

УДК 519.40

Кольцевые диаграммы с периодическими метками и проблема степенной сопряженности в группах с условиями $C(3)$ - $T(6)$

Безверхний Н. В.^{1,*}

* nbezv@mail.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Работа посвящена изучению кольцевых диаграмм над группами, копредставление которых удовлетворяет условиям $C(3)$ - $T(6)$, и связанной с ними проблемой степенной сопряженности. Исследования проводятся с помощью метода групповых диаграмм. Основные результаты касаются кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками. Исследуются все типы кольцевых диаграмм над группами из указанного класса. Дается их классификация, в соответствии с которой такие диаграммы могут быть лишь трех типов. Доказывается, что для диаграмм одного из трех типов существуют ограничения как на длину границы, так и на толщину кольца. Первое из этих ограничений позволяет в данном частном случае решать проблему степенной сопряженности.

Ключевые слова: условия малого сокращения; диаграмма над группой; проблема степенной сопряженности

Введение

В данной работе исследуется структура кольцевых диаграмм специального вида над группами, удовлетворяющими условиям малого сокращения $C(3)$ - $T(6)$. Известно [2, 3], что слова w, v в алфавите X сопряжены в группе G с копредставлением $(X; R)$, если существует кольцевая диаграмма M над этим копредставлением, для которой метки $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ внутреннего и внешнего граничных циклов совпадают с v^{-1} и w .

Исследование структуры кольцевых диаграмм позволяет решить проблему сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в $(C(3)$ - $T(6))$ -группах [7]: для заданных слов w, v в образующих X $C(3)$ - $T(6)$ -группы $G = (X; R)$ выяснить, существует ли целое число n , для которого слова w^n, v сопряжены в группе G . Проблема степенной сопряженности формулируется следующим образом: для заданных слов w, v в образующих X $(C(3)$ - $T(6))$ -группы $G = (X; R)$ выяснить, существуют ли целые числа m, n , для которых слова w^n, v^m сопряжены в группе G .

По сравнению с первой проблемой решение второй осложняется тем, что длины обоих слов w^n, v^m ничем не ограничены из-за отсутствия ограничений на показатели n, m . Это

не позволяет применить к словам вида w^k, v^l ($k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$) алгоритм, решающий проблему сопряженности в рассматриваемом классе групп [2], поскольку заранее неизвестно число таких проверок.

Тем не менее, кольцевые диаграммы с периодическими метками $\varphi(\sigma) \equiv w^n, \varphi(\tau) \equiv v^m$ тоже могут обладать свойством периодичности: области в таких диаграммах при выполнении некоторых дополнительных условий периодически повторяются при обходе границы диаграммы в соответствии с периодичностью метки этой границы. При этом периодичность имеет место не только на границе диаграммы, но и внутри нее. (Ниже будут введены понятия слоев кольцевой диаграммы и их периодичности.) Это свойство диаграмм позволяет вырезать из них большую часть и тем самым ограничивать показатели m, n .

Изучению свойств кольцевых диаграмм с периодическими метками посвящена эта работа. Исследования проводятся с использованием геометрических методов комбинаторной теории групп, а именно, метода диаграмм над группами, базирующегося на следующих двух утверждениях [1, 2, 3].

Первое — лемма Ван Кампена, утверждающая, что слово равно единице в группе тогда и только тогда, когда существует односвязная диаграмма с граничной меткой, равной этому слову.

Второе — лемма о сопряженных элементах группы, утверждающая, что слова u, v представляют сопряженные элементы данной группы тогда и только тогда, когда существует кольцевая диаграмма с граничными метками, равными u, v^{-1} .

В дальнейшем мы будем использовать следующие основные обозначения:

$w_1 \equiv w_2$ — слово w_1 графически равно слову w_2 ;

$w_1 = w_2$ — слова w_1 и w_2 представляют один и тот же элемент группы;

$w \sim v$ — слова представляют сопряженные элементы группы;

$|w|$ — длина слова w ;

∂D — граница области D ;

∂M — граница карты M ;

$d(v)$ — степень вершины v ;

$d(D)$ — степень области D ;

$i(D)$ — число внутренних ребер области D ;

Основные понятия теории групп с малыми сокращениями и метода групповых диаграмм будем считать известными [2, 1, 3, 12].

1. Кольцевые диаграммы с несократимыми граничными метками

Диаграммы и карты. Пусть E^2 — евклидова плоскость. Вершина — это некоторая точка из E^2 . Ребро — ограниченное подмножество из E^2 , гомеоморфное открытому единичному интервалу. Область — ограниченное множество, гомеоморфное открытому

единичному кругу. Карта M — конечный набор попарно непересекающихся вершин, ребер и областей, удовлетворяющих следующим условиям:

1) если e — ребро из M , то имеются вершины a и b (не обязательно различные), такие, что $\bar{e} = e \cup \{a\} \cup \{b\}$;

2) граница ∂D каждой области D из M связна, причем для некоторых ребер $e_1, \dots, e_n$ из M имеем $\partial D = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n$.

Буква M будет использоваться также для обозначения теоретико-множественного объединения одноименного набора вершин, ребер и областей. Граница для M будет обозначаться символом ∂M . Если $\bar{e} = e \cup \{a\} \cup \{b\}$, то говорят, что a и b — концы ребра e . Замкнутое ребро — это ребро e вместе с его концами.

Если e — ориентированное ребро, направленное от концевой точки v_1 к концевой точке v_2 , то v_1 — начальная вершина этого ребра, а v_2 — конечная вершина. Противоположным образом ориентированное ребро, обратное к ребру e , обозначается через e^{-1} и направлено от v_2 к v_1 .

Путь — это последовательность ориентированных замкнутых ребер $e_1, \dots, e_n$, такая, что начальная вершина ребра e_{i+1} — это конечная вершина ребра e_i , $1 \leq i \leq n-1$. Концы пути — это начальная вершина ребра e_1 и конечная вершина ребра e_n .

Замкнутый путь, или цикл, — это такой путь, в котором начальная вершина ребра e_1 является конечной вершиной ребра e_n .

Путь называется приведенным, если он не содержит последовательной пары ребер вида ee^{-1} . Приведенный путь $e_1 \dots e_n$ называется простым, если при $i \neq j$ начальные точки ребер e_i и e_j различны.

Если D — область из M с данной ориентацией, то любой цикл минимальной длины, включающий в себя все ребра из ∂D , в котором все ребра ориентированы в соответствии с ориентацией области D , называется граничным циклом этой области. Если M связна и односвязна, то граничный цикл для M — это цикл α минимальной длины, содержащий все ребра из границы ∂M и не имеющий самопересечений.

Для кольцевой карты M граница $\partial M = \sigma \cup \tau$ — пара граничных циклов: внешний и внутренний.

Будем считать, что граничная метка области читается по часовой стрелке, граничная метка связной односвязной диаграммы — против, внешняя граница кольцевой диаграммы ориентирована против часовой стрелки, а внутренняя — по часовой стрелке.

Подпуть $\partial D \cap \partial M = p$ в граничных циклах области D и диаграммы M , либо в граничных циклах двух областей, называется последовательной частью границы как области D , так и карты M , или двух областей, соответственно [2].

Граничной вершиной в карте M называется любая вершина, принадлежащая граничному циклу карты M . Вершины, не являющиеся граничными, называются внутренними. Внутренним ребром в карте будем считать общую часть граничных циклов двух областей,

гомеоморфную отрезку и являющуюся последовательной частью границы обеих областей. Область D называется граничной в карте M , если в ее граничном цикле ∂D есть граничные вершины карты M , т.е. $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$.

Диаграммой над группой F называется ориентированная карта M вместе с функцией метки φ , сопоставляющей каждому ориентированному ребру e карты M метку $\varphi(e)$ из F таким образом, что если e — ориентированное ребро из M , а e^{-1} — противоположным образом ориентированное ребро, то $\varphi(e^{-1}) = \varphi(e)^{-1}$.

Если α — путь в M , $\alpha = e_1 \dots e_k$, то положим $\varphi(\alpha) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_k)$. Если D — область из M , то ее меткой называется элемент $\varphi(\alpha)$, где α — граничный цикл области D .

Пара областей (D_1, D_2) с общим ребром e в диаграмме M называется сократимой, если граничная метка односвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ равна единице в свободной группе F . Если в диаграмме M нет сократимых пар областей, то диаграмма M называется приведенной. Можно определить сократимую пару и в случае многосвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ [2].

Подмножество R свободной группы F называется симметризованным, если все элементы из R приведены и из $r \in R$ следует, что все циклические перестановки элементов $r^{\pm 1}$ также лежат в R .

Пусть R — симметризованное подмножество элементов группы F . Диаграмма M называется R -диаграммой, если для любого граничного цикла δ любой области D из M имеем $\varphi(\delta) \in R$.

Пусть R — симметризованное подмножество свободной группы F и N — нормальное замыкание в F множества R . Если w — произвольный элемент из F , то $w \in N$ тогда и только тогда, когда существует связная односвязная R -диаграмма M , такая, что метка на границе карты M равна w .

Поскольку слово w представляет единичный элемент группы $G = F/N$ тогда и только тогда, когда $w \in N$, то последнее утверждение является переформулировкой приведенной выше леммы Ван Кампена.

Группы с условиями малого сокращения. Пусть группа G задана копредставлением $G = (X; R)$. Предположим, что r_1 и r_2 — различные элементы из R , такие, что $r_1 = bc_1$ и $r_2 = bc_2$. В этом случае элемент b называется куском относительно множества R .

Предположения о малом сокращении состоят в том, что куски — относительно малые части элементов из R .

Условие $C(p)$ состоит в следующем: никакой элемент из R не является произведением менее чем p кусков.

Сформулируем условие $T(q)$. Пусть $3 \leq h < q$. Предположим, что $r_1, \dots, r_h$ — элементы из R , такие, что последовательные элементы r_i, r_{i+1} не являются взаимно обратными. Тогда по крайней мере одно из произведений $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ приведено.

Если v — вершина карты M , то $d(v)$ — степень вершины v — есть число неориентированных ребер, инцидентных вершине v . Если оба конца некоторого ребра e совпадают с v ,

мы считаем e дважды. Если D — область из M , то $d(D)$ — степень области D — есть число ребер в граничном цикле для D . Символ $i(D)$ обозначает число внутренних ребер из D , причем снова ребро, встречающееся в граничном цикле для D дважды, считается два раза.

Следующая теорема дает геометрическую интерпретацию условий $C(p)$ и $T(q)$.

Теорема 1 ([2]). Пусть R — симметризованное множество элементов свободной группы F и M — приведенная R -диаграмма.

1. Если R удовлетворяет условию $C(k)$, то каждая область D из M , такая, что $\partial D \cup \partial M$ не содержит ребер, имеет степень $d(D) \geq k$.

2. Если R удовлетворяет $T(m)$, то каждая внутренняя вершина v карты M имеет степень $d(v) \geq m$.

Обозначим через M_1 подкарту карты M , получающуюся удалением из M всех изолированных вершин. Пусть M — произвольная карта. Граничный слой карты M состоит из всех граничных вершин, ребер, содержащих граничные вершины, и граничных областей карты M .

Сокращения в $(C(3)-T(6))$ -группах. В группах с условиями $C(p)-T(q)$ длина произвольного куска может быть отлична от единицы. Но если $q > 4$, то все куски имеют единичную длину [14].

Действительно, предположив, что $r_1 \equiv abr'_1$, $r_2 \equiv abr'_2$ — различные определяющие соотношения, где a, b, r_1, r_2 — непустые слова в алфавите X , рассмотрим слова из R , обратные к r_1, r_2 и их циклические перестановки: $u_1 \equiv br'_1a$, $u_2 \equiv a^{-1}(r'_2)^{-1}b^{-1}$, $u_3 \equiv br'_1a$, $u_4 \equiv a^{-1}(r'_2)^{-1}b^{-1}$. Последовательность u_1, u_2, u_3, u_4, u_1 противоречит условию $T(6)$. Значит, общее начало ab двух определяющих соотношений из R имеет единичную длину.

Будем говорить, что в слове w есть R -сокращение [5, 6, 7], если существует элемент $r \in R$, такой, что:

- 1) $r \equiv r_1r_2$;
- 2) $w \equiv w_1w_2w_3$;
- 3) $r_1 \equiv w_2$;
- 4) слово r_2 либо пусто, либо является куском;
- 5) слова $w_1r_2^{-1}, r_2^{-1}w_3$ несократимы в свободной группе.

В случае замены слова w равным ему в группе G словом $w_1r_2^{-1}w_3$ будем говорить, что в w выполнено R -сокращение. R -сокращение в слове w , являющемся степенью некоторого слова v : $w = v^s$, называется длинным, если $|w_2| \geq |v|$. Если же $|w_2| < |v|$, то R -сокращение называется коротким.

Если не требуется перечисления всех образующих и определяющих слов, будем писать $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, подразумевая при этом, что в X содержатся также $x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$, а в R — все циклические перестановки и инверсии $r_1, \dots, r_m$.

Пусть у нас имеется группа $G = (X; R)$, где $X = \{a, b, c\}$, а $R = \{abc, acb\}$. Пусть имеется также слово $w = abb$. Используя определяющее соотношение $r_1 = abc$, заменяем в

слове w подслово ab куском c^{-1} . Получаем $w = c^{-1}b$. Таким образом, мы выполнили в слове w короткое R -сокращение.

Пусть теперь у нас есть слово $w = v^2$, где $v = acb$, то есть $w = acbacb$. Используя определяющее соотношение $r_2 = acb$, заменяем первое вхождение acb в w пустым словом. В данном случае мы выполнили длинное R -сокращение в слове w , так как $|acb| = |v|$. Если в любой циклической перестановке слова w нет R -сокращений, то слово w называется циклически R -несократимым.

Определим понятие $\bar{R}$ -сокращения с использованием диаграмм. Также дадим геометрическое определение R -сокращения. Для этого рассмотрим следующие понятия.

Рассмотрим диаграмму M . Область $D \subset M$ называется дэновской [8], если

- 1) $\partial D \cap \partial M$ — последовательная часть границы ∂M (т.е. $\partial D \cap \partial M = p$ — подпуть в граничных циклах области D и диаграммы M);
- 2) $i(D) \in \{0, 1\}$.

Полосой [8] в диаграмме M называется поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^k D_i$ со свойствами:

- 1) $\partial D_i \cap \partial M = p$ — последовательная часть границы ∂M ;
- 2) $\partial \Pi \cap \partial M = p$ — последовательная часть границы ∂M ;
- 3) при $k = 3$ $i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2$, причем соседние области имеют общее ребро, а все три области полосы имеют общую вершину;
- 4) при $k > 3$, $k = 2l + 1$, $i(D_1) = i(D_2) = i(D_{2l}) = i(D_{2l+1}) = 2$, $i(D_3) = i(D_5) = \dots = i(D_{2l-3}) = i(D_{2l-1}) = 3$, $i(D_4) = i(D_6) = i(D_{2l-4}) = i(D_{2l-2}) = 2$;
- 5) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро ($i = 1, \dots, k - 1$).

Пусть Π — полоса в диаграмме M . Граничным словом области $D_i \subset \Pi$ называется метка пути $\partial D_i \cap \partial M$, прочитанная в соответствии с ориентацией области D_i . Граничным словом полосы Π называется метка пути $\partial \Pi \cap \partial M$, прочитанная в направлении, противоположном ориентации границы ∂M . Аналогично определяется граничное слово дэновской области.

Будем говорить, что в слове v есть R -сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует дэновская область, граничное слово которой является подсловом в v . В слове v есть $\bar{R}$ -сокращение, если существует связная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует полоса Π , граничное слово которой является подсловом в v .

Заметим, что полоса в диаграмме M с циклически несократимой в свободной группе, циклически R -несократимой граничной меткой $\varphi(\partial M)$ является приведенной диаграммой.

Действительно, предположив, что две соседние области в полосе образуют сократимую пару, приходим к выводу о свободной сократимости слова $\varphi(\partial M)$, либо к выводу о том, что в слове $\varphi(\partial M)$ есть R -сокращение. Достаточно рассмотреть два случая: 1) сократимые области D_1, D_2 имеют внутренние степени $i(D_1) = 2, i(D_2) = 2$; 2) $i(D_1) = 2, i(D_2) = 3$.

В первом случае из сократимости пары (D_1, D_2) следует свободная сократимость слова $\varphi(\partial M)$. Во втором случае рассмотрим три соседние области в полосе: D_1, D_2, D_3 . Ясно,

что $i(D_3) = i(D_1) = 2$, $i(D_2) = 3$. Из сократимости пары D_1, D_2 и из того, что кусок в $T(6)$ -группе имеет длину 1 следует, что в слове $\varphi(\partial M)$ есть R -сокращение: метка ребра $\partial D_2 \cap \partial D_3$ является подсловом в метке пути $\partial D_1 \cap \partial M$, и область D_3 можно наклеить по указанному ребру на границу ∂M , в результате чего будет получена область, реализующая R -сокращение в граничной метке диаграммы M .

Для любого циклически несократимого в свободной группе слова w , не равного единице в группе G , существует циклически R -, $\bar{R}$ -несократимое слово w_0 , сопряженное с w в G .

Действительно, из определений R -, $\bar{R}$ -сокращений следует, что в результате R -, $\bar{R}$ -сокращения длина слова строго уменьшается. Поэтому, записав произвольное слово w на окружности C и выполнив в его циклических перестановках R -, $\bar{R}$ -сокращения, получим либо пустое слово, что невозможно, поскольку $w \neq 1$ в G , либо непустое слово w_0 , в циклических перестановках которого нет R -, $\bar{R}$ -сокращений.

Нормальные формы элементов в $(C(3)-T(6))$ -группах. Слово w_0 , сопряженное некоторой степени слова w в группе G и обладающее свойством R -, $\bar{R}$ -несократимости всех своих степеней, называется нормальной формой слова w .

Начнем с того, что для любого циклически несократимого в F слова w , не равного единице в группе G , существует циклически R -, $\bar{R}$ -несократимое слово w_0 , сопряженное с w в G .

Действительно, из определений следует, что в результате R -, $\bar{R}$ -сокращения длина слова строго уменьшается. Выполняя в циклических перестановках слова w R -, $\bar{R}$ -сокращения, получим либо пустое слово, что невозможно, поскольку $w \neq 1$ в G , либо непустое слово w_0 , в циклических перестановках которого нет R -, $\bar{R}$ -сокращений.

Следующие теоремы гарантируют существование нормальных форм, но не обеспечивают их единственности.

Теорема 2 ([6]). Пусть слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3)-T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически несократимо в свободной группе и циклически R -, $\bar{R}$ -несократимо. Пусть $m = \max_{r \in R} |r|$.

1. Если для некоторого $n' \in \mathbb{N}$ слово $w^{n'}$ R -сократимо, то существует $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, для которого слово w^n R -сократимо.

2. Если число m' удовлетворяет неравенствам $1 < m' \leq m$ и для некоторой циклической перестановки w^* слово $(w^*)^{m'}$ R -сократимо, причем ни при каком $m'' < m'$ в слове $(w^*)^{m''}$ нет R -сокращений, то в результате выполнения этого сокращения получается слово $w_0 = (w^*)^{m'}$ (равенство в группе G), любая степень которого R -несократима.

Теорема 3 ([6]). Пусть слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3)-T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически $\bar{R}$ -несократимо, а все его степени w^n R -несократимы. Тогда верны утверждения.

1. Если слово w^2 $\bar{R}$ -несократимо, то любая степень w^n $\bar{R}$ -несократима.

2. Если же в слове w^2 есть $\bar{R}$ -сокращение, то либо а) все степени слова $w_1 = w^2$ (равенство в группе G), полученного из w^2 в результате этого $\bar{R}$ -сокращения, R -, $\bar{R}$ -несократимы; либо б) существует конечный алгоритм, строящий последовательность сопряженных в группе G слов $w, w_1, \dots, w_t$, в которой $t < |w|$, и слово w_t R -, $\bar{R}$ -несократимо вместе со своими степенями.

Классификация кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками. Рассмотрим кольцевую диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cap \tau$. Предположим, что $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Рассмотрим поддиаграмму K_σ , состоящую из областей D , граничные циклы которых содержат вершины из σ . Назовем эту поддиаграмму K_σ -слоем диаграммы M . Рассмотрим диаграмму $M_1 = M \setminus K_\sigma$, полученную из M удалением слоя K_σ . Обозначим граничные циклы диаграммы M_1 через σ_1, τ . Слой K_σ является кольцевой диаграммой с непересекающимися граничными циклами σ, σ_1 .

Если $\sigma_1 \cap \tau = \emptyset$, то аналогично определяется слой K_{σ_1} с граничными циклами σ_1, σ_2 . Слои K_{σ_i} определяются так же далее, до тех пор, пока $\sigma_i \cap \tau = \emptyset$.

Пусть M кольцевая диаграмма с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$, и слова $\varphi(\sigma), \varphi(\tau)$ циклически $\bar{R}$ -, R -несократимы.

В статье [8] приводится следующая классификация кольцевых диаграмм над $(C(p)-T(q))$ -группами при $(p, q) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$:

- 1) вырожденные кольцевые диаграммы M , для которых $|M| = 0$;
- 2) простые кольцевые диаграммы — невырожденные диаграммы M ($|M| > 0$, т.е. M содержит хотя бы одну область), у которых граничные циклы σ и τ имеют непустое пересечение;
- 3) n -слойные кольцевые диаграммы, для которых после удаления n граничных слоев $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{n-1}}$ получается вырожденная диаграмма;
- 4) $(C-n)$ -слойные кольцевые диаграммы — диаграммы, для которых после удаления n граничных слоев получается простая кольцевая диаграмма (такая диаграмма является объединением простой и n -слойной диаграмм, имеющих общий граничный цикл).

Следует отметить, что данная классификация имеет место только для кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками. Снятие требования несократимости граничных меток значительно усложняет структуру кольцевых диаграмм. Это видно из приводимых ниже определений и лемм.

Определение 1. Область $D \subset M$ называется простой, если множество $\partial D \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы области D .

Определение 2. Связная односвязная карта M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ называется простым диском, если $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — две вершины, и все области в M простые.

Определение 3. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется островом в M , если $M = M_1 \cup M_2 \cup p$, где p — простой подпуть в ∂M , возможно, нулевой длины, не имеющий ребер в граничных циклах областей карт M_1 и M_2 и имеющий по одной вершине

в циклах ∂M_1 и в ∂M_2 , $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$. Будем говорить, что M_1 — остров на участке s границы карты M , если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s .

Определение 4. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется полуостровом в M , если существует область $D_0 \subset M$: $M = M_0 \cup D_0 \cup M_1$, $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$, причем карта $M_1 \cup M_0$ не является связной. Будем говорить, что M_1 — полуостров на участке s границы карты M , если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s .

Лемма 1 ([7]). Пусть M — связная односвязная или кольцевая карта. Пусть s — подпуть в граничном цикле ∂M для односвязной карты M или в одном из граничных циклов σ , τ для кольцевой карты M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$. Тогда если в карте M нет полос Π и дэновских областей D , для которых $\partial \Pi \cap \partial M$ — подпуть в s и $\partial D \cap \partial M$ — подпуть в s , то в M нет островов и полуостровов на участке границы s .

Так же, как это было сделано для кольцевой диаграммы, можно определить граничные слои K_σ , K_τ для простого диска M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$.

Определение 5. Пару областей в слое K_σ (K_τ) диаграммы M , имеющих внутреннюю степень i , и имеющих общее внутреннее ребро, будем называть i -парой. При различных i и j i -пару и j -пару будем называть разноименными. Область внутренней степени i будем называть i -областью.

Лемма 2 ([7]). Пусть M — простой диск. Если M — диаграмма над $(C(3)-T(6))$ -группой и граничные слои K_σ , K_τ не содержат полос и дэновских областей, то верны следующие утверждения:

- 1) для каждой из вершин A , B в M существуют однозначно определенные области D_A , D_B , такие, что $A \in \partial D_A$, $B \in \partial D_B$;
- 2) $i(D_A) = i(D_B) = 2$;
- 3) слои K_σ , K_τ содержат только области внутренней степени 2 и 3, причем, в каждой из поддиаграмм $K_\sigma \setminus (D_B \cup D_A)$, $K_\tau \setminus (D_B \cup D_A)$ областей первого типа на две больше, чем второго;
- 4) в слоях K_σ , K_τ могут встречаться только 2-пары и 3-пары и нет 2-троек, 3-троек, и т.д., причем в каждом из слоев число 2-пар на единицу больше, чем 3-пар, а разноименные пары чередуются в каждом из слоев K_σ , K_τ ; то же верно и для областей: в K_σ , K_τ могут встречаться только 2- и 3-области.

Из леммы 2 получаем вывод о строении простой кольцевой диаграммы с $\bar{R}$ -, R -несократимыми граничными метками: она является объединением простых дисков, граничные слои которых устроены, как в лемме 2.

Следующая лемма очень важна. Она разделяет множество всех n -слойных диаграмм с $\bar{R}$ -, R -несократимыми граничными метками на два класса: содержащие 2-пары и 3-пары областей в своих граничных слоях и не содержащие таких 2-пар. Ниже будет доказана периодичность диаграмм, принадлежащих первому из двух классов.

Лемма 3. Пусть M — кольцевая n -слойная диаграмма при $n > 1$ с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и граничными слоями K_σ, K_τ , не содержащими полос и дэновских областей (что эквивалентно несократимости граничных метов). Тогда либо в граничных слоях карты M есть только отдельные 2-области и 3-области, причем они чередуются между собой, либо в граничных слоях M есть 2- и 3-пары, которые чередуются между собой, а между ними могут встречаться отдельные 2- и 3-области. При этом граничные слои не содержат 2-троек и 3-троек, и т.д.

Доказательство. Будем использовать следующее неравенство для кольцевых диаграмм над $(C(3)-T(6))$ -группами [2]:

$$\sum_M^* \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq 0. \quad (1)$$

Здесь символ $*$ означает, что суммирование распространяется только на граничные области.

Это неравенство не нарушается для диаграммы, граничные слои которой содержат только 2- и 3-области и чередующиеся 2- и 3-пары, т.е. имеют строение, указанное в данной лемме. Остается доказать, что при нарушении указанного строения данное неравенство не выполняется. Очевидно, верны следующие три утверждения.

1. Вклад в сумму (1) всех чередующихся отдельных областей слоя K_σ , заключенных между двумя соседними 2-парами, равен $-0,5$.
2. Вклад в сумму (1) всех чередующихся отдельных областей, заключенных между соседними 3-парами, равен $0,5$.
3. Вклад в сумму (1) всех чередующихся отдельных областей, заключенных между соседними 2-парой и 3-парой, равен нулю.

Предположим, что граничные слои диаграммы M могут содержать только отдельные 2- и 3-области и 2- и 3-пары. Если в слое K_σ число 2-пар превышает число 3-пар, то в K_σ есть полоса, что запрещено условием леммы. Если число 2-пар равно числу 3-пар, но они не чередуются между собой, то в K_σ есть полоса.

Пусть в K_σ 3-пар на одну больше, чем 2-пар. Тогда в K_σ есть две 3-пары, между которыми в K_σ есть только отдельные 2- и 3-области. Предполагая, что 2-пары чередуются с 3-парами, чтобы не образовалась полоса, приходим к выводу, что вклад слоя K_σ в сумму (1) с учетом утверждений 1–3 и учетом вклада лишней 3-пары, равен $-0,5$. Очевидно, неравенство (1) не выполняется и при условии, что количество 3-пар превышает количество 2-пар более, чем на одну.

Если же слой K_σ содержит d -тройки при $d \geq 2$ и отдельные d -области при $d \geq 3$, то для компенсации их отрицательного вклада в сумму (1) необходимо наличие 2-пар, не разделенных 3-парами, что противоречит условию леммы. Таким образом, нулевая сумма (1) при суммировании по всем областям слоя K_σ возможна лишь при выполнении для этого слоя требования леммы. То же условие должно выполняться и для слоя K_τ . Значит, неравенство

(1) выполняется для кольцевой карты M тогда и только тогда, когда оно выполняется для каждого из граничных слоев карты M . А последнее, как мы видели, приводит к указанному в лемме строению слоев. Теорема доказана.

Следующая лемма уточняет приведенную выше классификацию кольцевых диаграмм с несократимыми граничными метками: оказывается, множество таких диаграмм содержит на один тип диаграмм меньше, если ограничиться диаграммами над $(C(3)-T(6))$ -группами.

Лемма 4. Не существует кольцевых $(C-n)$ -слойных диаграмм, граничные метки которых $\bar{R}$ -, R -несократимы.

Доказательство. Предположим, что существует $(C-n)$ -слойная диаграмма M с несократимыми граничными метками.

1. По определению диаграмма M является объединением n -слойной и простой карт N и P : $\partial N = \sigma \cup \sigma_n$, $\partial P = \sigma_n \cup \tau$, $\sigma = \sigma_0$. В диаграмме N всего n слоев: $K_\sigma = K_{\sigma_0}, \dots, K_{\sigma_{n-1}}$.

Если в диаграмме P есть полоса, все граничные ребра которой содержатся в цикле σ_n , то полоса есть и в слое $K_{\sigma_{n-1}}$ карты $P \cup K_{\sigma_{n-1}}$ и т.д., и в слое K_σ диаграммы M есть полоса, что противоречит условию данной леммы. Значит, граничные слои дисковых компонент простой карты P не содержат полос.

Аналогично доказывается, что из наличия дэновской области в диаграмме P вытекает ее наличие в слое K_σ диаграммы M , что опять же невозможно. Итак, диаграмма P не содержит полос и дэновских областей.

2. Рассмотрим диаграмму N . По предположению в ее K_σ -слое нет полос и дэновских областей. Рассмотрим слой $K_{\sigma_{n-1}}$. Представим P в виде объединения простых дисковых компонент P_i , соединенных простыми путями p_i , $i = 1, \dots, t$, для некоторого t . Из сделанного предположения следует, что в слое $K_{\sigma_{n-1}}$ нет полос и дэновских областей, для которых пересечение их границ с циклом σ_{n-1} целиком содержится в одном из путей p_i . Из доказанных свойств диаграммы P следует, что в слое σ_{n-1} нет полос и дэновских областей, для которых пересечение их границ с циклом σ_{n-1} целиком содержится в граничном цикле одной из дисковых компонент P_i .

Представим цикл σ_{n-1} в виде $\sigma_{n-1} = p_1 s_1 p_2 s_2 \dots p_t s_t$, где $s_i = \partial P_i \cap \sigma_{n-1}$, $i = 1, \dots, t$. При этом $A_i = p_i \cap s_i$, $B_i = s_i \cap p_{i+1}$ — пара вершин, общих для двух участков границы дисковой карты P_i . Пусть D_{A_i}, D_{B_i} — области внутренней степени 2 в компоненте P_i (лемма 2). Рассмотрим ребро $\partial D_{A_i} \cap s_i$ с вершинами A_i, C_i . В диаграмме M вершина C_i должна иметь степень не менее 6, причем только 3 ребра, инцидентные этой вершине, содержатся в P_i . Значит, другие 3 ребра определяют в подкарте $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$ 2-пару из областей с общей вершиной C_i .

Из леммы 2 следует, что ближайшей к вершине C_i в поддиаграмме $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$ вдоль пути s_i является вершина E_i с тремя, но не с пятью инцидентными ей ребрами, содержащимися в P_i . Действительно, по лемме 2 2-пары и 3-пары чередуются в граничном слое карты P_i ,

причем, ближайшей к области D_{A_i} является 2-пара. Она и определяет вершину E_i . Вершине E_i в слое $K_{\sigma_{n-1}}$ поддиаграммы $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$ соответствует 2-пара областей. Вместе с указанной выше 2-парой при вершине C_i они определяют полосу в $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$. Теперь не составляет труда показать, что полоса есть и в K_σ -слое карты M , что противоречит сделанному в начале доказательства предположению. Тем самым лемма доказана.

2. Кольцевые диаграммы с периодическими метками

Определение 6. Пусть M — k -слойная кольцевая диаграмма над группой $G = (X; R)$ с периодической меткой граничного цикла $\varphi(\sigma) \equiv w^n$. Будем говорить, что граничный слой K_σ является периодическим в соответствии с периодичностью граничной метки с основанием w , если он состоит из nm областей $D_1, \dots, D_{nm}$, граничные метки которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(\partial D_1) &\equiv \varphi(\partial D_{m+1}) \equiv \varphi(\partial D_{2m+1}) \equiv \dots \equiv \varphi(\partial D_{(n-1)m+1}); \\ \varphi(\partial D_2) &\equiv \varphi(\partial D_{m+2}) \equiv \varphi(\partial D_{2m+2}) \equiv \dots \equiv \varphi(\partial D_{(n-1)m+2}); \\ &\vdots \\ \varphi(\partial D_m) &\equiv \varphi(\partial D_{2m}) \equiv \varphi(\partial D_{3m}) \equiv \dots \equiv \varphi(\partial D_{nm}), \end{aligned}$$

и весь слой K_σ является объединением n односвязных поддиаграмм, каждая из которых является копией односвязной поддиаграммы, состоящей из областей $D_1, \dots, D_m$.

Очевидно, метка внутреннего граничного цикла $\varphi(\sigma_1)$ кольцевой диаграммы K_σ тоже является степенью некоторого слова w_1 : $\varphi(\sigma_1) \equiv w_1^{-n}$. Здесь показатель степени равен $-n$, поскольку внутренняя граница кольца всегда имеет ориентацию, противоположную внешней.

Лемма 5. Если диаграмма M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над $(C(3)\text{-}T(6))$ -группой $G = (X; R)$ является k -слоистой, граничные метки $\varphi(\sigma) \equiv w^{-2n}$, $\varphi(\tau) \equiv v^{2m}$ являются $\bar{R}$ -, R -несократимыми, и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то все слои диаграммы M являются периодическими в соответствии с периодичностью граничной метки $\varphi(\sigma)$ с основанием w^2 .

Доказательство. Заметим, что при прочтении граничной метки $\varphi(\sigma^{-1})$ по часовой стрелке получаем слово w^{2n} . Будем считать, что области в слое K_σ занумерованы по часовой стрелке.

Лемма 3 гарантирует наличие в слое K_σ не только 2-пар, но и 3-пар, а также их чередование. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что области D_1 , D_2 образуют 2-пару, т.е. $i(D_1) = i(D_2) = 2$, и $\partial D_1 \cap \partial D_2 = e_1^2$ — общее неориентированное ребро граничных циклов этих областей. Пусть $A_1^2 = e_1^2 \cap \sigma$ — граничная вершина этого ребра. Начальную и конечную вершины пути $\sigma \cap (\partial D_1 \cup \partial D_2)$ обозначим через A_1^1 , A_2^2 , ориентируя путь противоположно ориентации граничного цикла σ .

Не теряя общности, можно считать, что метка $\varphi(\sigma)$ граничного пути диаграммы M с началом и концом в вершине A_1^1 графически равна w^{-2n} .

Обозначим через B_1^2 концевую вершину подпути в σ^{-1} , начинающегося в вершине A_1^2 и имеющего граничную метку w^* , где символ $*$ означает циклическую перестановку слова. Аналогично через B_1^1, B_2^2 обозначим концевые вершины путей, начинающихся в вершинах A_1^1, A_2^2 соответственно, и имеющих граничные метки — циклические перестановки слова w .

Рассмотрим кольцевую диаграмму M_1 , полученную склейкой диаграммы M с копией односвязной диаграммы из областей D_1, D_2 по пути $B_1^1 B_2^2$. Выбор вершин B_i^j гарантирует возможность такой склейки. Копии областей D_1, D_2 обозначим через D'_1, D'_2 .

Если вершина B_1^2 принадлежит границе только одной области $D_s \subset K_\sigma$, то, рассматривая диаграмму из трех областей D_s, D'_1, D'_2 , либо приходим к противоречию с условием $T(6)$ (теорема 1): $d(B_1^2) < 6$, либо одна из пар областей $(D_s, D'_1), (D_s, D'_2)$ является сократимой, что приводит к наличию свободного сокращения в одном из определяющих соотношений $\varphi(\partial D'_i), i = 1, 2$, что тоже невозможно.

Значит, вершина B_1^2 является общей не менее, чем для двух областей D_s, D_{s+1} диаграммы M .

Начнем со случая, когда таких областей ровно две. Это значит, что они образуют 2-пару в слое K_σ . При этом в диаграмме M_1 $d(B_1^2) = 4$, что противоречит теореме 1 и может быть объяснено лишь наличием сократимых пар среди областей D'_1, D'_2, D_s, D_{s+1} . Из несократимости граничных меток диаграммы M следует, что таковыми могут быть только (D'_1, D_s) и (D'_2, D_{s+1}) . Теперь легко убедиться в совпадении граничных меток $\varphi(\partial D'_2) \equiv \varphi(\partial D_{s+1})$ и $\varphi(\partial D'_1) \equiv \varphi(\partial D_s)$ и равенстве множеств $\partial D_1 \cap \sigma = \partial D_s \cap \sigma$ и $\partial D_2 \cap \sigma = \partial D_{s+1} \cap \sigma$.

Теперь, опираясь на теорему 1, нетрудно убедиться в том, что $\varphi(\partial D_3) \equiv \varphi(\partial D_{s+2})$ и так далее для всех областей слоя K_σ . Таким образом, K_σ является периодическим в соответствии с периодичностью граничной метки $\varphi(\sigma)$ с основанием w .

Рассмотрим второй случай, когда вершина B_1^2 является общей ровно для трех областей D_{s-1}, D_s, D_{s+1} диаграммы M . Тогда в поддиаграмме из областей $D'_1, D'_2, D_{s-1}, D_s, D_{s+1}$ степень вершины B_1^2 равна 5: $d(B_1^2) = 5$, что противоречит теореме 1. Отсюда следует наличие сократимых пар областей и, как следствие, наличие свободного сокращения в граничной метке одной из этих областей. Итак, второй случай невозможен.

Остается последний третий случай, когда вершина B_1^2 является общей ровно для четырех областей $D_{s-1}, D_s, D_{s+1}, D_{s+2}$ диаграммы M . Действительно, из теоремы о строении слоев кольцевой k -слойной диаграммы с $\bar{R}$ -, R -несократимыми граничными метками следует, что слой K_σ не содержит 3-троек областей. Значит, среди областей $D_{s-1}, D_s, D_{s+1}, D_{s+2}$ области D_{s-1}, D_{s+2} имеют по два внутренних ребра в диаграмме M , а области D_s, D_{s+1} образуют 3-пару.

В этой ситуации нетрудно убедиться в том, что слой K_σ является периодическим в соответствии с периодичностью граничной метки $\varphi(\sigma)$ с периодом w^{-2} , и все остальные слои диаграммы M обладают тем же свойством. При этом все слои содержат одинаковое число областей, а именно, $2nd$ при некотором целом d . Надо заметить, что для любых d областей

$D_l, D_{l+1}, \dots, D_{l+d}$ в слое K_σ метка граничного пути образованной ими поддиаграммы совпадает с циклической перестановкой слова w^2 : $\varphi(\sigma \cap (\partial D_l \cup \partial D_{l+1}, \dots, \partial D_{l+d})) \equiv (w^*)^2$. Теорема доказана.

Такая структура слоев позволяет вырезать большую часть диаграммы M , удалив из каждого слоя $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{k-1}}$ по $2(n-1)d$ областей и замкнув оставшиеся $2d$ областей в кольцо, что возможно благодаря периодичности слоев. Из k таких кольцевых слоев, содержащих по $2d$ областей склеивается кольцевая k -слойная диаграмма M_{2d} .

Рассмотрим теперь ситуацию на внутренней границе кольцевой диаграммы. Если слова w^n, v^m сопряжены в группе G и $\bar{R}$ -, R -несократимы, то w^{2n} и v^{2m} тоже сопряжены и несократимы. Если существует кольцевая k -слойная диаграмма M сопряженности с граничными метками $\varphi(\sigma) \equiv w^{2n}, \varphi(\tau) \equiv v^{-2m}$, то к ней применима лемма 5. Но применять ее можно как на внутренней границе, так и на внешней.

Внутренний граничный слой обозначим K_τ , а все последующие при движении вглубь диаграммы от границы τ к границе σ обозначим $K_{\tau_1}, \dots, K_{\tau_{k-1}}$. Как следует из леммы 5, все эти слои, являясь в то же время и слоями K_{σ_i} при соответствующих значениях i , являются периодическими с периодом, соответствующим w^2 . Но они же являются периодическими в соответствии с периодом v^2 .

Как известно из теории свободных групп, если слова w^n и v^m графически равны, то существует слово u : $w \equiv u^t, v \equiv u^s$. То же самое можно сказать и о слоях кольцевой k -слойной диаграммы M с периодическими метками: поскольку в соответствии с леммой 5 все слои K_{σ_i} содержат $2nd$ областей, а все слои K_{τ_j} содержат $2mb$ областей, и при этом речь идет об одних и тех же слоях, то повторяющаяся часть всех слоев содержит c областей, где $2d = ct, 2b = cs$. Тогда существуют слова u_w, u_v , для которых $w^2 \equiv u_w^t, v^2 \equiv u_v^s$, и граничные метки диаграммы M имеют вид: $\varphi(\sigma) \equiv u_w^{nt}, \varphi(\tau) \equiv u_v^{-ms}, nt = ms$, а все слои диаграммы M являются периодическими в соответствии с периодом u_v , или, что означает в строении слоев то же самое, с периодом u_w .

Таким образом, из строения слоев диаграммы M можно сделать вывод: сопряженными в группе G являются слова $w^{2(s,t)/t}$ и $v^{-2(s,t)/s}$, где (s, t) — наименьшее общее кратное чисел s, t . Таким образом, можно сделать оценку сверху для показателей степеней сопряженных слов: очевидно, $s, t \leq \max(|w^2|, |v^2|) \Rightarrow (s, t) \leq st \leq (\max(|w^2|, |v^2|))^2$, поэтому показатели ограничены числом $C = 2(\max(|w^2|, |v^2|))^2$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Если диаграмма M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ над $(C(3)-T(6))$ -группой $G = (X; R)$ является k -слойной, граничные метки $\varphi(\sigma) \equiv w^{-2n}, \varphi(\tau) \equiv v^{2m}$ являются $\bar{R}$ -, R -несократимыми и граничный слой K_σ содержит 2-пары областей, то существуют целые числа $a, b \leq C = 2(\max(|w^2|, |v^2|))^2$, для которых $w^a \sim v^b$ в группе G , и проверка сопряженности степеней слов w, v сводится к конечному числу применений алгоритма [2], проверяющего сопряженность в $(C(3)-T(6))$ -группах.

3. Заключение

В данной статье исследован один из трех типов кольцевых диаграмм с циклически $\bar{R}$ -, R -несократимыми граничными метками. Исследована структура таких диаграмм и доказана теорема, позволяющая решать в данном частном случае проблему степенной сопряженности в рассматриваемом классе групп.

За рамками данной работы остались два типа кольцевых диаграмм с несократимыми метками: простые диаграммы и k -слойные, в слоях которых области с двумя и тремя внутренними ребрами строго чередуются. На данном этапе исследования не удастся получить верхнюю оценку длин граничных меток в таких диаграммах. Поэтому проблема степенной сопряженности в классе $(C(3)-T(6))$ -групп остается открытой.

Для диаграмм рассмотренного здесь типа можно доказать следующее интересное свойство: из периодичности слоев такой диаграммы, т.е. из повторения областей вдоль слоя, следует и периодичность всей диаграммы: слои $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{k-1}}$ повторяются при движении вглубь диаграммы. Более того, существует ограниченное число разных слоев в диаграмме сопряженности слов w^{2n}, v^{2m} и они могут следовать друг за другом в диаграмме M только в единственном порядке. Таким образом, можно не только ограничивать диаграмму по длине слоев, но и по их числу, т.е. такие диаграммы можно считать не только «короткими», но и «тонкими», а значит, имеющими ограниченную площадь. Все оценки определяются длинами слов w, v и длинами определяющих соотношений в группе $G = (X; R)$. Указанное свойство кольцевых диаграмм не способствует решению рассматриваемой здесь проблемы степенной сопряженности. Поэтому доказательство сформулированного свойства опускаем.

Список литературы

1. Магнус Д., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: Пер. с англ. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп: пер. с англ. М.: Мир, 1980. 448 с.
3. Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М: Наука, 1989. 448 с. (Современная алгебра).
4. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Труды Математического ин-та АН СССР. 1955. Т. 44. С. 1–444.
5. Безверхний Н.В. Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$ // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 39–46.
6. Безверхний Н.В. Нормальные формы для элементов бесконечного порядка в группах с условиями $C(3)-T(6)$ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 6–25.
7. Безверхний Н.В. Проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(3)-T(6)$ // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 4. С. 27–46.

8. Безверхний В.Н. О нормализаторах элементов в $(C(p)-T(q))$ -группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. трудов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 1994. С. 4–58.
9. Безверхний В.Н., Паршикова Е.В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условиями $C(4)-T(4)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. трудов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2001. С. 120–139.
10. Паршикова Е.В. Проблема слабой степенной сопряжённости в группах с условием $C(4)-T(4)$ // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. трудов. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2001. С. 179–185.
11. Безверхний Н.В. О кручении и о разрешимости проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$. М., 1995. Деп. в ВИНТИ, № 2033–В95 .
12. Безверхний Н.В., Чернышева О.А. Односторонние функции, основанные на проблеме дискретного логарифмирования в группах с условиями $C(3)-T(6)$ // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 70–101. DOI: [10.7463/1014.0729483](https://doi.org/10.7463/1014.0729483)
13. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations // Proc. of Edinburg Math. Soc. Ser. 2. 1992. Vol. 35, no. 1. P. 1–39. DOI: [10.1017/S0013091500005290](https://doi.org/10.1017/S0013091500005290)
14. Gersten S.M., Short H.B. Small cancellation theory and automatic groups // Inventiones Mathematicae. 1990. Vol. 102, iss. 1. P. 305–334. DOI: [10.1007/BF01233430](https://doi.org/10.1007/BF01233430)

Ring Diagrams with Periodic Labels and Power Conjugacy Problem in Groups with Small Cancellation Conditions $C(3)-T(6)$

Bezverhnii N. V.^{1,*}

* nbezv@mail.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: small cancellation conditions, diagrams in groups, power conjugacy problem

In this paper we investigate the structure of ring diagrams with periodic labels in groups with small cancellation conditions $C(3)-T(6)$. These diagrams are used to solve the power conjugacy search problem in a cyclic subgroup and the problem of power conjugation. In groups of this class the first problem is positively solved. The second is formulated as follows.

To ascertain whether there are m, n , integers for which the degrees of v, w words with m, n exponents, respectively, are conjugated in the group $G = (X; R)$. To solve this problem in the group with small cancellation conditions $C(3)-T(6)$ it is sufficient to obtain upper bounds for the lengths of the boundary labels of the ring diagram. Therein lies this work.

Previously, it was proved that for any w word we can take a so-called normal form — word with the following property: each degree of normal form is R -irreducible. Studying of the ring diagrams with irreducible periodic labels manages to break a set of these diagrams into three classes. Working with one of these classes and using the periodicity of the boundary labels of diagram, it is possible to prove the periodicity of the layers of this diagram, and further limit the length of the boundary labels.

Thus, it turns out that to solve the power conjugacy problem is enough to use the finite known in advance number of checks for the conjugation of the certain degrees of v, w words. In the considered class of groups this problem is solved long ago.

References

1. Magnus W., Karrass A., Solitar D. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966. 444 p. (Russ. ed.: Magnus W., Karrass A., Solitar D. *Kombinatornaja teorija grupp*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p.).

2. Lyndon R., Schupp P. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. (Russ. ed.: Lyndon R., Schupp P. *Kombinatornaja teorija grupp*. Moscow, Mir Publ., 1980. 448 p.).
3. Ol'shanskii A.Yu. *Geometry of Defining Relations in Groups*. Springer Netherlands, 1991. 505 p. (Ser. Mathematics and Its Applications; vol. 70). DOI: [10.1007/978-94-011-3618-1](https://doi.org/10.1007/978-94-011-3618-1)
4. Novikov P.S. On the algorithmic unsolvability of word identity problem in group theory. *Tr: Matematicheskogo in-ta AN SSSR* [Proc. of Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences], 1955, vol. 44, pp. 1–144. (in Russian).
5. Bezverkhni N.V. On the solvability of the general word problem for a cyclic subgroup of a group with condition $C(6)$. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika*, 1999, vol. 5, no. 1, pp. 39–46. (in Russian).
6. Bezverhni N.V. Normal forms for elements of infinite order in group with $C(3)$ - $T(6)$ condition. *Izvestija TulGU. Estestvennye nauki*, 2010, iss. 1, pp. 6–25. (in Russian).
7. Bezverhni N.V. The power conjugacy search problem in a cyclic subgroup in groups with the condition $C(3)$ - $T(6)$. *Diskretnaja matematika*, 2012, vol. 24, iss. 4, pp. 27–46. (English translation: *Discrete Mathematics and Applications*, 2012, vol. 22, iss. 5-6, pp. 521–544. DOI: [10.1515/dma-2012-036](https://doi.org/10.1515/dma-2012-036)).
8. Bezverhni V.N. On normalizers of elements in $(C(p)$ - $T(q))$ -groups. *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups: interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 1994, pp. 4–58. (in Russian).
9. Bezverhni V.N., Parshikova E.V. The solution of problems of integration in a cyclic subgroup of a group with condition $C(4)$ - $T(4)$. *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups: interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 2001, pp. 120–139. (in Russian).
10. Parshikova E.V. The problem of weak power conjugacy in groups with condition $C(4)$ - $T(4)$. *Algoritmicheskie problemy teorii grupp i polugrupp: mezhvuz. sb. nauch. trudov* [Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups: interuniversity collection of scientific papers]. Tula, Tolstoi TSPU Publ., 2001, pp. 179–185. (in Russian).
11. Bezverhni N.V. Okruchenii o i razreshimosti problemy vhozhdenija v ciklicheskuju podgrupp v gruppah s uslovijem $C(6)$ [Torsion and solvability of the general word problem for a cyclic subgroup of the group with condition $C(6)$]. Moscow, 1995. Dep. VINITI no. 2033-V95. (in Russian).
12. Bezverhni N.V., Chernisheva O.A. One-way functions based on the discrete logarithm problem in the groups meeting conditions $C(3)$ - $T(6)$. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E.*

Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 10. pp. 70–101. DOI: [10.7463/1014.0729483](https://doi.org/10.7463/1014.0729483)

13. Bogley W.A., Pride S.J. Aspherical relative presentations. *Proc. of Edinburg Math. Soc. Ser. 2*. 1992, vol. 35, no. 1, pp. 1–39. DOI: [10.1017/S0013091500005290](https://doi.org/10.1017/S0013091500005290)
14. Gersten S.M., Short H.B. Small cancellation theory and automatic groups. *Inventiones Mathematicae*, 1990, vol. 102, iss. 1, pp. 305–334. DOI: [10.1007/BF01233430](https://doi.org/10.1007/BF01233430)