Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 281–293.

DOI: 10.7463/1114.0737321

Представлена в редакцию: 13.11.2014

УДК 517.977

Достаточное условие управляемости многомерных аффинных систем

Фетисов Д. А.[1,*]

[*]dfetisov@yandex.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассмотрена проблема исследования управляемости многомерных аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью и преобразующихся к регулярному квазиканоническому виду, определенному на всем пространстве состояний. Для регулярных систем квазиканонического вида получено достаточное условие существования решений терминальных задач для любых начального и конечного состояний системы и для любого конечного интервала времени. Тем самым доказано достаточное условие управляемости таких систем на всем пространстве состояний за любой конечный интервал времени. Применение предложенного условия управляемости проиллюстрировано на примере аффинной системы пятого порядка с двумерным управлением. Полученные результаты могут быть использованы для решения различных задач управления техническими системами.

Ключевые слова: управляемость; аффинная система; терминальная задача; квазиканонический вид

Введение

Проблема исследования управляемости нелинейных систем является одной из основных теории управления. Систему $\dot{x} = A(x, u)$ с состоянием x и управлением u называют управляемой за интервал времени $[0,\ t_*]$ на открытом подмножестве O пространства состояний, если для любых двух состояний $x_0 \in O$ и $x_* \in O$ найдется такое допустимое управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_*]$, что соответствующая траектория $x(t)$ замкнутой системы $\dot{x} = A(x, u(t))$ при всех $t \in [0, t_*]$ не выходит из множества O и удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$, $x(t_*) = x_*$.

В монографии [1] доказаны условия управляемости для нелинейных систем треугольного вида. В работах [2, 3, 4] на основе дифференциально-геометрического подхода получены результаты, касающиеся свойств управляемости аффинных систем. В частности, показано, что если аффинная система линеаризуема обратной связью на всем пространстве состояний, то эта система управляема за любой конечный интервал времени. Некоторые результаты в области исследования управляемости нелинейных систем приведены также в работах [5, 6, 7, 8].

В настоящее время основная проблема, с которой сталкиваются исследователи, состоит в получении условий управляемости для аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью. Одно из направлений связано с разработкой условий управляемости для аффинных систем, эквивалентных системам квазиканонического вида [9]. В работах [10, 11] получены условия управляемости для аффинных систем со скалярным управлением, которые преобразуются на всем пространстве состояний к регулярному квазиканоническому виду с одномерной нулевой динамикой. В настоящей работе доказываются условия управляемости для аффинных систем с векторным управлением, которые на всем пространстве состояний эквивалентны регулярным системам квазиканонического вида с одномерной нулевой динамикой.

1. Преобразование многомерных аффинных систем к квазиканоническому виду

Рассмотрим многомерную аффинную систему

$$\dot{x} = F(x) + G_1(x)u_1 + \ldots + G_m(x)u_m, \tag{1}$$

где

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m,$$
$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^{\mathrm{T}}, \quad G_j(x) = (G_{1j}(x), \ldots, G_{nj}(x))^{\mathrm{T}},$$
$$F_i(x), G_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad i = \overline{1,\, n}, \ \ j = \overline{1,\, m}.$$

Системе (1) на пространстве состояний $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{G}_j = \sum_{i=1}^{n} G_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1,\, m}.$$

Следующая теорема [9] устанавливает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система (1) преобразуется к квазиканоническому виду

$$\begin{cases} \dot{z}^i_1 = z^i_2, \quad \ldots, \quad \dot{z}^i_{r_i-1} = z^i_{r_i}, \\ \dot{z}^i_{r_i} = f_i(z,\eta) + g_{i1}(z,\eta)u_1 + \ \ldots + g_{im}(z,\eta)u_m, \quad i = \overline{1,\, m}; \\ \dot{\eta}_1 = q_1(z,\eta), \quad \ldots, \quad \dot{\eta}_\rho = q_\rho(z,\eta), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$r_1 + \ldots + r_m = n - \rho, \quad z = (z^1_1, \ldots, z^1_{r_1}, \ldots, z^m_1, \ldots, z^m_{r_m})^{\mathrm{T}},$$
$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\rho)^{\mathrm{T}}, \quad (z^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \Phi(x).$$

Теорема 1. Для того чтобы аффинная система (1) на множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ приводилась к квазиканоническому виду (2), необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовали функции $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1,\, m}$, удовлетворяющие в Ω системе уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{F}}\, \mathbf{G}_j \varphi_i(x) = 0, \quad k = \overline{0,\, r_i - 2}, \quad i,\, j = \overline{1,\, m}, \quad x \in \Omega;$$

2) существовали такие функции $\varphi_{n-\rho+l}(x) \in C^\infty(\Omega)$, $l = \overline{1,\, \rho}$, что для всех $x \in \Omega$ выполнены равенства

$$\mathbf{G}_j \varphi_{n-\rho+l}(x) = 0, \quad j = \overline{1,\, m}, \quad l = \overline{1,\, \rho},$$

и отображение Φ: $\Omega \to \Phi(\Omega)$, задаваемое системой функций

$$\begin{aligned} z_k^i &= \mathbf{F}^{k-1}\varphi_i(x), \quad k = \overline{1,\, r_i},\ i = \overline{1,\, m}, \\ \eta_l &= \varphi_{n-\rho+l}(x), \quad l = \overline{1,\, \rho}, \end{aligned}$$

является диффеоморфизмом.

В переменных $z_1^1, \ldots, z_{r_1}^1, \ldots, z_1^m, \ldots, z_{r_m}^m, \eta_1, \ldots, \eta_\rho$ система (1) имеет квазиканонический вид (2). Подсистему

$$\dot{\eta}_1 = q_1(z, \eta), \quad \ldots, \quad \dot{\eta}_\rho = q_\rho(z, \eta),$$

системы (2), образованную последними ρ уравнениями, следуя работам [12, 13], будем называть системой нулевой динамики, а число ρ — размерностью нулевой динамики.

Будем говорить, что система квазиканонического вида (2) регулярна на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если матрица

$$g(z, \eta) = \begin{pmatrix} g_{11}(z, \eta) & \ldots & g_{1m}(z, \eta) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{m1}(z, \eta) & \ldots & g_{mm}(z, \eta) \end{pmatrix}$$

невырождена на этом множестве.

Далее будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, причем $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$, система квазиканонического вида (2) регулярна в $\mathbb{R}^n$.

2. Терминальная задача для регулярных систем квазиканонического вида

С проблемой управляемости аффинных систем тесно связана проблема существования решений терминальных задач. Для системы (1) терминальная задача состоит в нахождении таких непрерывных управлений $u_1 = u_1(t), \ldots, u_m = u_m(t)$, $t \in [0,\, t_*]$, которые за время t_* переводят эту систему из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_*) = x_*$.

Если аффинная система (1) эквивалентна в $\mathbb{R}^n$ регулярной системе квазиканонического вида (2), определенной в $\mathbb{R}^n$, то отображение эквивалентности $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ позволяет сформулировать для системы (2) эквивалентную терминальную задачу: найти непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, $\ldots$, $u_m = u_m(t)$, $t \in [0, t_*]$, переводящие систему (2) за тот же интервал времени из начального состояния

$$\Phi(x_0) = \left(z_{10}^1, \ldots, z_{r_1 0}^1, \ldots, z_{10}^m, \ldots, z_{r_m 0}^m, \eta_{10}, \ldots, \eta_{\rho 0}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_*) = \left(z_{1*}^1, \ldots, z_{r_1 *}^1, \ldots, z_{1*}^m, \ldots, z_{r_m *}^m, \eta_{1*}, \ldots, \eta_{\rho *}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Эквивалентность терминальных задач понимается в том смысле, что управления $u_1 = u_1(t), \ldots, u_m = u_m(t)$, $t \in [0, t_*]$, являющиеся решением одной из задач, являются одновременно решением и другой задачи. Следующая теорема [14] устанавливает необходимые и достаточные условия существования решения терминальной задачи (3), (4) для системы (2).

Теорема 2. Для того чтобы существовали непрерывные управления $u_1 = u_1(t), \ldots, u_m = u_m(t)$, $t \in [0, t_*]$, являющиеся решением терминальной задачи (3), (4) для системы (2), необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $B_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$, $i = \overline{1, m}$, удовлетворяющие условиям

$$B_i(0) = z_{10}^i, \ \ldots, \ B_i^{(r_i-1)}(0) = z_{r_i0}^i, \quad B_i(t_*) = z_{1*}^i, \ \ldots, \ B_i^{(r_i-1)}(t_*) = z_{r_i*}^i \tag{5}$$

и такие, что задача Коши

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = q_1(\overline{B}(t), \eta), \ \ldots, \ \dot{\eta}_\rho = q_\rho(\overline{B}(t), \eta), \\ \eta_1(0) = \eta_{10}, \ldots, \eta_\rho(0) = \eta_{\rho 0}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\overline{B}(t) = (B_1(t), \ldots, B_1^{(r_1-1)}(t), \ldots, B_m(t), \ldots, B_m^{(r_m-1)}(t))^{\mathrm{T}},$$

имеет решение $\eta_1(t), \ldots, \eta_\rho(t)$, определенное при $t \in [0, \, t_*]$ и удовлетворяющее условиям

$$\eta_1(t_*) = \eta_{1*}, \ldots, \eta_\rho(t_*) = \eta_{\rho*}. \tag{7}$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что решение терминальной задачи (3), (4) для системы (2) может быть найдено по формуле

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \ldots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = g^{-1}(\overline{B}(t), \eta(t)) \begin{pmatrix} B_1^{(r_1)}(t) - f_1(\overline{B}(t), \eta(t)) \\ \ldots \\ B_m^{(r_m)}(t) - f_m(\overline{B}(t), \eta(t)) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\eta(t) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_\rho(t))^{\mathrm{T}}$, а соотношения

$$z = \overline{B}(t), \quad \eta = \eta(t), \quad t \in [0, t_*],$$

являются t-параметрическими уравнениями траектории, соединяющей состояния (3) и (4) в пространстве состояний системы (2).

3. Поиск функций $B_1(t), \ldots, B_m(t)$ в случае $\rho = 1$

Пусть в системе (2) подсистема нулевой динамики одномерна, т.е. $\rho = 1$. Введем обозначения $z^i = (z_1^i, \ldots, z_{r_i}^i)^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{1, m}$, и запишем систему (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i, \quad \ldots, \quad \dot{z}_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i, \\ \dot{z}_{r_i}^i = f_i(z, \eta) + g_{i1}(z, \eta) u_1 + \ldots + g_{im}(z, \eta) u_m, \\ \dot{\eta} = q(z^1, \ldots, z^m, \eta), \end{cases} \tag{9}$$

где $\eta \in \mathbb{R}$. Будем искать функции $B_1(t), \ldots, B_m(t)$ из теоремы 2 в виде

$$B_i(t) = b_i(t) + c_i\, d_i(t), \quad i = \overline{1,\, m}, \tag{10}$$

где $b_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$ таковы, что для всех $i = \overline{1,\, m}$ выполнены равенства

$$b_i(0) = z^i_{10}, \quad b'_i(0) = z^i_{20}, \quad \ldots, \quad b^{(r_i-1)}(0) = z^i_{r_i 0}, \tag{11}$$

$$b_i(t_*) = z^i_{1*}, \quad b'_i(t_*) = z^i_{2*}, \quad \ldots, \quad b^{(r_i-1)}(t_*) = z^i_{r_i *}, \tag{12}$$

$d_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$ и при всех $i = \overline{1,\, m}$ удовлетворяют условиям

$$d_i(0) = 0, \quad d'_i(0) = 0, \quad \ldots, \quad d_i^{(r_i-1)}(0) = 0, \tag{13}$$

$$d_i(t_*) = 0, \quad d'_i(t_*) = 0, \quad \ldots, \quad d_i^{(r_i-1)}(t_*) = 0. \tag{14}$$

В представлении (10) коэффициенты c_i — пока не известные константы.

В качестве функций $b_i(t)$, $i = \overline{1,\, m}$, можно взять интерполяционные многочлены степеней $2r_i - 1$, удовлетворяющие условиям (11), (12), в качестве функций $d_i(t)$, $i = \overline{1,\, m}$, — любые многочлены, для которых выполняются соотношения (13), (14), например,

$$d_i(t) = t^{r_i}(t_* - t)^{r_i}, \quad i = \overline{1,\, m}. \tag{15}$$

При любых значениях c_i функции $B_i(t)$ удовлетворяют условиям (5). Задача Коши (6) с учетом условия (7) преобразуется к граничной задаче

$$\begin{cases} \dot\eta = q(\overline{b}_1(t) + c_1 \overline{d}_1(t), \ldots, \overline{b}_m(t) + c_m\, \overline{d}_m(t), \eta), \\ \eta(0) = \eta_0, \quad \eta(t_*) = \eta_*, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\overline{b}_i(t) = (b_i(t), b'_i(t), \ldots, b_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{T}}, \quad \overline{d}_i(t) = (d_i(t), d'_i(t), \ldots, d_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{T}}, \quad i = \overline{1,\, m},$$

так что $\overline{B}_i(t) = \overline{b}_i(t) + c_i \overline{d}_i(t)$. Если удастся найти значения $c_1 = c_{1*}$, …, $c_m = c_{m*}$, для которых существует решение $\eta(t)$ граничной задачи (16), то функции $B_i(t) = b_i(t) + c_{i*}\, d_i(t)$, $i = \overline{1,\, m}$, будут удовлетворять всем условиям теоремы 2 и, следовательно, терминальная задача (3), (4) для системы (9) будет иметь решение.

4. Достаточное условие управляемости

Рассмотрим случай, когда функция $q(z^1, \ldots, z^m, \eta)$ имеет вид

$$q(z^1, \ldots, z^m, \eta) = Q(z^1, \ldots, z^m) R(\eta), \tag{17}$$

где функция $Q(z^1, \ldots, z^m)$ является многочленом нечетной степени $2l + 1$:

$$Q(z^1, \ldots, z^m) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{r_1+\ldots+r_m}: \\ i_1+\ldots+i_{r_1+\ldots+r_m} \leqslant 2l+1}} a_{i_1, \ldots, i_{r_1+\ldots+r_m}} \times$$

$$\times\, (z^1_1)^{i_1} \ldots (z^1_{r_1})^{i_{r_1}} \ldots (z^m_1)^{i_{r_1+\ldots+r_{m-1}+1}} \ldots (z^m_{r_m})^{i_{r_1+\ldots+r_m}}. \tag{18}$$

Предположим, что для некоторого $\alpha \in \{1, \ \ldots, \ m\}$ в слагаемых старшей степени все члены, содержащие только переменные с верхним индексом α, образуют выражение вида

$$(z_1^\alpha)^{2l+1} + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{r_\alpha}:\\ i_1+\ldots+i_{r_\alpha}=2l+1}} \tilde{a}_{i_1,\ldots,i_{r_\alpha}} (z_1^\alpha)^{i_1} \ldots (z_{r_\alpha}^\alpha)^{i_{r_\alpha}}, \tag{19}$$

причем в этой сумме, за исключением $(z_1^\alpha)^{2l+1}$, присутствуют лишь слагаемые, в которых сумма показателей степеней переменных с четными нижними индексами нечетна:

$$\tilde{a}_{i_1,\ldots,i_{r_\alpha}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 + i_4 + i_6 + \ldots = 2k+1. \tag{20}$$

Теорема 3. Пусть в системе (9) функция $q(z^1, \ldots, z^m, \eta)$ имеет вид (17), при всех $\eta \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $0 < R(\eta) \leqslant M$, функция $Q(z^1, \ldots, z^m)$ является многочленом (18) нечетной степени, причем существует такое число $\alpha \in \{1, \ \ldots, \ m\}$, что в слагаемых старшей степени все члены, содержащие только переменные с верхним индексом α, образуют выражение вида (19) и удовлетворяют условию (20). Тогда система (9) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0, \ t_*]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любых начального (3) и конечного (4) состояний системы (9), а также для любого интервала $[0, \ t_*]$ соответствующая терминальная задача имеет решение. Будем искать функции $B_1(t), \ldots, B_m(t)$ из теоремы 2 в виде (10).

Чтобы доказать существование решения терминальной задачи (3), (4) для системы (9) с функцией $q(z^1, \ldots, z^m, \eta)$ указанного вида, достаточно показать, что:

1) существует решение $c_1 = c_{1*}, \ldots, c_m = c_{m*}$ уравнения

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_*} \frac{d\eta}{R(\eta)} = \int\limits_0^{t_*} Q(\bar{b}_1(t) + c_1\bar{d}_1(t), \ldots, \bar{b}_m(t) + c_m\bar{d}_m(t))\, dt; \tag{21}$$

2) для любого $t \in [0, t_*]$ уравнение

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} = \int\limits_0^{t} Q(\bar{b}_1(t) + c_{1*}\bar{d}_1(t), \ldots, \bar{b}_m(t) + c_{m*}, \bar{d}_m(t))\, dt, \tag{22}$$

относительно η имеет единственное решение $\eta = \eta(t)$, причем функция $\eta(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, \ t_*]$.

Покажем сначала, что уравнение (21) при выполнении условий теоремы имеет решение. Положим $c_i = 0$ при $i \neq \alpha$. Тогда правая часть уравнения запишется в виде

$$\int\limits_0^{t_*} Q(\bar{b}_1(t), \ldots, \bar{b}_\alpha + c_\alpha\bar{d}_\alpha(t), \ldots, \bar{b}_m(t))dt = c_\alpha^{2l+1} \int\limits_0^{t_*} d_\alpha(t)^{2l+1} dt +$$
$$+ c_\alpha^{2l+1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{r_\alpha}:\\ i_1+\ldots+i_{r_\alpha}=2l+1}} \tilde{a}_{i_1,\ldots,i_{r_\alpha}} \int\limits_0^{t_*} (d_\alpha(t))^{i_1} \ldots (d_\alpha^{(r_\alpha-1)}(t))^{i_{r_\alpha}}\, dt + \tilde{\gamma}(c_\alpha),$$

где $\tilde{\gamma}(c_\alpha)$ содержит слагаемые младших степеней по c_α.

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{t_*} (d_\alpha(t))^{i_1}(d'_\alpha(t))^{i_2}\dots(d_\alpha^{(r_\alpha-1)}(t))^{i_{r_\alpha}}\,dt. \tag{23}$$

Заменой переменной $\tau = t - t_*/2$ этот интеграл преобразуется к виду

$$\int\limits_{-t_*/2}^{t_*/2} \tilde{d}_\alpha^{i_1}(\tau)[\tilde{d}'_\alpha(\tau)]^{i_2}\dots[\tilde{d}_\alpha^{(r_\alpha-1)}(\tau)]^{i_{r_\alpha}}\,d\tau, \tag{24}$$

где

$$\tilde{d}_\alpha(\tau) = \left(\frac{t_*^2}{4} - \tau^2\right)^{r_\alpha}.$$

Поскольку функция $\tilde{d}_\alpha(\tau)$ четная, то ее производные нечетных порядков нечетны, производные четных порядков четны. Следовательно, подынтегральная функция в интеграле (24) представляет собой произведение $i_1+i_3+i_5+\dots$ четных функций и $i_2+i_4+i_6+\dots$ нечетных. По условию $i_2+i_4+i_6+\dots = 2k+1$, поэтому в этом произведении нечетных функций нечетное число, подынтегральная функция нечетна и интеграл от нее в симметричных пределах от $-t_*/2$ до $t_*/2$ равен нулю.

Из равенства нулю интеграла (23) следует, что коэффициент при c_α^{2l+1} в многочлене в правой части уравнения (21) равен

$$\int\limits_0^{t_*} d_\alpha(t)^{2l+1}dt.$$

Этот интеграл положителен, поэтому рассматриваемое уравнение является алгебраическим уравнением нечетной степени, и, следовательно, имеет действительное решение $c_\alpha = c_{\alpha*}$. Таким образом, набор чисел $c_1 = 0,\ \dots,\ c_\alpha = c_{\alpha*},\ \dots,\ c_m = 0$ является решением уравнения (21).

Покажем теперь, что при выполнении условий теоремы для любого $t \in [0,\ t_*]$ уравнение (22) относительно η имеет единственное решение $\eta = \eta(t)$, причем функция $\eta(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ t_*]$. Рассмотрим левую часть этого уравнения. Для всех $\eta \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{R(\eta)} \geqslant \frac{1}{M},$$

но тогда если $\eta \geqslant \eta_0$, то

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} \geqslant \frac{\eta-\eta_0}{M}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} = +\infty,$$

а если $\eta < \eta_0$, то

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} \leqslant \frac{\eta - \eta_0}{M},$$

поэтому

$$\lim_{\eta \to -\infty} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} = -\infty.$$

Таким образом, интеграл с переменным верхним пределом в левой части уравнения (22), являясь непрерывной функцией η, имеет при $\eta \to \pm\infty$ бесконечные пределы разных знаков. Следовательно, область значений этого интеграла – все множество действительных чисел. Это означает, что, каким бы ни было c_*, уравнение (22) имеет решение при всех $t \in [0,\, t_*]$. Поскольку

$$\frac{d}{d\eta} \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} = \frac{1}{R(\eta)} > 0$$

при всех $\eta \in \mathbb{R}$, то интеграл

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)}$$

является возрастающей функцией η. Это означает, что для любого $t \in [0,\, t_*]$ решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (22) единственно. Чтобы доказать непрерывную дифференцируемость функции $\eta(t)$ на отрезке $[0,\, t_*]$, запишем уравнение (22) в виде

$$\Psi(\eta, t) = 0,$$

где

$$\Psi(\eta, t) = \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta}{R(\beta)} - \int\limits_{0}^{t} Q(\bar{b}_1(t) + c_{1*}\bar{d}_1(t), \ldots, \bar{b}_m(t) + c_{m*}\bar{d}_m(t))dt.$$

Так как

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{1}{R(\eta)} > 0$$

при всех $\eta \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\, t_*]$, то по теореме о неявной функции $\eta(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\, t_*]$.

Таким образом, для любых начального (3) и конечного (4) состояний, для любого интервал времени $[0,\, t_*]$ терминальная задача для системы (9) с функцией $q(z^1, \ldots, z^m, \eta)$ указанного вида имеет решение. Это означает, что система (9) управляема в $\mathbb{R}^n$ за любой интервал времени $[0,\, t_*]$. Теорема доказана.

Пример. Покажем, что система

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1^i = z_2^i, \quad \dot{z}_2^i = f_i(z, \eta) + g_{i1}(z, \eta)u_1 + g_{i2}(z, \eta)u_2, \quad i = 1, 2,\\
&\dot{\eta} = ((z_1^1)^3 + (z_2^2)^2 z_2^1 - (z_2^1)^2)(2 + \sin\eta),
\end{aligned}$$

где матрица $g(z, \eta)$ невырождена в $\mathbb{R}^5$, управляема в $\mathbb{R}^5$ за любой интервал $[0,\, t_*]$.

Функция $Q(z) = (z_1^1)^3 + (z_2^2)^2 z_2^1 - (z_2^1)^2$ является многочленом третьей степени. В слагаемых старшей степени $(z_1^1)^3 + (z_2^2)^2 z_2^1$ все члены, содержащие лишь переменные с верхним индексом $\alpha = 1$, имеют вид $(z_1^1)^3$. Они образуют выражение (19), в котором все коэффициенты $\tilde{a}_{i_1 i_2}$ равны нулю, поэтому условие (20) заведомо выполнено. Функция $R(\eta) = 2 + \sin\eta$ положительна и ограничена в $\mathbb{R}$: при всех $\eta \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $0 < R(\eta) \leqslant 3$. Согласно теореме 3, эта система управляема в $\mathbb{R}^5$ за любой интервал времени $[0,\, t_*]$.

Заключение

Рассмотрена проблема управляемости многомерных аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью и преобразующихся к регулярному квазиканоническому виду, определенному на всем пространстве состояний. Для систем регулярного квазиканонического вида получено достаточное условие существования решений терминальных задач для любых начального и конечного состояний системы на любом конечном интервале времени. Тем самым доказано достаточное условие управляемости таких систем за любой конечный интервал времени. Применение полученного условия управляемости проиллюстрировано на примере аффинной системы пятого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-07-00813).

Список литературы

1. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наукова думка, 1980. 174 с.
2. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
3. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. 320 с.
4. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 805–809.
5. Sun Y. Necessary and sufficient condition for global controllability of planar affine nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. Vol. 52, no. 8. P. 1454–1460. DOI: 10.1109/TAC.2007.902750
6. Caines P.E., Lemch E.S. On the global controllability of nonlinear systems: fountains, recurrence, and applications to hamiltonian systems // SIAM J. Contr. Optim. 2003. Vol. 41, no. 5. P. 1532–1553.
7. Sun Y. Further results on global controllability of planar nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, no. 8. P. 1872–1875. DOI: 10.1109/TAC.2010.2048054

8. Sun Y., Mei S., Lu Q. On global controllability of planar affine nonlinear systems with a singularity // Systems & Control Letters. 2009. Vol. 58, no. 2. P. 124–127. DOI: 10.1016/j.sysconle.2008.09.007
9. Крищенко А.П., Клинковский М.Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 11. С. 1945–1952.
10. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.
11. Емельянов С.В., Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Исследование управляемости аффинных систем // Доклады АН. 2013. Т. 449, № 1. С. 15–18.
12. Isidori A. Nonlinear control systems. 3rd ed. London: Springer, 1995. 549 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5
13. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
14. Фетисов Д.А. Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 383–400. DOI: 10.7463/1113.0622543

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 11, pp. 281–293.
DOI: **10.7463/1114.0737321**
Received: 13.11.2014

Sufficient Controllability Condition for Multidimensional Affine Systems

Fetisov D. A.[1,*]

[*]dfetisov@yandex.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: controllability, affine system, terminal problem, quasicanonical form

The controllability problem is one of the most important problems of the control theory. This problem is well studied for linear stationary systems. A linear stationary system is known to be controllable if and only if the system is feedback linearizable. For affine systems, relations between controllability and feedback linearizability are more difficult: if a system is feedback linearizable, then it is controllable; the inverse statement is wrong.

In the present paper, multidimensional affine systems which cannot be feedback linearized are considered. In order to prove controllability of such system we use a special approach based on checking an existence of a terminal problem solution. If a terminal problem for the system in question has a solution for all boundary conditions and for arbitrary finite time of control, then the system is controllable. In the present paper it is supposed that the system in question by a smooth nonsingular change of variables can be transformed into a special canonical form — a regular quasicanonical form defined in the whole state space. It is also supposed that a zero dynamics subsystem of the system of a quasicanonical form is one-dimensional. As a result, the terminal problem for the original system is transformed into the equivalent terminal problem for the system of a regular quasicanonical form. The necessary and sufficient condition of an existence of a terminal problem solution is well-known for such systems. In the present paper, this condition is used to prove an existence of a terminal problem solution for the system of a regular quasicanonical form with one-dimensional zero dynamics subsystem for all boundary conditions and for arbitrary finite time of control. Thereby, the sufficient condition of controllability is proven for such systems. An example of the five-dimensional affine system with two-dimensional control is given to illustrate the proposed condition.

Obtained results may be used to solve control problems for various technical systems.

References

1. Kovalev A.M. *Nelineynye zadachi upravleniya i nablyudeniya v teorii dinamicheskikh system* [Nonlinear problems of control and observation in dynamical systems theory]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1980. 174 p. (in Russian).
2. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometric methods for analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p. (in Russian).
3. Elkin V.I. *Reduktsiya nelineynykh upravlyaemykh sistem: differentsial'no-geometricheskiy podkhod* [Reduction of nonlinear control systems: differential-geometric approach]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 320 p. (in Russian).
4. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms. *DAN SSSR = Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1981, vol. 258, no. 4, pp. 805–809. (in Russian).
5. Sun Y. Necessary and sufficient condition for global controllability of planar affine nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, vol. 52, no. 8, pp. 1454–1460. DOI: 10.1109/TAC.2007.902750
6. Caines P.E., Lemch E.S. On the global controllability of nonlinear systems: fountains, recurrence, and applications to hamiltonian systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 1532–1553.
7. Sun Y. Further results on global controllability of planar nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, vol. 55, no. 8, pp. 1872–1875. DOI: 10.1109/TAC.2010.2048054
8. Sun Y., Mei S., Lu Q. On global controllability of planar affine nonlinear systems with a singularity. *Systems and Control Letters*, 2009, vol. 58, no. 2, pp. 124–127. DOI: 10.1016/j.sysconle.2008.09.007
9. Krishchenko A.P., Klinkovskii M.G. Transformation of affine systems with control and stabilization problem. *Differentsial'nye uravneniia = Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 1, pp. 1945–1952. (in Russian).
10. Fetisov D.A. Study of Controllability of Regular Systems of Quasi-canonical Type. *Vestnik MGTU im.N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2006, no. 3, pp. 12–30. (in Russian).
11. Emel'yanov S.V., Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Controllability research on affine systems. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 449, no. 1, pp. 15–18. (English translation: *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, iss. 2, pp. 245–248. DOI: 10.1134/S1064562413020026).
12. Isidori A. *Nonlinear control systems. 3rd ed*. London, Springer, 1995. 549 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5

13. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. *Nonlinear and adaptive control design*. New York, John Wiley and Sons, 1995. 563 p.

14. Fetisov D.A. A method for solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 11, pp. 383–400. DOI: 10.7463/1113.0622543 (in Russian).