Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 307–319.
DOI: 10.7463/1114.0734649
Представлена в редакцию: 4.11.2014
© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 517.91

Реализация итерационной процедуры в задачах локализации автономных систем

Канатников А. Н.[1,2,*], Крищенко А. П.[1,2]

[*]mathmod@bmstu.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[2]ИСА РАН, Москва, Россия

Статья посвящена особенностям применения функционального метода локализации в автономных непрерывных динамических системах специального вида, в которых правая часть каждого дифференциального уравнения разрешима относительно соответствующей фазовой переменной. При использовании в функциональном методе нескольких локализирующих функций возникает итерационная процедура уточнения локализирующих множеств. В системах указанного специального вида в качестве локализирующих удобно выбирать координатные функции. В статье анализируются особенности итерационной процедуры. Полученные результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: динамическая система; локализация; локализирующее множество; инвариантный компакт; итерационная процедура

Введение

В последние пятнадцать лет в теории динамических систем оформился один из способов качественного исследования динамической системы — локализация инвариантных компактных множеств динамической системы. Под локализацией здесь понимается построение в фазовом пространстве системы таких множеств, которые содержат все инвариантные компактные множества динамической системы [1].

Инвариантные компактные множества тесно связаны с ограниченными траекториями системы, структура которых в фазовом пространстве играет ключевую роль во многих приложениях теории динамических систем. Задачи локализации инвариантных компактных множеств примыкают к другим важным задачам, например, к задачам оценки областей притяжения аттракторов, задачам управляемости и т.п.

За прошедшее время исследования задач локализации были направлены как на разработку методов решения [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], так и на исследование конкретных динамических систем, встречающихся в приложениях (см., например, [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]).

Один из методов решения задач локализации, оказавшийся весьма эффективным, основан на использовании гладких функций, определенных в фазовом пространстве системы, это так называемый функциональный метод [1, 3]. Эффективность функционального метода усиливается при последовательном применении нескольких функций. При этом использование очередной функции приводит к уточнению уже построенного локализирующего множества. Возникает итерационная процедура последовательного сужения локализирующего множества [1, 2].

Настоящая работа посвящена анализу указанной итерационной процедуры, естественным образом возникающей в автономных системах специального вида, в которых правая часть каждого дифференциального уравнения разрешима относительно соответствующей фазовой переменной. Такие системы встречаются в приложениях [17]. Работа организована следующим образом. В п. 1 в соответствии с [1] даны необходимые определения и сформулированы соответствующие результаты. В п. 2 изучена задача локализации инвариантных компактов для автономных систем указанного специального вида. В заключении подводятся итоги проведенного исследования.

1. Вводные понятия

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ — гладкая функция, определенная в области $G \subset \mathbb{R}^n$; $f(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x))^{\mathrm{T}}$.

Множество $K \subset X$ называется инвариантным для системы (1), если для любой точки $x_0 \in K$ фазовая траектория системы, проходящая через эту точку, целиком содержится в K (полагаем, что каждая фазовая траектория системы определена на максимальном интервале времени).

Мы будем рассматривать инвариантные множества с дополнительным условием компактности в X. Примерами таких множеств служат положения равновесия, предельные циклы, сепаратрисы, замкнутые с помощью α-и ω-предельных множеств. Вообще замыкание любой ограниченной траектории, не выходящей на границу области X, представляет собой инвариантный компакт.

Под локализацией инвариантных компактов системы (1) мы понимаем построение такого множества в фазовом пространстве системы, которое содержит все инвариантные компакты этой системы. Указанное множество называют локализирующим.

Один из методов построения локализирующих множеств состоит в следующем. Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^n$ — произвольная гладкая функция. Обозначим через $\dot{\varphi}$ производную этой функции в силу системы (1), т.е.

$$\dot{\varphi}(x) = \varphi'(x)\, f(x),$$

где $\varphi'(x)$ — матрица Якоби функции φ в точке x. Множество

$$S_\varphi = \{x \in X\colon \dot{\varphi}(x) = 0\}$$

называют универсальным сечением, порожденным функцией φ.

Для произвольного множества $Q \subset X$ вычислим

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x).$$

В дальнейшем, если $Q = X$ указание на множество Q в этих обозначениях будем опускать, т.е. вместо $\varphi_{\inf}(X)$ и $\varphi_{\sup}(X)$ будем писать $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$.

Теорема 1. Любой инвариантный компакт системы (1), содержащийся в множестве Q, содержится в множестве

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in Q\colon \varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Теорема 1 обосновывает метод построения локализирующих множеств: для выбранной функции φ необходимо вычислить два экстремальных значения $\varphi_{\inf}(Q)$ и $\varphi_{\sup}(Q)$, которые определяют локализирующее множество $\Omega_\varphi(Q)$.

Приведем простейшие свойства локализирующих множеств:

1) пересечение любого числа локализирующих множеств является локализирующим множеством;

2) если $\psi(x) = h(\varphi(x))$, где $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая строго монотонная функция, то множества $\Omega_\varphi(Q)$ и $\Omega_\psi(Q)$ совпадают; в частности, это верно при $h(t) = at + b$, $a \neq 0$;

3) если функция φ достигает своего наименьшего (наибольшего) значения в X в некоторой точке $x_* \in Q$, то $\varphi_{\inf}(Q) = \varphi(x_*)$ (соответственно $\varphi_{\sup}(Q) = \varphi(x_*)$), а локализирующее множество $\Omega_\varphi(Q)$ задается неравенством $\varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)$ (соответственно $\varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x)$).

Возможно многократное использование теоремы 1 для различных локализирующих функций, причем при использовании очередной локализирующей функции можно учесть те локализирующие множества, которые уже построены. Например, пусть выбрана последовательность функций $\varphi_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$ С помощью функции φ_1 построим локализирующее множество $\Omega_1 = \Omega_{\varphi_1}$ (в теореме 1 полагаем $Q = X$). Затем с помощью функции φ_2 строим локализирующее множество $\Omega_2 = \Omega_{\varphi_2}(\Omega_1)$ (в теореме 1 полагаем $Q = \Omega_1$). Продолжая так и далее, на k-м шаге, имея множество Ω_{k-1}, с помощью функции φ_k строим множество $\Omega_k = \Omega_{\varphi_k}(\Omega_{k-1})$. В результате возникает последовательность вложенных множеств

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \ldots,$$

каждое из которых является локализирующим. Следовательно, локализирующим множеством является их пересечение $\Omega_\infty = \bigcap\limits_k \Omega_k$.

В описанной итерационной процедуре выбор функций φ_k может быть различным, они могут повторяться. Единственное ограничение — нельзя одну и ту же функцию использовать подряд: если $\varphi_k = \varphi_{k-1}$, то $\Omega_k = \Omega_{k-1}$.

Итерационная процедура нашла свое применение при исследовании конкретных систем, однако примеры ее использования ограничиваются одним-двумя шагами (см., например, [10]).

2. Автономные системы специального вида

В автономной системе (1) полагаем, что каждое уравнение $f_i(x) = 0$, $i = \overline{1, n}$, может быть разрешено относительно переменной x_i, т.е. эквивалентно некоторому уравнению $x_i = h_i(\hat{x}_i)$, где $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ (совокупность всех переменных, кроме x_i).

Указанный специальный вид позволяет для целей локализации использовать координатные функции. В самом деле, выбрав в качестве локализирующей, например, функцию $\varphi(x) = x_1$, получим

$$\dot{\varphi} = \dot{x}_1 = f_1(x).$$

Следовательно, универсальное сечение описывается уравнением $f_1(x) = 0$, что, согласно предположению эквивалентно уравнению $x_1 = h(\hat{x}_1)$. На универсальном сечении локализирующая функция φ совпадает с функцией $h(\hat{x}_1)$. Значит,

$$\varphi_{\inf} = \inf_{\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}} h_1(\hat{x}_1), \quad \varphi_{\sup} = \sup_{\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}} h_1(\hat{x}_1).$$

Если функция h_1 ограничена, получаем нетривиальное локализирующее множество.

Описанную ситуацию рассмотрим в двумерном случае. Предположим, что функция $h_1(x_2)$ ограничена, так что

$$\underline{h}_1 = \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} h_1(x_2) > -\infty, \quad \overline{h}_1 = \sup_{x_2 \in \mathbb{R}} h_1(x_2) < +\infty.$$

Тогда, согласно сказанному, выбрав в качестве локализирующей функцию $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1$, получим

$$-\infty < \underline{h}_1 = \varphi_{\inf} \leqslant \varphi_{\sup} = \overline{h}_1 < +\infty,$$

и мы приходим к локализирующему множеству, которое определено двойным неравенством

$$\underline{h}_1 \leqslant x_1 \leqslant \overline{h}_1.$$

В свою очередь, с учетом полученного ограничения с помощью локализирующей функции $\varphi_2(x_1, x_2) = x_2$ приходим к локализирующему множеству, определенному неравенством

$$\underline{h}_2 \leqslant x_2 \leqslant \overline{h}_2,$$

где

$$\underline{h}_2 = \inf_{x_1 \in [\underline{h}_1, \overline{h}_1]} h_2(x_1), \quad \overline{h}_2 = \sup_{x_1 \in [\underline{h}_1, \overline{h}_1]} h_2(x_1).$$

В результате получено компактное локализирующее множество $G = [\underline{h}_1, \overline{h}_1] \times [\underline{h}_2, \overline{h}_2]$.

Полученные ограничения позволяют уточнить результаты, полученные с помощью двух локализирующих функций. Вернемся к локализирующей функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1$. Поскольку $x_2 \in [\underline{h}_2, \overline{h}_2]$, находим

$$\underline{h}_1^{(1)} = \inf_{x_2 \in [\underline{h}_2, \overline{h}_2]} h_1(x_2) \geqslant \underline{h}_1, \quad \overline{h}_1^{(1)} = \sup_{x_2 \in [\underline{h}_2, \overline{h}_2]} h_1(x_2) \leqslant \overline{h}_1.$$

Получаем новое ограничение

$$\underline{h}_1^{(1)} \leqslant x_1 \leqslant \overline{h}_1^{(1)}.$$

Далее, для локализирующей функции $\varphi_2(x_1, x_2) = x_2$ находим

$$\underline{h}_2^{(1)} = \inf_{x_1 \in [\underline{h}_1^{(1)}, \overline{h}_1^{(1)}]} h_2(x_1), \quad \overline{h}_2^{(1)} = \sup_{x_1 \in [\underline{h}_1^{(1)}, \overline{h}_1^{(1)}]} h_2(x_1).$$

Это приводит к новому локализирующему множеству

$$G_1 = [\underline{h}_1^{(1)}, \overline{h}_1^{(1)}] \times [\underline{h}_2^{(1)}, \overline{h}_2^{(1)}],$$

которое содержится в G.

Описанную процедуру можно применять для уточнения локализирующего множества неограниченно, получая последовательность вложенных прямоугольников

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$$

При этом возможна ситуация, когда $G_k = G_{k+1}$ для некоторого номера k. Тогда

$$G_k = G_{k+1} = G_{k+2} = \ldots$$

Но такая ситуация возникает не всегда.

Введем обозначения

$$I_1^0 = [\underline{h}_1, \overline{h}_1], \quad I_2^0 = [\underline{h}_2, \overline{h}_2], \quad I_j^k = [\underline{h}_j^{(k)}, \overline{h}_j^{(k)}], \;\; j = 1, 2, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$I_2^k = h_2(I_1^k), \;\; k = 0, 1, 2, \ldots; \qquad I_1^k = h_1(I_2^{k-1}), \;\; k = 1, 2, 3, \ldots,$$

откуда следует, что

$$I_2^k = h_1(h_2(I_1^{k-1})), \quad I_2^k = h_2(h_1(I_2^{k-1})), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, $G_k = F(G_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} h_1(h_2(x_1)) \\ h_2(h_1(x_2)) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим множество

$$G_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k$$

(здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел). Отметим, что множество G_∞ не пусто, поскольку множества G_k компактны и образуют последовательность вложенных множеств.

Теорема 2. Функция F отображает множество G_∞ в себя и является на этом множестве сюръекцией.

Доказательство. Если $x = (x_1,\ x_2) \in G_\infty$, то $x \in G_k$, $k \geqslant 1$, откуда следует, что $F(x) \in G_{k+1}$, $k \geqslant 1$, и $F(x) \in \bigcap\limits_{k\geqslant 1} G_{k+1} = G_\infty$. Тем самым доказано, что $F(G_\infty) \subset G_\infty$.

Если $y \in G_\infty$, то $y \in G_{k+1}$, $k \geqslant 1$. Так как $G_{k+1} = F(G_k)$, то существует $x_k \in G_k$, такой, что $y = F(x_k)$. Возникает последовательность $\{x_k\}$, целиком содержащаяся в компактном множестве G_1. При этом для любого $k \geqslant 1$ все члены последовательности, начиная с k-го, содержатся в G_k. Следовательно, эта последовательность имеет предельную точку x_*, причем эта точка принадлежит каждому множеству G_k. Значит, $x_* \in G_\infty$. В силу непрерывности функции F заключаем, что $y = F(x_*)$, $x_* \in G_\infty$. Таким образом, $G_\infty \subset F(G_\infty)$. Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме 2 указан эффект, по сути известный давно. Этот эффект проявляется в классической теореме Кантора — Бернштейна о равномощности множеств. Идея доказательства теоремы 2 также близка к идее доказательства теоремы Кантора — Бернштейна.

Теорема 2 показывает, что множество G_∞ — это максимум, который можно получить, применяя описанную итерационную процедуру с чередованием координатных функций. При этом множество G_∞ может быть достаточно большим, но может оказаться и одноточечным.

Пример 1. Пусть

$$h_1(x_2) = \frac{2x_2}{x_2^2+1}, \quad h_2(x_1) = x_1^2.$$

Тогда

$$h_2(h_1(x_2)) = \frac{4x_2^2}{(x_2^2+1)^2}, \quad h_1(h_2(x_1)) = \frac{2x_1^2}{x_1^4+1}.$$

Область изменения функции h_1, а также каждой из двух композиций — отрезок $[0,\ 1]$. Поэтому $\underline{h}_1 = 0$, $\overline{h}_1 = 1$, $\underline{h}_2 = 0$, $\overline{h}_2 = 1$, так что после первой итерации получаем $G = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$, а далее оказывается, что $G = G_1 = G_2 = \ldots$

Рассмотренный пример показывает, что итерационная процедура может вообще не привести к уточнению первоначально полученного локализирующего множества.

Множества G_k представляют собой прямоугольники, поэтому динамику горизонтальных сторон и динамику вертикальных сторон последовательности $\{G_k\}$ можно рассмотреть независимо друг от друга. Это позволяет при анализе ограничиться рассмотрением одномерного случая. Обозначим $I_0 = [\underline{h}_1,\ \overline{h}_1]$, $I_k = [\underline{h}_1^{(k)},\ \overline{h}_1^{(k)}]$, $k \geqslant 1$ (т.е. I_k — новое обозначение отрезка I_1^k). Тогда $I_k = h_1(h_2(I_{k-1})) = F_1(I_{k-1})$, $k \geqslant 1$, где $F_1(x) = h_1(h_2(x))$. Следующий пример показывает, насколько сложной может быть динамика последовательности $\{I_k\}$.

Пример 2. Пусть

$$F_1(x) = \alpha x\left(1 - \cos\frac{\pi}{2x}\right).$$

Эта функция нечетна, поэтому область ее изменения симметрична относительно начала координат и при ее анализе можно ограничиться рассмотрением на полуоси $[0, +\infty)$.

Функция $F_1(x)$ на полуинтервале $[0, +\infty)$ имеет локальные максимумы v_m в точках x_m^*, $m = 0, 1, \ldots$, последовательность которых стремится к нулю (рис. 1). Для каждого m точка x_m^* находится правее точки $\hat{x}_m^* = \dfrac{1}{4m+2}$, причем расстояние между двумя точками стремится к нулю при $m \to \infty$. Значение $F_1(x_m^*)$ больше $F_1(\hat{x}_m^*) = 2\alpha x_m^* = \dfrac{2\alpha}{4m+2}$, но меньше $2\alpha x_m^*$.

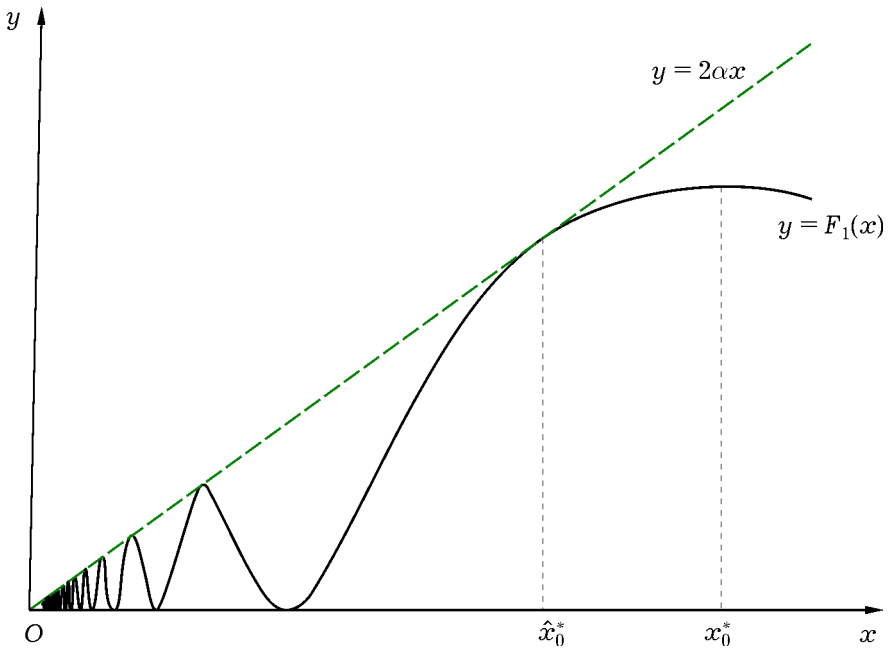

Рис. 1. Экстремумы функции $F_1(x)$

Функция F_1 имеет последовательность локальных минимумов, равных нулю, которая также сходится к нулю. Для этой функции $I_0 = [0, v_0]$. Дальнейшая динамика уменьшения отрезков I_n зависит от параметра α.

Если $\alpha \geqslant 1/2$, то последовательность I_n стягивается к отрезку $I_\infty = [0, v_\infty]$, где v_∞ — некоторое значение между $\hat{x}_0^*$ и x_0^*, которое при уменьшении α сдвигается влево к точке $\hat{x}_0^*$ и совпадает с ней при $\alpha = 1/2$. Отметим, что если параметр α настолько велик, что $x_0^* < v_0$, то процесс заканчивается в точке x_0^* уже на первом шаге.

При $\alpha < 1/2$ точка x_0^* не попадает на отрезок I_0, так как $x_0^* > v_0$, и следующий отрезок определяется максимумом функции F_1 на отрезке $[0, v_0]$, который может достигаться либо в правом конце отрезка (например при $\alpha = 0.4$) либо в одной из точек x_m^* (например при $\alpha = 0.3$ максимум достигается в x_1^*). Далее ситуация повторяется. В результате $I_\infty = \bigcap\limits_{k \geqslant 1} I_k = \{0\}$.

Рассмотренный пример показывает, что динамика последовательности $\{I_m\}$ зависит от взаимосвязей между локальными экстремумами функции. Кроме того, в динамике последовательности $\{I_m\}$ определенную роль играет скорость изменения функции.

Теорема 3. Если отображение F_1 является ограниченным и слабо сжимающим, т.е. для любой пары точек $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|F_1(x_1) - F_1(x_2)| < |x_1 - x_2|$, то I_∞ является одноточечным множеством.

Доказательство. Предположим, что множество I_∞ представляет собой отрезок: $I_\infty = [p,\ q]$, $p < q$. Тогда на отрезке I_∞ отображение F_1 слабо сжимающее. Точки p и q являются образами некоторых точек x_p и x_q на отрезке I_∞ (см. теорему 2). Поэтому

$$|F(x_p) - F(x_q)| = |p - q| \geqslant |x_p - x_q|,$$

но это противоречит условию слабой сжимаемости. Теорема доказана.

Возможна ситуация, когда на каждом шаге итерационной процедуры отрезок I_k (и соответственно множество G_k) уменьшается, но в пределе остается отрезок ненулевой длины.

Пример 3. Пусть $F_1(x) = \operatorname{arctg} \alpha x$. На первом шаге, учитывая нечетность функции и ее ограниченность, получаем $I_0 = [-x_0,\ x_0]$, где $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Далее получаем последовательность отрезков $I_m = [-x_m,\ x_m]$, где $x_m = \operatorname{arctg} \alpha x_{m-1}$, $m \geqslant 1$ (рис. 2). Ясно, что последовательность $\{x_m\}$ неотрицательная и убывает, а поэтому имеет своим пределом некоторое значение x_*. Это значение является решением уравнения

$$x = \operatorname{arctg} \alpha x. \tag{2}$$

При $\alpha \leqslant 1$ это уравнение имеет единственное решение, равное нулю, так что $x_m \to 0$ при $m \to \infty$. Но если $\alpha > 1$, то уравнение (2) имеет три решения, из которых одно решение,

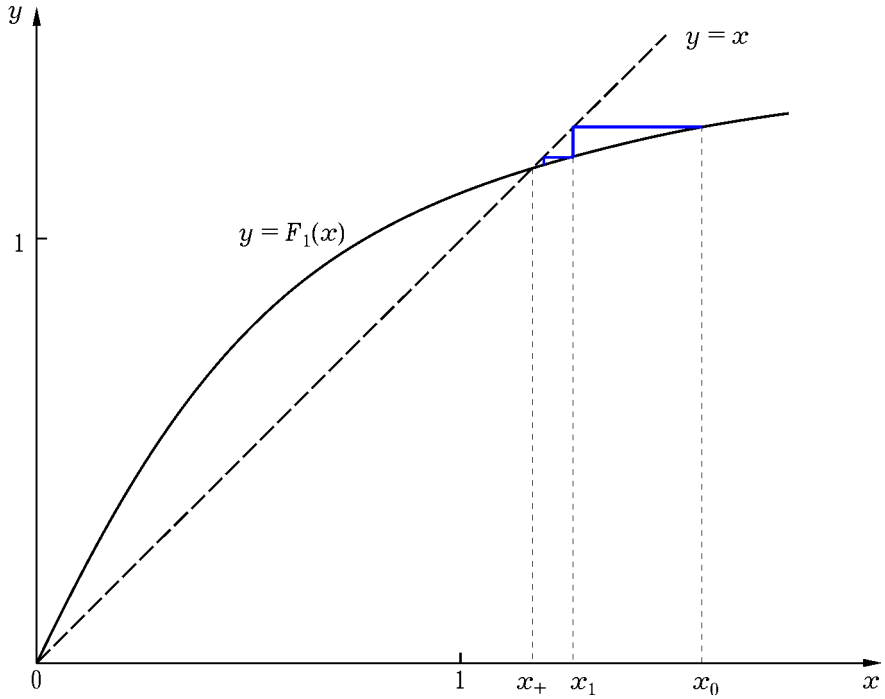

Рис. 2. Последовательность вложенных отрезков в примере 3

обозначим его x_+ является положительным. Из простых геометрических соображений вытекает, что последовательность $\{x_m\}$ при $\alpha > 1$ сходится к точке x_+, поэтому множество I_∞ представляет собой отрезок $[-x_+,\, x_+]$.

В этом примере отрезки I_m строго вложены друг в друга, но их пересечение не сводится к единственной точке.

Заключение

В работе для систем специального вида рассмотрена итерационная процедура, связанная с решением задачи локализации инвариантных компактов. Проанализированы различные сценарии сходимости последовательности вложенных локализирующих множеств. Эти сценарии подтверждены примерами. Установлено достаточное условие сходимости последовательности вложенных множеств к точке.

Все внимание в работе уделено системам второго порядка, однако ясно, что полученные результаты могут быть перенесены с определенными корректировками на системы более высокой размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.644.2014/K) и РФФИ (грант 12-07-00267).

Список литературы

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.
2. Krishchenko A.P. Estimations of domains with cycles // Computers and Mathematics with Applications. 1997. Vol. 34, iss. 2–4. P. 325–332. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00130-2
3. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 47–53.
5. Канатников А.Н., Коровин С.К., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 3. С. 323–325.
6. Канатников А.Н., Коровин С.К., Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов дискретных систем с возмущением // Докл. РАН. 2011. Т. 438, № 6. С. 743–746.
7. Starkov K.E. Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems // Phys. Lett. A. 2011, Vol. 375, iss. 36. P. 3184–3187. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.06.064
8. Starkov K.E. Localizing bounds for compact invariant sets of nonlinear systems possessing first integrals with applications to Hamiltonian systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2010. Т. 20, № 5. С. 1477–1483. DOI: 10.1142/S0218127410026629

9. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 353, iss. 5. P. 383–388. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.12.104
10. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16, no. 11. P. 3249–3256. DOI: 10.1142/S0218127406016768
11. Starkov K.E. Estimation of the domain containing all compact invariant sets of the optically injected laser system // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, iss. 11. P. 4213–4216. DOI: 10.1142/S0218127407019755
12. Zhang F., Mu C., Li X. On the boundness of some solutions of the Lü system // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22, no. 1. Art. no. 1250015. DOI: 10.1142/S0218127412500150
13. Mu C., Zhang F., Shu Y., Zhou S. On the boundedness of solutions to the Lorenz-like family of chaotic systems // Nonlin. Dyn. 2012. Vol. 67, iss. 2. P. 987–996. DOI: 10.1007/s11071-011-0041-3
14. Cai G., Yu H., Li Y. Localization of compact invariant sets of a new nonlinear finance chaotic system // Nonlin. Dyn. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2269–2275. DOI: 10.1007/s11071-012-0425-z
15. Канатников А.Н., Федорова Ю.П. Локализация инвариантных компактов двумерных непрерывных динамических систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7. С. 159–174. DOI: 10.7463/0713.0583104
16. Канатников А.Н., Михайлова О.В. Локализация инвариантных компактов дискретной системы Лози // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 8. С. 121–134. DOI: 10.7463/0813.0609276
17. Yukalov V.I., Yukalova E.P., Sornette D. New Approach to Modeling Symbiosis in Biological and Social Systems // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 9. Art. no. 1450117. DOI: 10.1142/S021812741450117X

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 11, pp. 307–319.
DOI: **10.7463/1114.0734649**
Received: 4.11.2014
© Bauman Moscow State Technical University

Realization of the Iteration Procedure in Localization Problems of Autonomous Systems

Kanatnikov A. N.[1,2,*], **Krishchenko A. P.**[1,2] [*]mathmod@bmstu.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[2]Institute of Systems Analysis RAS, Moscow, Russia

Keywords: dynamical system, localization, localizing set, invariant compact set, iteration procedure

In the last 15 years one way for a qualitative analysis of dynamical systems was formed i.e. the localization of invariant compact sets of a dynamical system. Here the localization means creating a system of such sets, which contain all invariant compact sets of a dynamic system [1], in the phase space.

Invariant compact sets are closely connected with bounded trajectories of the system, the structure of which in the phase space play key role in many applications of dynamical system theory. The problems of invariant compact sets localization abut upon other important problems, for instance, the problems of estimation of attractor basins, control problems, etc.

Back investigations of localization problems was oriented both to development of solving methods [28] and to investigation of particular dynamical systems encountered in applications (see, for example, [9–16]).

One of quite efficient methods of localization problem solving is based on smooth functions defined in the phase space. It is so called functional method [1–3]. Effectiveness of the method is enhanced when we use several functions. Thus, using the next function gives the restriction of the already constructed localizing set. An iteration procedure for sequential narrowing of the localizing set [1–2] arises.

The paper presents analysis of the iteration procedure, which naturally occur in the autonomous systems of special type where the right side of each differential equation is resolvable relative to the corresponding phase variable. Such systems are encountered in applications [17].

References

1. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Invariantnye kompakty dinamicheskih system* [Invariant compact sets of dynamical systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 231 p. (in Russian).

2. Krishchenko A.P. Estimations of domains with cycles. *Computers and Mathematics with Applications*, 1997, vol. 34, iss. 2-4, pp. 325–332. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00130-2

3. Krishchenko A.P. Localization of Invariant Compact Sets of Dynamical Systems. *Differentsial'nye uravnenija*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1597–1604. (English version: *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676. DOI: 10.1007/s10625-006-0003-6).

4. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Localization of invariant compact sets of nonautonomous systems. *Differentsial'nye uravnenija*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 47–53. (English version: *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 46–52. DOI: 10.1134/S0012266109010054).

5. Kanatnikov A.N., Korovin S.K., Krishchenko A.P. Localization of invariant compact sets of discrete systems. *Doklady RAN*, 2010, vol. 431, no. 3, pp. 323–325. (English Translation: *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 326–328. DOI: 10.1134/S1064562410020444).

6. Kanatnikov A.N., Korovin S.K., Krishchenko A.P. Localization of compact invariant sets of discrete-time systems with disturbances. *Doklady RAN*, 2011, vol. 438, no. 6, pp. 743–746. (English Translation: *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 83, no. 3, pp. 433–435. DOI: 10.1134/S1064562411030392).

7. Starkov K.E. Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 36, pp. 3184–3187. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.06.064

8. Starkov K.E. Localizing bounds for compact invariant sets of nonlinear systems possessing first integrals with applications to Hamiltonian systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, no. 5, pp. 1477–1483. DOI: 10.1142/S0218127410026629

9. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system. *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 353, iss. 5, pp. 383–388. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.12.104

10. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2006, vol. 16, no. 11, pp. 3249–3256. DOI: 10.1142/S0218127406016768

11. Starkov K.E. Estimation of the domain containing all compact invariant sets of the optically injected laser system. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2007, vol. 17, iss. 11, pp. 4213–4216. DOI: 10.1142/S0218127407019755

12. Zhang F., Mu C., Li X. On the boundness of some solutions of the Lu system. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, no. 1, art. no. 1250015. DOI: 10.1142/S0218127412500150

13. Mu C., Zhang F., Shu Y., Zhou S. On the boundedness of solutions to the Lorenz-like family of chaotic systems. *Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 67, iss. 2, pp. 987–996. DOI: 10.1007/s11071-011-0041-3

14. Cai G., Yu H., Li Y. Localization of compact invariant sets of a new nonlinear finance chaotic system. *Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 69, no. 4, pp. 2269–2275. DOI: 10.1007/s11071-012-0425-z

15. Kanatnikov A.N., Fedorova Yu.P. Localization of invariant compact sets of two-dimensional continuous dynamical systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 7, pp. 159–174. DOI: 10.7463/0713.0583104 (in Russian).
16. Kanatnikov A.N., Mikhaylova O.V. Localization of invariant compact sets of the discrete-time Lozi system. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 8, pp. 121–134. DOI: 10.7463/0813.0609276 (in Russian).
17. Yukalov V.I., Yukalova E.P., Sornette D. New Approach to Modeling Symbiosis in Biological and Social Systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 9, art. no. 1450117. DOI: 10.1142/S021812741450117X