Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. С. 257–266.

DOI: 10.7463/1114.0738693

Представлена в редакцию: 02.10.2014
Исправлена: 06.11.2014

УДК 536.2

Температурное поле полупространства, подвижная граница которого с термически тонким покрытием находится под воздействием внешнего теплового потока

Власов П. А.[1,*], **Волков И. К.**[1]

[*]pvlx@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аналитические методы математической теории теплопроводности занимают особое место в инженерной практике. Это объясняется тем, что решения соответствующих задач, полученные в аналитически замкнутом виде, могут быть использованы как для проведения параметрического анализа с целью оптимизации тепловой защиты конструкций, так и для тестирования вычислительных комплексов, ориентированных на решение прикладных задач. Основная цель проведенных исследований — получение в аналитически замкнутом виде решения задачи нахождения температурного поля ортотропного полупространства, граница которого с термически тонким покрытием пленочного типа находится под воздействием предельно концентрированного стационарного внешнего теплового потока и перемещается параллельно самой себе по линейному закону.

Ключевые слова: температурное поле; полупространство; подвижная граница

Введение

В инженерной практике аналитические методы математической теории теплопроводности [1, 2, 3] занимают особое место. Это обусловлено многими причинами и, в частности, тем, что решения соответствующих задач, полученные в аналитически замкнутом виде, позволяют не только проводить параметрический анализ изучаемого температурного поля и исследовать специфические особенности его формирования, но и тестировать разрабатываемые вычислительные алгоритмы, ориентированные на решение реальных прикладных задач тепломассопереноса. Трудности, возникающие при практическом использовании аналитических методов математической теории теплопроводности, хорошо известны [1, 2, 3, 4, 5, 6]. При этом они существенно усугубляются при наличии подвижных границ у изучаемой системы даже в простейшем случае, когда закон движения известен [7, 8].

Основная цель проведенных исследований — получение в аналитически замкнутом виде решения задачи нахождения температурного поля ортотропного полупространства, граница которого с термически тонким покрытием пленочного типа находится под воздействием внешнего теплового потока и перемещается параллельно самой себе по линейному закону.

1. Математическая модель

Объектом настоящих исследований является температурное поле обладающего осевой симметрией ортотропного полупространства

$$G = \Big\{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (r \geqslant 0) \wedge (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \wedge (z > vt)\Big\}$$

с подвижной границей

$$\Gamma_G = \Big\{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (r \geqslant 0) \wedge (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \wedge (z = vt)\Big\},$$

имеющей термически тонкое покрытие малой толщины ε_*, внешняя граница которого находится под воздействием предельно концентрированного теплового потока

$$q(r, t, \varphi) \equiv 2\pi q_0 \delta(r),$$

где $t \geqslant 0$ — текущее время; v — скорость движения границы; $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. Очевидно, что в рассматриваемом случае температурное поле $T(r, z, t)$ будет обладать осевой симметрией. Это соображение вместе с предположением о том, что контакт в системе «полупространство — покрытие границы» является идеальным [2], приводит к следующей математической модели процесса формирования изучаемого температурного поля:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \Lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad Z > V\mathrm{Fo}, \quad \mathrm{Fo} > 0; \tag{1}$$

$$a^2 \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \Lambda_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \Lambda_* \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}, \quad \rho \geqslant 0, \quad V\mathrm{Fo} - \varepsilon < Z < V\mathrm{Fo}, \quad \mathrm{Fo} > 0; \tag{2}$$

$$\theta(\rho, Z, \mathrm{Fo})\Big|_{\mathrm{Fo}=0} \equiv 0; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial Z}\right|_{Z = V\mathrm{Fo} - \varepsilon} = -2\pi Q_0 \delta(r); \tag{4}$$

$$\theta(\rho, V\mathrm{Fo} - 0, \mathrm{Fo}) = \theta(\rho, V\mathrm{Fo} + 0, \mathrm{Fo}); \tag{5}$$

$$\Lambda_* \left.\frac{\partial \theta}{\partial Z}\right|_{Z = V\mathrm{Fo} - 0} = \left.\frac{\partial \theta}{\partial Z}\right|_{Z = V\mathrm{Fo} + 0}, \tag{6}$$

при записи которой использованы единица масштаба l пространственных переменных и обозначения

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \qquad \mathrm{Fo} = \frac{\lambda_z t}{c\gamma l^2}, \qquad \rho = \frac{r}{l}, \qquad Z = \frac{z}{l}, \qquad V = \frac{c\gamma l v}{\lambda_z},$$

$$Q_0 = \frac{q_0 l}{T_0 \lambda_z}, \qquad a^2 = \frac{c^{\text{п}} \gamma^{\text{п}}}{c\gamma}, \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_*}{l}, \qquad \Lambda = \frac{\lambda_r}{\lambda_z}, \qquad \Lambda_0 = \frac{\lambda_r^{\text{п}}}{\lambda_z},$$

$$\Lambda_* = \frac{\lambda_z^{\text{п}}}{\lambda_z},$$

где T_0 — начальная температура полупространства; λ_z, λ_r — значения коэффициентов теплопроводности Фурье в направлении оси z и радиальном направлении соответственно; c — удельная теплоемкость; γ — плотность материала (правый верхний индекс «п» относится к теплофизическим характеристикам покрытия).

При решении задачи (1)–(6) будем предполагать, что по каждому из пространственных переменных ρ, Z функционал $\theta(\rho, Z, \mathrm{Fo})$ интегрируем с квадратом:

$$\theta(\cdot, Z, \mathrm{Fo}) \in L^2[0, +\infty), \quad Z \geqslant V\mathrm{Fo} - \varepsilon, \quad \mathrm{Fo} \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\theta(\rho, \cdot, \mathrm{Fo}) \in L^2[V\mathrm{Fo} - \varepsilon, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad \mathrm{Fo} \geqslant 0, \tag{8}$$

а, как функция аргумента Fo, он принадлежит классу $\mathcal{L}[0, +\infty)$ функций-оригиналов преобразования Лапласа [2], т.е.

$$\theta(\rho, Z, \cdot) \in \mathcal{L}[0, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad Z \geqslant V\mathrm{Fo} - \varepsilon. \tag{9}$$

Согласно исходным допущениям, покрытие подвижной границы является термически тонким покрытием пленочого типа, поэтому допустима реализация идеи «сосредоточенная емкость» [9]:

$$\langle \theta(\rho, \mathrm{Fo}) \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{V\mathrm{Fo}-\varepsilon+0}^{V\mathrm{Fo}-0} \theta(\rho, Z, \mathrm{Fo})\, dZ; \tag{10}$$

$$\theta(\rho, V\mathrm{Fo} - \varepsilon + 0, \mathrm{Fo}) = \langle \theta(\rho, \mathrm{Fo}) \rangle = \theta(\rho, V\mathrm{Fo} - 0, \mathrm{Fo}), \tag{11}$$

т.е. допустимо принятие гипотезы о том, что среднеинтегральная по толщине покрытия температура равна температуре его границ. Проинтегрировав уравнение (2) по переменному Z в пределах от $V\mathrm{Fo} - \varepsilon$ до $V\mathrm{Fo}$ с учетом краевого условия (4), условий сопряжения (5) и (6), равенств (10), (11) и правила Лейбница дифференцирования зависящего от параметра интеграла [10], приходим к уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -2\pi q_0 \delta(\rho) + \varepsilon \Big\{ a^2 \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}} - \Lambda_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big\}, \quad \rho \geqslant 0, \quad Z = V\mathrm{Fo}, \quad \mathrm{Fo} > 0, \tag{12}$$

которое можно интерпретировать как нестационарное обобщение краевого условия второго рода на подвижной границе ортотропного полупространства в плоскости которой реализуется кондуктивный теплоперенос.

Таким образом, учет наличия термически тонкого покрытия подвижной границы рассматриваемого полупространства приводит к математической модели (1), (3), (7)–(9), (12) процесса формирования искомого температурного поля, которая после стандартной замены переменных

$$X = Z - V\mathrm{Fo}, \quad \tau = \mathrm{Fo}, \tag{13}$$

означающей переход в подвижную систему координат, примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau} = \Lambda\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + V\dfrac{\partial\theta}{\partial X}, \quad \rho \geqslant 0, \quad X > 0, \quad \tau > 0; \\ \theta(\rho, X, \tau)\Big|_{\tau=0} \equiv 0; \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial X}\Big|_{X=0} = -2\pi Q_0\delta(\rho) + \varepsilon\Big\{a^2\dfrac{\partial\theta}{\partial\tau} - \Lambda_0\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\rho\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} - a^2V\dfrac{\partial\theta}{\partial X}\Big\}\Big|_{X=0}, \end{cases} \tag{14}$$

где предполагаются выполненными условия

$$\theta(\cdot, X, \tau) \in L^2[0, +\infty), \quad X \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0; \tag{15}$$

$$\theta(\rho, \cdot, \tau) \in L^2[0, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0; \tag{16}$$

$$\theta(\rho, X, \cdot) \in \mathcal{L}[0, +\infty), \quad \rho \geqslant 0, \quad X \geqslant 0. \tag{17}$$

2. Температурное поле

Математическая модель (14) представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных параболического типа со специальным краевым условием при $X = 0$. Ее решение может быть получено путем последовательного применения сначала интегрального преобразования Ганкеля нулевого порядка [1, 2]:

$$H_0[\theta] \equiv \int\limits_0^{+\infty} \theta(\rho)\rho J_0(p\rho)\,d\rho, \quad H_0^{-1}[\varkappa] \equiv \int\limits_0^{+\infty} \varkappa(p)pJ_0(p\rho)\,dp, \tag{18}$$

а затем — интегрального преобразования Лапласа [1, 2]. Полагая

$$A(p, X, \tau) = H_0[\theta(\rho, X, \tau)], \quad B(p, X, s) = L[A(p, X, \tau)], \tag{19}$$

где L — оператор прямого преобразования Лапласа, приходим к задаче для определения изображения $B(p, X, s)$:

$$\frac{d^2B}{dX^2} + V\frac{dB}{dX} - (s + \Lambda p^2)B = 0, \quad X > 0;$$
$$\frac{dB}{dX}\Big|_{X=0} = -\frac{Q_0}{s} + \varepsilon\Big\{(a^2s + \Lambda_0p^2)B - a^2V\frac{dB}{dX}\Big\}\Big|_{X=0},$$

где в соответствии с предположениями (15)–(17) должно выполняться условие

$$B(p, \cdot, s) \in L^2[0, +\infty), \quad p \in \mathbb{R}^+, \quad s \in \mathbb{C},$$

которое также играет роль граничного условия в бесконечности. Решение этой задачи может быть найдено стандартными методами и представлено в следующем виде:

$$B(p, X, s) = \frac{Q_0}{s}\Big\{\varepsilon a^2\Big(s + \Lambda p^2 + \frac{V^2}{4}\Big) + (1 + \varepsilon a^2V)\sqrt{s + \Lambda p^2 + \frac{V^2}{4}} +$$
$$+ \varepsilon(\Lambda_0 - a^2\Lambda)p^2 + \frac{V}{2}\Big(1 + \varepsilon a^2\frac{V}{2}\Big)\Big\}^{-1}\exp\Big\{-X\Big(\frac{V}{2} + \sqrt{s + \Lambda p^2 + \frac{V^2}{4}}\Big)\Big\}. \tag{20}$$

Для перехода в пространство изображений интегрального преобразования Ганкеля (18) в соответствии с (19) к равенству (20) применяем оператор L^{-1} обращения интегрального преобразования Лапласа и с использованием теорем об интегрировании оригинала и смещении получаем

$$A(p,X,\tau) = Q_0 \exp\Big(-\frac{V}{2}X\Big) \int\limits_0^\tau \exp\Big[-\Big(\Lambda p^2 + \frac{V^2}{4}\Big)t\Big] \Psi(p,X,t)\,dt, \tag{21}$$

где изображение интегрального преобразования Ганкеля нулевого порядка

$$\Psi(p,X,\tau) = L^{-1}\Bigg[\Big\{\varepsilon a^2 s + (1+\varepsilon a^2 V)\sqrt{s} + \varepsilon(\Lambda_0 - a^2\Lambda)p^2 + \\ + 0{,}5V\Big(1+\varepsilon a^2\frac{V}{2}\Big)\Big\}^{-1} \exp\big(-X\sqrt{s}\big)\Bigg]. \tag{22}$$

Структура изображения $\Psi(p,X,\tau)$ определяется знаком коэффициента при p^2 в правой части последнего выражения. Так как по смыслу решаемой задачи параметр ε имеет положительное значение, то знак этого коэффициента противоположен знаку безразмерного комплекса

$$\Delta = \Lambda - \frac{\Lambda_0}{a^2} = \frac{\lambda_r}{\lambda_z} - \frac{\dfrac{\lambda_r^{п}}{c^{п}\gamma^{п}}}{\dfrac{\lambda_r}{c\gamma}}. \tag{23}$$

Заметим, что последняя дробь в правой части (23) представляет собой отношение коэффициентов температуропроводности материалов покрытия и полупространства. Ограничиваясь наиболее реальной с практической точки зрения ситуацией, когда $\Delta > 0$, и полагая

$$\alpha_k(p) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\varepsilon a^2} + V\Big) + (-1)^k\sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2 a^4} + p^2\Delta}, \quad k = 1,\ 2, \tag{24}$$

с учетом равенства (22) и таблицы «изображение — оригинал» [2] приходим к следующему результату:

$$\Psi(p,X,\tau)\Big|_{\Delta>0} \equiv \frac{1}{\varepsilon a^2[\alpha_1(p)-\alpha_2(p)]} L^{-1}\left[\frac{\exp(-X\sqrt{s}\,)}{\sqrt{s}+\alpha_2(p)} - \frac{\exp(-X\sqrt{s}\,)}{\sqrt{s}+\alpha_1(p)}\right] = \\ = \frac{1}{\varepsilon a^2[\alpha_1(p)-\alpha_2(p)]}\Big\{\alpha_1(p)\exp[X\alpha_1(p)+\tau\alpha_1^2(p)]\,\mathrm{erfc}\Big(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}+\alpha_1(p)\sqrt{\tau}\Big) - \\ - \alpha_2(p)\exp[X\alpha_2(p)+\tau\alpha_2^2(p)]\,\mathrm{erfc}\Big(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}+\alpha_2(p)\sqrt{\tau}\Big)\Big\}, \tag{25}$$

где

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \quad —$$

дополнительная функция ошибок Гаусса [11].

3. Результаты и их обсуждение

1. Искомое температурное поле в подвижной системе координат (13) в рассматриваемой ситуации, когда $\Delta > 0$, полностью определено равенствами (19), (21), (23), (24), (25) и формулой обращения (18) интегрального преобразования Ганкеля нулевого порядка.

2. Отсутствие термически тонкого покрытия пленочного типа на границе рассматриваемого полупространства ассоциируется с равенством $\varepsilon = 0$. В этом случае равенство (22) значительно упрощается и для определения функционала $\Psi(p, X, \tau)$ достаточно воспользоваться таблицей «изображение — оригинал» [2]. В этом случае

$$\Psi(p,X,\tau)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{2}{V}\left\{\sqrt{\frac{V^2}{4\pi\tau}}\exp\left(-\frac{X^2}{4\tau}\right) - \left(\frac{V}{2}\right)^2\exp\left[X\left(\frac{V}{2}\right)+\left(\frac{V}{2}\right)^2\tau\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}+\frac{V}{2}\sqrt{\tau}\right)\right\}$$

и согласно (21)

$$A(p,X,\tau)\Big|_{\varepsilon=0} = Q_0\int\limits_0^\tau \exp(-\Lambda p^2 t)\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+\frac{V}{2}\sqrt{t}\right)^2\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{V}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+\frac{V}{2}\sqrt{t}\right)\right\}dt. \quad (26)$$

Таким образом, для нахождения искомого температурного поля в подвижной системе координат (13) при $\varepsilon = 0$ достаточно воспользоваться равенствами (19), (26), формулой (18) обращения интегрального преобразования Ганкеля нулевого порядка и таблицами интегралов специальных функций [11]:

$$\theta(\rho,X,\tau)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{Q_0}{2\Lambda}\int\limits_0^\tau \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\Lambda t}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+\frac{V}{2}\sqrt{t}\right)^2\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{V}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{X}{2\sqrt{t}}+\frac{V}{2}\sqrt{t}\right)\right\}dt, \quad \rho \geqslant 0, \quad X \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0. \quad (27)$$

3. Решение смешанной задачи (14) может быть найдено методом малого параметра [12]. В этом случае

$$\theta(\rho,X,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\theta_k(\rho,X,\tau), \quad (28)$$

где функционалы $\theta_k(\rho, X, \tau)$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ — решения смешанной задачи (14), в которой граничное условие при $X = 0$ заменено соответственно условиями

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial X}\Big|_{X=0} = \begin{cases} -2\pi Q_0\delta(\rho), & k = 0; \\ \left[a^2\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial\tau} - \Lambda_0\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial\rho} - a^2V\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial X}\right]\Big|_{X=0}, & k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{cases}$$

Следует заметить, что функционал $\theta_0(\rho, X, \tau)$ определен равенством (27), а все последующие слагаемые в правой части равенства (28) задают погрешность в определении искомого температурного поля, обусловленную пренебрежением термически тонким покрытием пленочного типа на подвижной границе полупространства.

Заключение

В аналитически замкнутом виде, пригодном для проведения дальнейшего параметрического анализа изучаемого процесса, для практически реализуемой ситуации найдено решение задачи о нахождении температурного поля ортотропного полупространства, граница которого, обладающая термически тонким покрытием пленочного типа, находится под воздействием внешнего стационарного предельно концентрированного теплового потока и перемещается параллельно самой себе по линейному закону.

Список литературы

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 553 с.
4. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М.: Изд-во МАИ, 2010. 308 с.
5. Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных средах // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39, № 5. С. 810–832.
6. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование тепломассопереноса при пленочном охлаждении тел // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, № 1. С. 107–112.
7. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.
8. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле полупространства в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. 2002. Т. 75, № 6. С. 172–178.
9. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 980 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций: пер. с англ. М.: Наука, 1970. 328 с.
12. Коул Д. Методы возмущений в прикладной математике: пер. с англ. М.: Мир, 1972. 276 с.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 11, pp. 257–266.
DOI: **10.7463/1114.0738693**
Received: 02.10.2014
Revised: 06.11.2014

Half-Space Temperature Field with a Movable Thermally Thin-Coated Boundary Under External Heat Flux

Vlasov P. A.[1,*], **Volkov I. K.**[1]

[*] pvlx@mail.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: temperature field, half-space, moving boundary

In engineering practice analytical methods of the mathematical theory of heat conduction hold a special place. This is due to many reasons, in particular, because of the fact that the solutions of the relevant problems represented in analytically closed form, can be used not only for a parametric analysis of the studied temperature field and to explore the specific features of its formation, but also to test the developed computational algorithms, which are aimed at solving real-world application heat and mass transfer problems. Difficulties arising when using the analytical mathematical theory methods of heat conduction in practice are well known. Also they are significantly exacerbated if the boundaries of the system under study are movable, even in the simplest case, when the law of motion is known.

The main goal of the conducted research is to have an analytically closed-form problem solution for finding the orthotropic half-space temperature field, a boundary of which has thermally thin coating exposed to extremely concentrated stationary external heat flux and uniformly moves parallel to itself.

The assumption that the covering of the boundary is thermally thin, allowed to realize the idea of "concentrated capacity", that is to accept the hypothesis that the mean-thickness coating temperature is equal to the temperature of its boundaries. This assumption allowed us to reduce the problem under consideration to a mixed problem for a parabolic equation with a specific boundary condition.

The Hankel integral transform of zero order with respect to the radial variable and the Laplace transform with respect to the temporal variable were used to solve the reduced problem. These techniques have allowed us to submit the required solution as an iterated integral.

References

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford University Press, 1959. (Russ. ed.: Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).
2. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).
3. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytic methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1985. 553 p. (in Russian) .
4. Formalev V.F., *Kuznetsova E.L. Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and Mass Transfer in Anisotropic Solids under Conditions of Aero-Gas-Dynamic Heating], Moscow, Moscow Aviation Institute Publ., 2010. 308 p. (in Russian).
5. Formalev V.F. Heat and mass transfer in anisotropic bodies. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2001, vol. 39, no. 5, pp. 810–832. (English translation: *High Temperature*, 2001, vol. 39, no. 5, pp. 753–774. DOI: 10.1023/A:1012393413687).
6. Formalev V.F., Kolesnik S.A., Chipashvili A.A. An analytical investigation of heat and mass transfer under conditions of film cooling of bodies. *Teplofizika vysokikh temperature*, 2006, vol. 44, no. 1, pp. 107–112. (English translation: *High Temperature*, 2006, vol. 44, no. 1, pp. 108–114. DOI: 10.1007/s10740-006-0012-4).
7. Kartashov E.M. Analytical Methods of Solution of Boundary Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in Regions with Moving Boundaries. *Izv. RAN. Energetika = Proceedings of the RAS. Power engineering*, 1999, no. 5, pp. 3–34. (in Russian).
8. Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Influence of the Mobility of a Boundary on the Temperature Field of a Half-Space under Unstable Conditions ofHeat Exchange with the Environment. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2002, vol. 75, no. 6, pp. 172–178. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2002, vol. 75, no. 6. pp. 1454–1462. DOI: 10.1023/A:1022143716313).
9. Pudovkin M.A., Volkov I.K. *Kraevye zadachi matematicheskoy teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh poley v neftyanykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary-value problems of mathematical theory of heat conduction in the annex to the calculations of temperature fields in oil reservoirs during flooding]. Kazan, Kazan University Publ., 1978. 188 p. (in Russian).
10. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya.* T. 2 [Differential and integral calculus. Vol. 2]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 980 p. (in Russian).

11. Erdelyi A., ed. *Tables of integral transforms. Vol. 2. Based, in part, on notes left by Harry Bateman*. McGraw-Hill, 1954. (Bateman Manuscript Project). (Russ. ed.: Bateman H., Erdelyi A. *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy. T. 2. Preobrazovaniya Besselya. Integraly ot spetsial'nykh funktsiy*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 328 p.).
12. Cole J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell Publishing Company, Waltham, 1968. (Russ. ed.: Cole J.D. *Metody vozmushcheniy v prikladnoy matematike*. Moscow, Mir Publ., 1972. 276 p.).