial Q}$.

Напомним, что производная $\frac{\partial\mathcal{A}(q,Q)}{\partial q}$ определяется выражением (52) и

$$\frac{\partial\mathcal{A}(q,Q)}{\partial(q,Q)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mathcal{A}(q,Q)}{\partial q} & \dfrac{\partial\mathcal{A}(q,Q)}{\partial Q} \end{pmatrix},$$

откуда нетрудно получить производные $\dfrac{\partial\mathcal{A}(q,Q)}{\partial q}$ и $\dfrac{\partial\mathcal{A}(q,Q)}{\partial Q}$.

Заключение

В данной работе предложен метод решения задачи анизотропийной $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации на базе метода гомотопии. Применение разработанного алгоритма для решения специфической системы матричных уравнений, получаемой в задачах анизотропийной теории, позволяет успешно находить корни этой системы, в то время как стандартные методы выпуклой оптимизации оказываются не пригодны для использования. Подход на базе метода гомотопии является предпочтительным из–за того, что он основывается на заранее подобранном первом приближении решения задачи оптимизации, в качестве которого выбран $\mathcal{H}_2$–регулятор, которое потом преобразуется в требуемый анизотропийный регулятор с помощью специальным образом организованного итерационного алгоритма. Также в работе изложены основные понятия дифференцирования матричных выражений и приведены примеры, которые могут быть полезны при реализации любых численных или аналитических вычислений. В приложении приведены свойства кронекерова произведения матриц и дифференцирования матрицы по матрице, которые позволяют упрощать громоздкие формулы производных от матричных выражений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-07-00267.

Приложение

В этом разделе приведем свойства, которые использованы для упрощения громоздких выражений матричных производных, полученных в предыдущих разделах. Всегда достаточно использовать только формулы (24)–(25) для дифференцирования любого матричного выражения, однако, более компактная запись матричных производных упрощает дальнейшие выкладки и отладку численных алгоритмов при моделировании. Все ниже приведенные свойства справедливы для любых матриц A, B, X и Y соответствующих размерностей. Символом $\Upsilon_{p,q}$ обозначен специальный оператор (22).

$$(A \otimes I_n)(B \otimes I_n) = ((AB) \otimes I_n);$$

$$(I_n \otimes A)(I_n \otimes B) = (I_n \otimes (AB));$$

$$(A_{s\times t} \otimes I_p)(I_t \otimes B_{p\times q}) = (I_s \otimes B_{p\times q})(A_{s\times t} \otimes I_q) = (A_{s\times t} \otimes B_{p\times q});$$

$$\Upsilon_{r,p}(A_{p\times q} \otimes I_r)\Upsilon_{q,r} = (I_r \otimes A_{p\times q});$$

$$\Upsilon^{-1}_{2n,2n}\Upsilon_{2n,2n} = I_{4n^2};$$

$$\Upsilon_{p,q}\Upsilon_{q,p} = I_{pq};$$

$$(A^{\mathrm{T}} \otimes A^{\mathrm{T}}) = (A \otimes A)^{\mathrm{T}};$$

$$(A_n^{-1} \otimes I_n)^{-1}(I_n \otimes A_n) = (A_n \otimes A_n),\ (I_n \otimes A_n)^{-1}(A_n^{-1} \otimes I_n) = (A_n^{-1} \otimes A_n^{-1});$$

$$(A_{p\times q} \otimes A_{p\times q})\Upsilon_{q,q} = \Upsilon_{p,p}(A_{p\times q} \otimes A_{p\times q}),\ (A_{p\times p} \otimes I_q)\Upsilon_{p,q} = \Upsilon_{p,q}(I_q \otimes A_{p\times p});$$

$$(I_p \otimes A_{p\times q})\Upsilon_{p,q} = \Upsilon_{p,p}(A_{p\times q} \otimes I_p),\ (A_{p\times q} \otimes I_p)\Upsilon_{q,p} = \Upsilon_{p,p}(I_p \otimes A_{p\times q});$$

$$(I_p \otimes B_{n\times q})\Upsilon_{p,q} = \Upsilon_{p,n}(B_{n\times q} \otimes I_p),\ (A_{p\times q} \otimes I_r)\Upsilon_{q,r} = \Upsilon_{p,r}(I_r \otimes A_{p\times q});$$

$$\frac{\partial X_{p\times q}}{\partial X_{p\times q}} = I_{pq};$$

$$\frac{\partial X^{\mathrm{T}}_{p\times q}}{\partial Y_{p\times q}} = \Upsilon_{p,q}\frac{\partial X_{p\times q}}{\partial Y_{p\times q}}.$$

Список литературы

1. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. Vol. 34. P. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425

2. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. Vol. 26, no. 2. P. 301–320. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102603

3. Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives II: Optimal control // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. Vol. 39. P. 1575–1587. DOI: 10.1109/9.310031

4. Francis B.A. A Course of $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory // Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. 141 p. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 88.). DOI: 10.1007/BFb0007371

5. Berman N., Shaked U. $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Nonlinear Stochastic Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2006. Vol. 51, no. 6. P. 1041–1046. DOI: 10.1109/TAC.2006.876808

6. Gerson E., Shaked U., Yaesh I. $\mathcal{H}_\infty$ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 409–417. DOI: 10.1016/S0005-1098(00)00164-3

7. Scherer C. Theory of Robust Control. Mechanical Engineering Systems and Control Group Delft University of Technology The Netherlands. April 2001. 160 p.

8. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. Vol. 42. no. 7. P. 896–911. DOI: 10.1109/9.599969

9. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P. Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. Florida, USA. Vol. 3. 1994. P. 2249–2250.

10. Iwasaki T., Skelton R.E., Grigoriadis K.M. A United Algebraic Approach to Linear Control Design. London: Taylor and Francis, 1998. 304 p.

11. Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based $\mathcal{H}_\infty$ synthesis // Automatica. 1996. Vol. 32. no. 7. P. 1007–1014. DOI: 10.1016/0005-1098(96)00033-7

12. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1994. Vol. 4, no. 4. P. 421–448. DOI: 10.1002/rnc.4590040403

13. Apkarian P., Noll D. Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$-synthesis // IEEE Trans. Automat. Control. 2006. Vol. 51, iss. 1. P. 71–86. DOI: 10.1109/TAC.2005.860290

14. Apkarian P., Ravanbod-Hosseini L., Noll D. Time domain constrained $\mathcal{H}_\infty$-synthesis // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2011. Vol. 21, iss. 2. P. 197–217. DOI: 10.1002/rnc.1589

15. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization problem // Proc. 13th IFAC World Congress. San-Francisco, California, USA, June 30 – July 5, 1996. Vol. H. Paper IFAC-3d-01.6-H. P. 427–432.

16. Karny M. Towards fully probabilistic control design // Automatica. 1996. Vol. 32, iss. 12. P. 1719–1722. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)80009-4

17. Diamond P., Vladimiriv I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // International Journal of Control. 2001. Vol. 74, no. 1. P. 28–42. DOI: 10.1080/00207170150202661

18. Petersen I.R., James M.R., Dupuis P. Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. Vol. 45, iss. 3. P. 398–412. DOI: 10.1109/9.847720

19. Курдюков А.П., Максимов Е.А. Решение стохастической задачи $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации для линейных дискретных систем с параметрической неопределенностью // Автоматика и телемеханика. 2006. № 8. С. 112–142.

20. Тимин В.Н., Курдюков А.П. Многокритериальная субоптимальная анизотропийная фильтрация линейных дискретных стационарных систем // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ 2014). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 901–910. DOI: 10.7463/0414.0704850

21. Андрианова О.Г. On some anisotropy-based analysis problems for linear discrete-time descriptor systems with nonzero-mean input signals // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 4. С. 160–174. DOI: 10.7463/0414.0704850

22. Чайковский М.М. Синтез динамических анизотропийных субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации и линейных матричных неравенств // Конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012): матер. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012. С. 316–319.

23. Green M., Limebeer D.J.N. Linear robust control. N. J.: Prentice Hall, 1995. 538 p.

24. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. New York: Academic Press, 1970. 599 p.

25. Юрченков А.В. Синтез анизотропийного робастного регулятора при структурированной неопределенности объекта управления // Управление большими системами. Вып. 50. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 24-57.

26. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Максимов Е.А., Тимин В.Н. Анизотропийная теория управления — новый подход к стохастической теории робастного управления // IV Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO’05): тез. пленар. докл. М., 2005. С. 9–32.

27. Курдюков А.П., Максимов Е.А., Чайковский М.М. Решение задачи стохастической $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации для дискретных линейных стационарных систем с неопределенностью методом гомотопии // Труды Института проблем управления РАН, № XXVII. М.: Институт проблем правления РАН, 2006. С. 5–36.

28. Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M. Computing anisotropic optimal controller for system with parametric uncertainty via homotopy-based algorithm // Proc. of the V international conference «System Identification and Control Problems» SICPRO'06 (Moscow, Institute of control sciences, Jan. 30 – Feb. 2, 2006). Moscow: Institute of control sciences, 2006. CD-ROM.

29. Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M. Homotopy-based algorithm for computing stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimal controller for LTI-system with uncertainty // Proc. of the 7th International Technical Conference on Process Control. Kouty nad Desnou, Czech Republic, 2006.

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 11, pp. 635–663.

DOI: **10.7463/1114.0732189**

Received: 01.10.2014
Revised: 22.10.2014

Homotopy Method in Applied Problems of the Anisotropic Control Theory

Yurchenkov A. V.[1,*]

[*]sasha_2264@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: anisotropic control theory, homotopy method, matrix derivatives

The work describes a numerical method of solving the specific systems of matrix equations emerging in the tasks of the modern theory of control. Since the standard tasks of the control theory demand making a number of assumptions about input effect, at the slightest non-compliance the synthesized laws of control become either extremely inefficient or too much power consumable. As opposed to these assumptions, while setting the problem of anisotropic theory of control, it is necessary to know only the average anisotropy level of the input sequence. Consequently, anisotropic regulators are always found to be no worse than standard ones. In synthesis of anisotropic regulator a rather complex algorithm of its construction is the only difficulty. When considering a problem of ensuring robust quality of the control object in case of the structured uncertainty there is a need to solve a system of four connected Riccati equations, equation of a special form, and Lyapunov equation. To solve it by standard methods of convex optimization is impossible. The work shows how the standard mean square Gaussian regulator allows us to obtain as anisotropic regulator to meet requirements of robust quality when there is an imperfect knowledge of mathematical model of object of control, a lack of exact stochastic characteristics of the input control, parametrical uncertainty, etc. The article offers an algorithm based on the homotopy method with the Newtonian iterations to solve a problem of anisotropic optimization. It presents a computing procedure to reach the objective. Using a task of searching the anisotropic regulator to minimize the maximum value of anisotropic norm of transfer function of the control object, the article describes required matrix derivatives of stabilizing solutions of Riccati equations, equation of a special form, and Lyapunov equation. Properties of Kronecker product and matrix differentiation with respect to matrix are given.

References

1. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1989, vol. 34, no. 8, pp. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425

2. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1981, vol. 26, no. 2, pp. 301–320. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102603

3. Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives II: Optimal control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1994, vol. 39, no. 8, pp. 1575–1587. DOI: 10.1109/9.310031

4. Francis B.A. *A Course of $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1987. 141 p. (Ser. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*; vol. 88.). DOI: 10.1007/BFb0007371

5. Berman N., Shaked U. $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Nonlinear Stochastic Systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2006, vol. 51, no. 6, pp. 1041–1046. DOI: 10.1109/TAC.2006.876808

6. Gerson E., Shaked U., Yaesh I. $\mathcal{H}_\infty$ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise. *Automatica*, 2001, vol. 37, iss. 3, pp. 409–417. DOI: 10.1016/S0005-1098(00)00164-3

7. Scherer C. *Theory of Robust Control*. Mechanical Engineering Systems and Control Group, Delft University of Technology, The Netherlands, April 2001. 160 p.

8. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1997, vol. 42, no. 7, pp. 896–911. DOI: 10.1109/9.599969

9. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P. Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, Florida, USA, vol. 3, 1994, pp. 2249–2250.

10. Iwasaki T., Skelton R.E., Grigoriadis K.M. *A United Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis, London, 1998. 304 p.

11. Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based $\mathcal{H}_\infty$ synthesis. *Automatica*, 1996, vol. 32, iss. 7, pp. 1007–1014. DOI: 10.1016/0005-1098(96)00033-7

12. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1994, vol. 4, no. 4, pp. 421–448. DOI: 10.1002/rnc.4590040403

13. Apkarian P., Noll D. Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$-synthesis. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2006, vol. 51, iss. 1, pp. 71–86. DOI: 10.1109/TAC.2005.860290

14. Apkarian P., Ravanbod-Hosseini L., Noll D. Time domain constrained $\mathcal{H}_\infty$-synthesis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, vol. 21, iss. 2, pp. 197–217. DOI: 10.1002/rnc.1589

15. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization problem. *Proc. 13th IFAC World Congress*, San-Francisco, California, USA, June 30 – July 5, 1996, vol. H, paper IFAC-3d-01.6-H, pp. 427–432.

16. Karny M. Towards fully probabilistic control design. *Automatica*, 1996, vol. 32, iss. 12, pp. 1719–1722. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)80009-4

17. Diamond P., Vladimiriv I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems. *International Journal of Control*, 2001, vol. 74, no. 1, pp. 28–42. DOI: 10.1080/00207170150202661

18. Petersen I.R., James M.R., Dupuis P. Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2000, vol. 45, iss. 3, pp. 398–412. DOI: 10.1109/9.847720

19. Kurdyukov A.P., Maximov E.A. Solution of the stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization problem for discrete-time linear systems under parametric uncertainty. *Avtomatika i telemekhanika*, 2006, no. 8, pp. 112–142. (English translation: *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 8, pp. 1283–1310. DOI: 10.1134/S0005117906080078).

20. Timin V.N., Kurdyukov A.P. Multicriteria suboptimal anisotropic filtering of linear discrete stationary systems. *Trudy 12 Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU 2014)* [Proceedings of the 12th National Conference on Control Problems]. Moscow, Institute of Control Sciences of Academy of Sciences, 2014, pp. 901–910. DOI: 10.7463/0414.0704850 (in Russian).

21. Andrianova O.G. On some anisotropy-based analysis problems for linear discrete-time descriptor systems with nonzero-mean input signals. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 4, pp. 160–174. DOI: 10.7463/0414.0704850

22. Tchaikovsky M.M. Synthesis of dynamic anisotropine suboptimal controllers by the methods of convex optimization and linear matrix inequalities. *Konferentsiya "Upravlenie v tekhnicheskikh, ergaticheskikh, organizatsionnykh i setevykh sistemakh" (UTEOSS-2012)*: mater. [Proc. of the Conference "Control in technical, ergatic, organizational and network systems"]. St. Petersburg, Publ. of JSC "Concern "CSRI "Electropribor", 2012, pp. 316–319. (in Russian).

23. Green M., Limebeer D.J.N. *Linear robust control*. N. J., Prentice Hall, 1995. 538 p.

24. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables*. New York, Academic Press, 1970. 599 p.

25. Yurchenkov A.V. Synthesis of anisotropic robust controller when structured uncertainty of the control object. *Upravlenie bol'shimi sistemami*. Vyp. 50 [Control of large systems. Iss. 50]. Moscow, Institute of Control Sciences of Academy of Sciences, 2014, pp. 24–57. (in Russian).

26. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Maksimov E.A., Timin V.N. Anisotropic theory of control is a new approach to the stochastic theory of robust control. *4 Mezhdunarodnaya konferentsiya "Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya" (SICPRO'05): tez. plenar. dokl*. [Abstracts of the 4th International Conference "System Identification and Control Problems" (SICPRO'05)]. Moscow, 2005, pp. 9–32. (in Russian).

27. Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M. Solution of the problem of stochastic $\mathcal{H}_\infty$ optimization for discrete-time linear time-invariant uncertain systems by the homotopy method. *Trudy Instituta problem upravleniya RAN*. No. 27 [Proc. of Institute of Control Sciences. No.27]. Moscow, Institute of Control Sciences of Academy of Sciences, 2006, pp. 5–36. (in Russian).

28. Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M. Computing anisotropic optimal controller for system with parametric uncertainty via homotopy-based algorithm. *Proc. of the V international conference "System Identification and Control Problems" SICPRO'06*. Moscow, Institute of Control Sciences, Jan. 30 – Feb. 2, 2006. Moscow, Institute of Control Sciences, 2006. CD-ROM.

29. Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M. Homotopy-based algorithm for computing stochastic $\mathcal{H}_\infty$ optimal controller for LTI-system with uncertainty. *Proc. of the 7th International Technical Conference on Process Control*, Kouty nad Desnou, Czech Republic, 2006.