

УДК 624.074.5

Способ расчета протяженных тонкостенных конструкций с неосесимметричным поперечным сечением

Сильченко П. Н.¹, Кудрявцев И. В.^{1,*},

[*kudriya@rambler.ru](mailto:kudriya@rambler.ru)

Гоцелюк О. Б.¹, Новиков Е. С.¹

¹Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Рассматривается проблема расчета на статическую и динамическую прочность протяженных конструкций с произвольной, в общем случае неосесимметричной и тонкостенной, формой поперечного сечения. Показано, что получить точное аналитическое решение в этом случае будет очень сложно и предлагается методика комбинированного численного решения, которая моделирует протяженные тонкостенные конструкции в виде стержневой системы и позволяет выделять любые локальные области с преобразованием их в твердотельную модель для получения уточненного решения с требуемой точностью. На основе разработанных методик созданы алгоритмы и программное обеспечение применительно для расчета протяженных пространственно-разветвленных тонкостенных конструкций волноводно-распределительных систем космических аппаратов.

Ключевые слова: тонкостенные элементы, неосесимметричное поперечное сечение, статика, динамика, напряженно-деформированное состояние

Введение

Протяженные тонкостенные конструкции с различной, в общем случае неосесимметричной, формой поперечного сечения имеют широкое распространение в машиностроении: это различного назначения трубопроводы (паропроводы, маслопроводы, водопроводы и др.), элементы сложных решетчатых конструкций зданий, ферм и т.д.

В инженерных расчетах на статическую и динамическую прочность подобных конструкций, как правило, используется их упрощенная модель в виде набора одномерных стержневых элементов, имеющих эквивалентные геометрические, инерциальные характеристики, нагрузки и закрепления [1,2].

Однако использование упрощающих гипотез теории стержней существенно огрубляет решение, позволяя оценить только работу всей конструкции в целом, не учитывая локальные места возможных концентраций напряжений, а также рост значений

касательных напряжений для тонкостенных элементов и соответствующую им деформацию поперечного сечения.

Недостатки такого упрощения особенно сильно проявляются при расчетах тонкостенных конструкций с неосесимметричной формой поперечного сечения открытого профиля (двутавр, швеллер и др.). В этих случаях существенную роль будет играть деформация поперечного сечения, которая нарушает гипотезу плоских сечений о неизменности формы и размеров сечения. Деформация сечения зависит от различных факторов: длины тонкостенного элемента, толщины его стенки, условий нагружения и закрепления и др., поэтому ее учет представляет математически трудноразрешимую проблему и приводит, строго говоря, к нелинейной постановке задачи [3].

Различные ученые пытались с помощью каких-либо упрощений решить эту сложную задачу. Наиболее простым решением является использование при расчетах протяженных конструкций неосесимметричного поперечного сечения теории стержней с добавлением различных поправочных коэффициентов, определенных эмпирически [4]. Но такой расчет будет весьма неточен, поскольку выбор поправочных коэффициентов осуществляется исходя из определенных размеров поперечного сечения тонкостенного стержня. При этом принимаемое значение обычно бывает неоднозначным, поскольку коэффициенты даны только для дискретного числа сочетания размеров, а выбор промежуточных значений затруднен из-за сильно нелинейной зависимости его значения от размеров.

Более корректным будет расчет по специально разработанным теориям тонкостенных стержней, наиболее известными из которых являются труды В.З.Власова [3], Ржаницына А.Р. [4], Бычкова Д.В. [5] и др. Используемые ими подходы позволяют получать решения для большинства встречаемых случаев нагружения. Однако вводимые ими допущения фактически сводят решение для пространственной оболочечной конструкции к методам строительной механики стержней.

Например, для расчета прямолинейного тонкостенного стержня прямоугольного сечения Власов В.З. предлагает [3] разбивать его на n поперечных полосок, образующих стержневую конструкцию и рассчитывать ее на основе перемещений нескольких узловых (как правило, угловых) точек сечения. Вводя функциональную зависимость между всеми полученными полосками сечений, определяется и общее напряженное состояние всего тонкостенного стержня. Получаемое решение будет более точно соответствовать реальному напряженно-деформированному состоянию (НДС) тонкостенного стержня, чем теория стержней, поскольку учтено влияние деформации сдвига на прогиб конструкции. Вместе с тем, для простоты получаемого решения автор вводит линейные зависимости для возможных перемещений узловых точек относительно друг друга.

Наиболее точной моделью для протяженного тонкостенного стержня считаем расчетную схему, составленную с использованием теории пластин и оболочек. В большинстве случаев, тонкостенные стержни имеют сложную, неосесимметричную форму поперечного сечения и содержат различного рода складки, изменения толщины

стенок в различных направлениях и т.д. В этих случаях расчет тонкостенного элемента с использованием теории оболочек представляет весьма сложную математическую задачу, поскольку складки в форме поперечного сечения приводят к разрыву функции радиуса кривизны оболочки, к которой предъявляются требования по гладкости и непрерывности [6]. В результате описать статическое и динамическое состояния тонкостенных стержней с помощью одной системы дифференциальных уравнений равновесия оболочки не удается.

Выходом из данной ситуации может являться разбиение сложной формы тонкостенного поперечного сечения на несколько подэлементов (пластинки, оболочки), для каждого из которых необходимо решить свою систему дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями. Данный способ имеет тот недостаток, что пропорционально числу подэлементов сечения необходимо решить соответствующее число подсистем дифференциальных уравнений, описывающих их поведение с одновременным выполнением «внутренних» граничных условий соединения подэлементов в единое сечение, а также «внешних» граничных условий, соответствующих закреплению и нагружению тонкостенного стержня в целом.

Условия закрепления и нагружения тонкостенного стержня в общем случае могут приводить к сложному НДС. Это требует при составлении уравнений равновесия учитывать все внутренние силовые и деформационные факторы, а также их взаимовлияние в подэлементах сечения, что приводит к нелинейной постановке задачи, аналитическое решение которой будет получить очень сложно.

Например, поведение даже одной пластинки определяется решением системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений 4-го порядка, для которых в настоящее время не существует общее аналитическое решение, на что указывал еще С. П. Тимошенко [7]. Здесь же, обсуждается возможность только одного частного случая приближенного численного решения и только лишь для одной пластинки в статической постановке и при строго определённых граничных условиях. Этой информации весьма не достаточно для решения даже узкого круга широко распространённых инженерных задач.

Ситуация ещё более усложняется при расчёте протяжённых пространственных тонкостенных конструкций с неосесимметричной формой поперечного сечения, состоящих из сопряжённых тонкостенных элементов различной размерности и геометрической сложности. Например, для сложных разветвлённых пространственных конструкций волноводно-распределительных систем (ВРС) крупногабаритных трансформируемых антенно-фидерных устройств космических аппаратов [8,9].

Таким образом, проведенный анализ показал, что в настоящее время отсутствует общее аналитическое решение для протяжённых тонкостенных конструкций с неосесимметричной формой поперечного сечения.

Решение данной задачи возможно получить, применяя различные полуаналитические и численные методы [10,11,12]. Для получисленных методов присущ ряд недостатков, основными из которых является то, что они не позволяют гарантированно и доказательно оценить сходимость и точность получаемого результата, а

также громоздкость решения, обычно имеющего вид ряда, состоящего из тригонометрических функций, либо полиномов, для эффективного применения которого требуются навыки программирования каждой отдельной рассматриваемой задачи. Так, в работе [11] предлагаются разные варианты полуаналитического решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение только одной пластинки, которые имеют громоздкий вид и не отвечают современным требованиям инженерных расчётов протяжённых тонкостенных конструкций с неосесимметричной формой поперечного сечения.

Более общими являются численные методы решения [12], на основе которых разработаны универсальные пакеты прикладных программ (ППП), например, Ansys, Nastran и др. Использование метода конечных элементов ограничивается вычислительными ресурсами применяемых ЭВМ, что не всегда позволяет построить корректную сетку из твердотельных или плоских конечных элементов, например, для протяженных пространственно-разветвленных конструкций волноводно-распределительных систем антенно-фидерных устройств космических аппаратов [13]. В таких случаях приходится использовать конечные элементы стержневого типа.

Существующие ППП в своей базе содержат целый набор различных типов конечных элементов для моделирования стержневых систем, которые отличаются различными нюансами своей работы и позволяют проводить различные виды расчетов (статическая и динамическая прочность, устойчивость и т.д.) практически для любых видов встречающихся в машиностроении конструкций.

При решении таких задач методом конечных элементов в известных ППП (Ansys, Nastran или др.), пользователь руководствуется их инструкциями пользователя для корректного выбора соответствующих настроек (метод решения, вид конечно-элементной сетки, тип и порядок конечного элемента и др.), но должен учитывать нюансы работы выбираемого типа конечного элемента. Например, в ППП Ansys балочный элемент Beam4 при оценке напряженного состояния не оценивает касательные напряжения от кручения, а специализированный «тонкостенный» КЭ Beam24 не учитывает изменение формы поперечного сечения под нагрузкой и т.д.

Для детального анализа напряженно-деформированного состояния локальных подобластей исследуемых конструкций во многих ППП (Ansys, Nastran) имеется технология Submodeling [14], суть которой состоит в выделении части конструкции с соответствующими реактивными усилиями для проведения в ней уточненного расчета. Однако на этот способ наложены ограничения по типу КЭ (только твердотельные или плоские) и геометрической области (также, только объемная или плоская модель). Это ограничивает возможности данной технологии и не позволяет, например, выделять в стержневой системе локальную область, достроенную до объемной модели для уточненного расчета с полным учетом геометрических особенностей.

В связи с этим, в инструкциях пользователя этих и других подобных ППП указывается, что при их использовании в расчетах «...the software is provided "as is",

without warranty of any kind, express or implied...» [14], что можно перевести как «...программа поставляется «как есть», без каких-либо гарантий точности получаемых результатов». Следовательно, для гарантии точности полученных численных решений их необходимо сопоставлять с аналитическими, либо экспериментальными данными.

Проведение эксперимента, как правило, не всегда возможно из-за высокой стоимости приобретения соответствующего испытательного оборудования. Строгое аналитическое решение для протяженных тонкостенных конструкций, как правило, позволяет корректно оценить статическое и динамическое состояние стержневой конструкции только в целом, без учета особенностей НДС вблизи мест различных неоднородностей (точки закреплений и нагружений, области болтовых, паяных и сварных соединений и др.).

Такая практика может приводить к ошибкам в результатах расчетов, которые проявятся только при эксплуатации исследуемой конструкции.

1 Постановка задачи

Возможности существующих видов расчета (аналитически, полуаналитический, численный) показывают, что методику расчета конструкций, состоящих из протяженных тонкостенных элементов с неосесимметричной формой поперечного сечения можно получить только на основе численных методов. Использование численного метода конечных элементов удовлетворяет всем требованиям, однако для получения корректных результатов при его использовании необходимо создавать адекватные сетки КЭ в соответствующих областях тонкостенных стержней.

Наиболее точные результаты следует ожидать от твердотельных конечных элементов, однако разбивка протяженных тонкостенных стержней этими объемными элементами приводит к их чрезмерному количеству даже при относительно небольших размерах конструкций. Использование же плоских КЭ не всегда обеспечивает требуемую точность, особенно при исследовании локальных областей конструкции, где обычно требуется учесть объемное НДС.

Для решения изложенной проблемы и получения практического решения с требуемой точностью, необходимо разработать такую методику расчета, которая бы позволяла рассчитывать протяженные тонкостенные конструкции в целом как стержневые системы, с возможностью получения уточненных решений для ее отдельных локальных областей, выделенных в виде объемных моделей. Разрабатываемая методика должна учитывать особенности статического и динамического состояния протяженных тонкостенных стержней при любых силовых и деформационных нагрузках.

2 Решение задачи

Для выхода из данной ситуации и получения решения с требуемой точностью разработана методика, согласно которой любая протяженная конструкция в глобальной

постановке моделируется пространственной стержневой системой с эквивалентными условиями нагружения и закрепления (рис. 1). Возможные промежуточные элементы (соединительные муфты, фланцы) на данном этапе считаются отсутствующими и будут учтены на следующем этапе уточнённого решения.

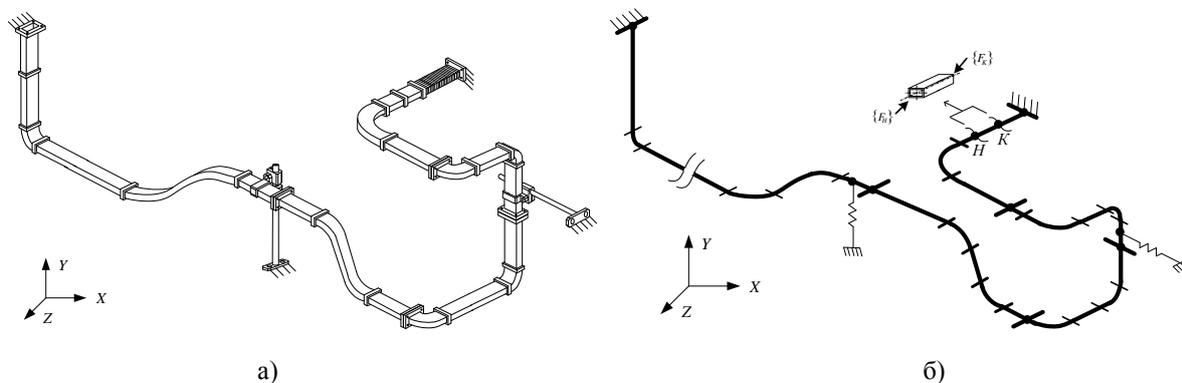


Рис. 1. Расчет стержневая модель протяженной конструкции а – исходная конструкция; б – стержневая модель

Использование на данном этапе расчета для протяженной конструкции стержневой модели позволяет многократно снизить размерность задачи для ППП и рассчитывать стержневые системы практически любой геометрической сложности и конфигурации, разбивая их на требуемое число конечных элементов.

Для расчета стержневой системы в целом с приемлемой для практики точностью можно использовать метод конечных элементов на основе «классических» балочных конечных элементах. Система дифференциальных уравнений динамического состояния протяженной стержневой конструкции в этом случае примет известный вид [15,16]:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где $\{X\}$, $\{\dot{X}\}$, $\{\ddot{X}\}$, – вектора перемещений, скоростей и ускорений всех узлов конечно-элементных стержней в пространстве;

$[M]$, $[C]$, $[K]$ – глобальные матрицы масс, демпфирования и жесткости всей стержневой конструкции соответственно;

$\{F(t)\}$ – вектор переменных внешних нагрузок, в общем случае переменных во времени t .

Положение каждого узла стержневого конечного элемента определяется вектором $\{X\}$ его линейных и угловых перемещений относительно осей XYZ глобальной системы координат, который имеет вид:

$$\{X\} = \{u_x \quad u_y \quad u_z \quad \alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z\}^T. \quad (2)$$

Локальная матрица жесткости $[k]$ стержневого конечного элемента имеет размерность 12x12 и структурно состоит из четырех одинаковых блоков $[k_{ij}]$ размером 6x6:

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{21}] \\ [k_{12}] & [k_{22}] \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Каждый из блоков $[k_{ij}]$ определяет поведение стержня на основе теории стержней Тимошенко С.П. с учетом сдвиговых деформаций и имеет следующий вид [16]:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{l^3(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2(1+\Phi_y)} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{-6EJ_z}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_\rho}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EJ_z}{l^2(1+\Phi_z)} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)EJ_y}{l(1+\Phi_z)} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{l^2(1+\Phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)EJ_z}{l(1+\Phi_y)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня;

E, G – модуль Юнга и модуль сдвига материала стержня соответственно;

l – длина стержня;

J_y и J_z – моменты инерции поперечного сечения стержня относительно осей y и z ;

J_ρ – полярный момент инерции поперечного сечения стержня;

$\Phi_y = \frac{12EJ_z}{GA_{S_y}l^2}$ и $\Phi_z = \frac{12EJ_y}{GA_{S_z}l^2}$ – параметры сдвиговой деформации, в которой A_{S_y} и A_{S_z}

- эффективная площадь поперечного сечения стержня при деформации сдвига в направлениях y и z соответственно.

В качестве локальной матрицы масс отдельного стержневого конечного элемента $[m]$ размерностью 12x12, принята совместная матрица масс, которая учитывает взаимовлияние поперечных и крутильных форм колебаний [17]. Структурно, в матрице масс также можно выделить четыре блока $[m_{ij}]$ размерностью 6x6:

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_{11}] & [m_{21}] \\ [m_{12}] & [m_{22}] \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Где

$$[m_{11}] = [m_{22}] = \frac{\rho Al}{(1 + \Phi_y)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 & 0 & 0 & C_z \\ 0 & 0 & A_z & 0 & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\rho}{3A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_y & 0 & E_y & 0 \\ 0 & C_z & 0 & 0 & 0 & E_z \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[m_{12}] = [m_{21}] = \frac{\rho Al}{(1 + \Phi_z)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 & 0 & 0 & C_z \\ 0 & 0 & B_z & 0 & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_\rho}{6A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_y & 0 & F_y & 0 \\ 0 & -D_z & 0 & 0 & 0 & F_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Здесь ρ - плотность материала стержня;

$$A_y = \frac{13}{35} + \frac{7\Phi_y}{10} + \frac{\Phi_y^2}{3}, \quad B_y = -\left(\frac{9}{70} + \frac{3\Phi_y}{10} + \frac{\Phi_y^2}{6}\right), \quad C_y = \left(\frac{11}{210} + \frac{11\Phi_y}{120} + \frac{\Phi_y^2}{24}\right),$$

$$D_y = \frac{13}{420} + \frac{3\Phi_y}{40} + \frac{\Phi_y^2}{24}, \quad E_y = \frac{1}{105} + \frac{\Phi_y}{60} + \frac{\Phi_y^2}{120}, \quad F_y = \frac{1}{140} + \frac{\Phi_y}{60} + \frac{\Phi_y^2}{120}$$

($y \leftrightarrow z$).

Глобальные матрицы жесткости $[K]$ и матрица масс $[M]$ для всей стержневой конструкции строится путем суммированием локальных матриц жесткости и масс по отдельным стержневым конечным элементам с учетом их ориентации в глобальной системе координат. Ориентация стержневого конечного элемента определяется через направляющие косинусы его продольной оси к осям глобальной системы координат XYZ стержневой системы и в результате формируется матрицу перехода $[A]$ для компонентов усилий и перемещений из локальной системы координат (СК) элемента в глобальную СК всей исследуемой конструкции.

Структурно, матрица перехода состоит из четырех одинаковых блоков $[a]$ размерностью 3×3 каждый на главной диагонали:

$$[A] = \begin{bmatrix} [a] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a] \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 & \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ -\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 & \sin\alpha_3 \cos\alpha_2 \\ -\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 & -\cos\alpha_1 \sin\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 & \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 \end{bmatrix}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - углы, определяющие положение продольной оси стержневого КЭ в глобальной системе координат XYZ.

Перевод локальных матриц жесткости (3) и масс (5), а также вектора внешних локальных нагрузок с использованием матрицы перехода (8) выполняется на основе следующих матричных преобразований:

$$[K] = [A]^T [k][A], [M] = [A]^T [m][A], \{F\} = [A]^T \{f\}. \quad (9)$$

Матрица демпфирования $[C]$ моделирует диссипацию энергии в стержневой системе, которая приводит к затуханию колебаний. Точное моделирование рассеивания энергии имеет весьма сложную нелинейную формулировку и может быть функцией от перемещения, скорости, напряжений, температуры и других факторов. На практике, применяют различные типы упрощенных линейных моделей демпфирования, обеспечивающих необходимую аппроксимацию. Наиболее удобной с точки зрения компьютерных вычислений и распространенной формой демпфирования является демпфирование Рэлея, задаваемое уравнением [18]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (10)$$

В уравнении (10) коэффициент α определяет долю участия инерционного, а коэффициент β - долю конструкционного демпфирования и оба задаются пользователем.

Уравнение (1) позволяет выполнять статический и квазистатический анализы, модальный анализ и анализ вынужденных колебаний. Решение уравнения (1) для каждого из вышеперечисленных видов анализа выполняется различными методами.

В статическом и квазистатическом анализах уравнение (1) упрощается до системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая имеет следующий вид:

$$[K]\{X\} = \{F\}. \quad (11)$$

Решение системы (11) выполняется с использованием метода Холецкого [19,20], который является модификацией метода Гаусса и использует LU-разложение глобальной матрицы жесткости $[K]$. На первом шаге метода, разложим матрицу $[K]$ на произведение нижней треугольной матрицы $[L]$, диагональной матрицы $[D]$ и верхней треугольной матрицы $[L]^T$ в виде:

$$[K] = [L][D][L]^T. \quad (12)$$

Тогда СЛАУ (11) примет вид:

$$[L][D][L]^T \{X\} = \{F\} \quad (13)$$

На втором шаге метода представим систему (13) в виде

$$[L]\{w\} = \{F\}, \quad (14)$$

где

$$\{w\} = [D][L]^T \{X\}. \quad (15)$$

Решение системы (14) с учетом треугольного вида матрицы $[L]$ выполняется прямой подстановкой и представляет собой тривиальную задачу.

После решения СЛАУ (14), находим искомым вектор перемещений $\{X\}$ из выражения (15) с помощью обратной подстановки:

$$\{X\} = \{w\} \left([D][L]^T \right)^{-1}. \quad (16)$$

Зная вектор перемещений узлов КЭ, по выражению (11) находим действующие в них силовые факторы (усилия и моменты) в глобальной системе координат.

Напряжения в стержневой системе рассчитываются по узлам ее конечно-элементной сетки на основе действующих силовых факторов согласно известным соотношениям механики стержней [1,2]. Опасное сечение в исследуемой конструкции определяется на основе максимальной величины эквивалентного напряжения, которое рассчитывается на основе 3-й гипотезы прочности для стержневых систем.

В модальном анализе исследуется поведение стержневой конструкции при её свободных колебаниях, следовательно, в уравнении (1) вектор внешних нагрузок $\{F\}$ будет нулевым. Степень влияния демпфирования на свободные колебания конструкции незначительна (менее 1-2%) [18,20], поэтому в модальном анализе матрицу демпфирования $[C]$ также примем равной нулю. В результате, задача модального анализа стержневой конструкции сводится к решению уравнения (1) в упрощенном виде:

$$[M] \left\{ \ddot{X} \right\} + [K] \{X\} = 0. \quad (17)$$

Основным видом свободных колебаний стержневой конструкции являются гармонические колебания, которые при модальном анализе можно представить в виде:

$$\{X\} = x_i \cdot \sin(\omega_i t). \quad (18)$$

где x_i – амплитуда колебаний рассматриваемой точки конструкции;

ω_i – собственная круговая частота свободных колебаний;

Подставляя (18) в уравнение (17), получим выражение:

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \{X\}_i = 0. \quad (19)$$

Отбрасывая тривиальное решение $\{X\}_i = 0$, приходим к необходимости решения следующего уравнения:

$$-\omega_i^2 [M] + [K] = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (20) является известной математической задачей на собственные значения, где квадраты круговых частот ω_i^2 и определяют собственные колебания, а вектора $\{X\}_i$, соответствующие собственным значениям ω_i^2 представляют собой собственные вектора и определяют форму колебаний исследуемой стержневой конструкции.

Решение системы (20) выполняется в разработанной программе методом половинного деления в сочетании с методом обратных итераций [19].

Полученные после решения вектора собственных колебаний $\{X\}_i$ не являются однозначно определенными (уникальными), поскольку при их расчете не учитывались начальные условия колебаний и, следовательно, они не определены с точностью до множителя.

Для исключения этой неопределенности, в модальном анализе используются различные типы нормирования всех полученных векторов собственных колебаний. Наиболее распространенным является нормирование векторов собственных колебаний по отношению к матрице масс из условия [20]:

$$\{X\}_i^T [M] \{X\}_i = [I]. \quad (21)$$

Анализ вынужденных колебаний выполняется на основе полного учета всех компонентов уравнения (1). Примем, что все внешние переменные во времени силовые воздействия на конструкцию будут изменяться по гармоническому закону:

$$\{F(t)\} = \{F_0\} \cdot \sin(\omega t). \quad (22)$$

При таком нагружении происходят установившиеся гармонические колебания и все точки конструкции двигаются с одной и той же частотой, но со сдвигами по фазе. Причиной этих сдвигов по фазе является наличие диссипации энергии в отдельных элементах стержневой конструкции, которое учитывается матрицей демпфирования [С].

Для решения задачи вынужденных колебаний в уравнении (1) используем комплексный метод [16,19], для этого вектор перемещений КЭ-узлов $\{X\}$ представим в виде:

$$\{X\} = \{X_{max} e^{i\varphi}\} \cdot e^{i\omega t}, \quad (23)$$

где X_{max} – амплитуда перемещений;

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;

ω – круговая собственная частота;

t – время;

φ – сдвиг фаз для перемещений.

С учетом обозначений комплексных вычислений, уравнение (23) будет иметь вид:

$$\{X\} = \{X_{max} (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\} \cdot e^{i\omega t} \quad (24)$$

Или

$$\{X\} = (\{X_1\} + i\{X_2\}) \cdot e^{i\omega t}, \quad (25)$$

где $\{X_1\} = \{X_{max} \cos\varphi\}$ – действительная, а $\{X_2\} = \{X_{max} \sin\varphi\}$ – мнимая часть вектора перемещений.

Вектор сил $\{F(t)\}$ определяется аналогично вектору перемещений:

$$\{F(t)\} = \{F_{max} e^{i\psi}\} \cdot e^{i\omega t} = \{F_{max} (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)\} \cdot e^{i\omega t} = (\{F_1\} + i\{F_2\}) \cdot e^{i\omega t} \quad (26)$$

где F_{max} – амплитуда сил, ψ – сдвиг фаз для сил (в радианах),

$\{F_1\} = \{F_{max} \cos \psi\}$ – действительная часть вектора сил,

$\{F_2\} = \{F_{max} \sin \psi\}$ – мнимая часть вектора сил.

Подставляя (23) и (26) в (1), получим:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])(\{X_1\} + i\{X_2\}) \cdot e^{i\omega t} = (\{F_1\} + i\{F_2\}) \cdot e^{i\omega t}. \quad (27)$$

Так как зависимость от времени ($e^{i\omega t}$) одинакова для обеих частей уравнения, то на нее можно сократить и уравнение (27) примет вид:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]) \cdot (\{X_1\} + i\{X_2\}) = \{F_1\} + i\{F_2\}. \quad (28)$$

Уравнение (28) можно представить в виде комплексной СЛАУ:

$$[K_C]\{X_C\} = \{F_C\}, \quad (29)$$

где $[K_C] = -\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]$ – комплексная жесткость;

$\{X_C\} = \{X_1\} + i\{X_2\}$ – комплексный вектор перемещений;

$\{F_C\} = \{F_1\} + i\{F_2\}$ – комплексный вектор внешних сил.

Для решения комплексной СЛАУ (29) использовался тот же метод, что и для решения вещественной СЛАУ (11), но с учетом правил комплексной арифметики.

В результате решения комплексной СЛАУ (29) для диапазона рассматриваемых частот ω получаем вектор комплексных перемещений $\{X_C\}$, на основе компонентов которого $\{X_1\}$ и $\{X_2\}$, согласно выражению (25), определяем вектор полных перемещений $\{X\}$.

Зная вектор перемещений $\{X\}$, можно рассчитать силовые факторы, действующие в узлах КЭ-модели стержневой системы и соответствующие им напряжения.

Для выполнения всех рассмотренных выше видов расчета создано программное обеспечение [21-26], позволяющее рассчитывать стержневые системы. На рис. 2 приведены примеры результатов выполнения статического и динамического анализа стержневой модели в созданной программе.

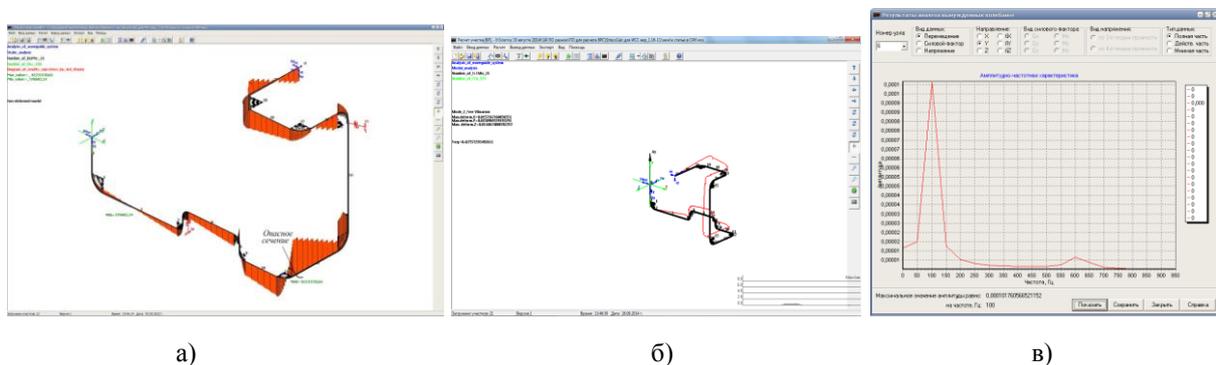


Рис. 2. Примеры результатов расчета статического и динамического состояния стержневой модели а - статический анализ; б - модальный анализ; в - вынужденные колебания

Результаты расчета статического и динамического состояния исследуемой протяженной тонкостенной конструкции, выполненные по механике стержней в разработанной программе, не учитывают возможную деформацию сечения и справедливы только для длинных тонких стержней при выполнении следующего известного отношения [1-5]:

$$l/h_{MAX} > 10...12, \quad (30)$$

где l - длина тонкостенного стержня;

h_{MAX} - характерный размер поперечного сечения стержня.

Если же размеры тонкостенного стержня не соответствуют условию (30), либо требуется определить локальное НДС с учетом действительной тонкостенной геометрии поперечного сечения стержня, то разработанная методика на втором этапе расчета позволяет выделять в нем локальный участок заданной протяженности для проведения уточненного анализа. Для этого интересующий участок с опасным сечением транслируется в виде твердотельной модели в ППП Ansys (Nastran и др.) с соответствующими граничными условиями в виде векторов усилий и перемещений, полученными на первом этапе расчёта стержневой конструкции (рис.1,б).

При выделении локального участка его границы задаются либо по узлам КЭ-сетки, либо на заданных расстояниях от характерных точек, определяющих геометрию стержневой системы. В первом случае граничные условия будут известны непосредственно из решения, во втором случае они будут рассчитываться согласно линейной интерполяции значений силовых факторов между близлежащими узлами.

В случае незначительной протяженности исследуемой стержневой конструкции, возможно полное преобразование исходной конструкции в объемную модель. Здесь основное ограничение накладывают только ресурсы применяемой ЭВМ, которые должны обеспечить требуемый тип, размеры и количество конечных элементов.

Для трансляции выделенного локального участка, предварительно в программе задается действительная геометрия поперечного сечения и положение его центра масс, относительно которого будет размещаться ось стержня и к которой приводятся граничные силовые и деформационные условия. Объемная модель строится путем экструзии заданной формы поперечного сечения вдоль оси стержня.

Граничные условия по краям выделенного участка преобразуются со стержневой модели в эквивалентные нагрузки твердотельной объемной модели. Для этого сосредоточенные силовые факторы по краям выделенного локального участка стержневой модели преобразуются в эквивалентное распределение нормальных и касательных сил в поперечном сечении твердотельной модели по следующему алгоритму: полная площадь поперечного сечения S твердотельной модели разделяется на ряд малых площадок s_i , для каждой из которых рассчитывается соответствующее ей нормальное F_n и тангенциальное F_τ усилие согласно зависимостям:

$$F_n = \int_{s_i} \sigma_i ds_i ; F_\tau = \int_{s_i} \tau_i ds_i , \quad (31)$$

где σ_i , τ_i - соответственно, нормальное и касательное напряжения, действующие на площадку s_i .

Значения σ_i и τ_i на малых площадках берутся равными средним напряжениям на соответствующих площадках поперечного сечения стержневой конструкции. Рассчитанные усилия (31) прикладываются в геометрическом центре соответствующих им площадок.

Примеры такого преобразования в ППП Ansys применительно к простым случаям нагружения для тонкостенных стержней прямоугольного поперечного сечения показаны на рисунке 3.

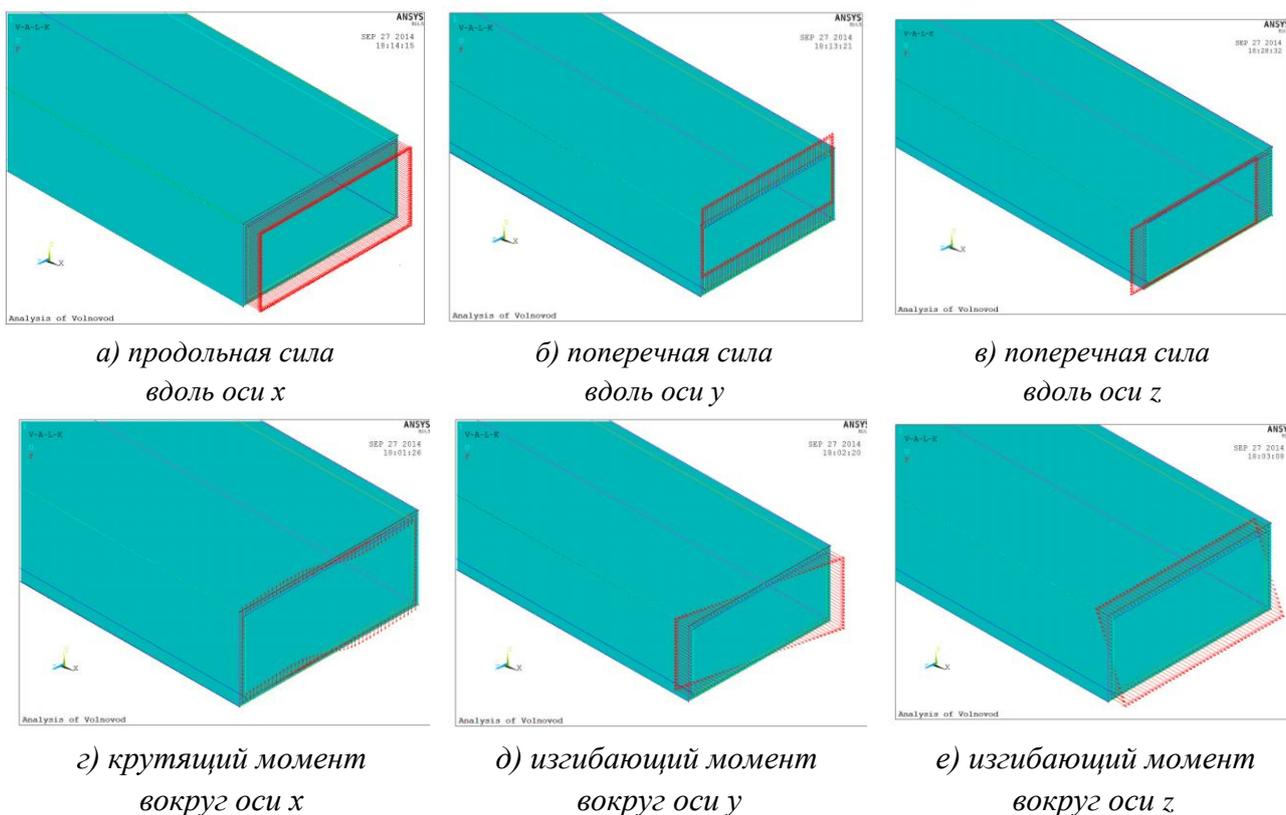


Рис. 3. Примеры трансляции простых случаев нагружения на твердотельной модели в ППП Ansys

В случае сложного нагружения закон распределения нормальных и касательных сил в поперечном сечении будет получен на основе принципа суперпозиции.

Число малых площадок, на которые разбивается сосредоточенная «стержневая» нагрузка, задается расчетчиком и может варьироваться в широком диапазоне. Практика применения разработанной методики показывает, что количество площадок и соответствующих им распределенных сил в поперечном сечении должно быть равно количеству узлов КЭ-сетки, лежащих в плоскости поперечного сечения. Для тонкостенных форм поперечных сечений распределенные силы целесообразно прикладывать к их срединной поверхности, а для снижения местных эффектов

необходимо дополнительно измельчать сетку КЭ в местах их приложения с одновременным увеличением количества площадок.

3 Полученные результаты

Результаты расчетов НДС для простых случаев нагружения твердотельной модели в Ansys показаны на рис.4. Можно отметить незначительность краевого эффекта - уже на расстоянии одного характерного размера поперечного сечения достигается равномерное поле НДС.

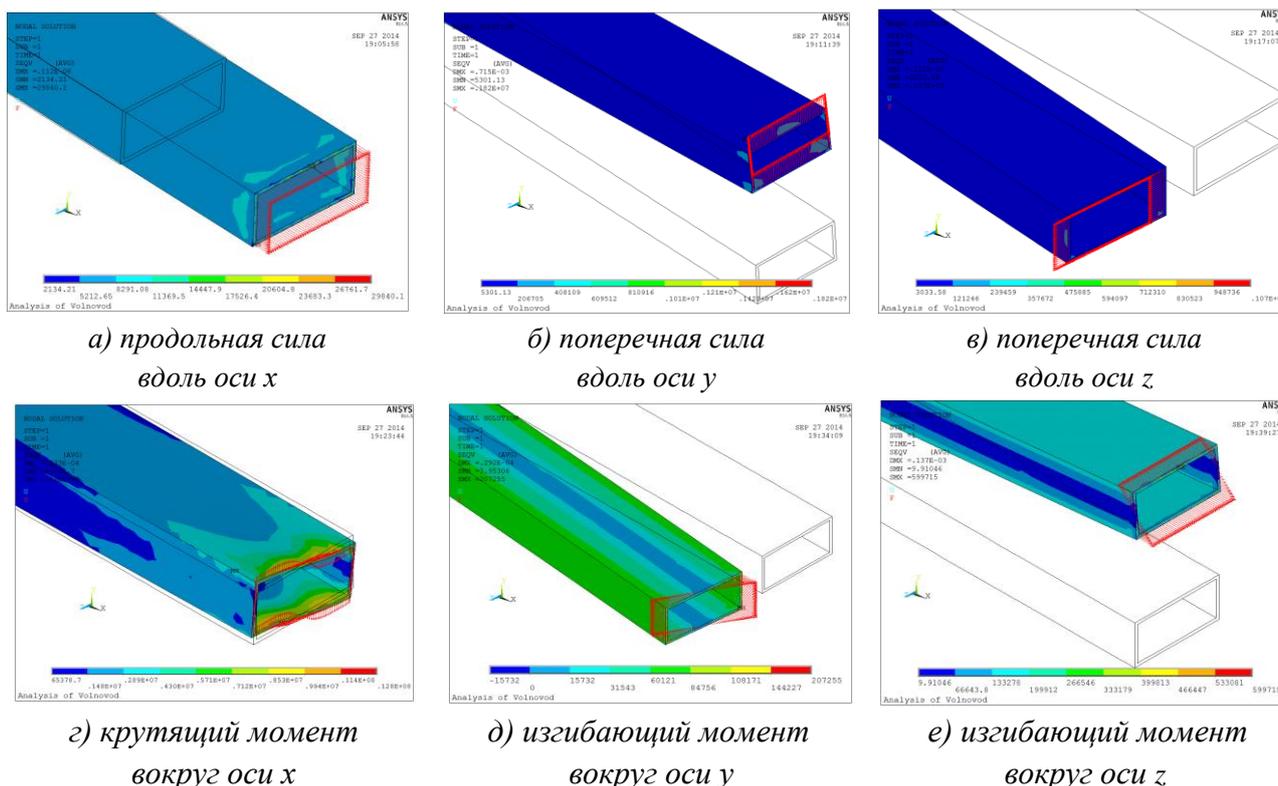


Рис. 4. Результаты расчетов для простых случаев нагружения твердотельной модели в Ansys

Пример использования разработанной методики показан на рис.5, где изображен выделенный локальный участок, состоящий из двух прямых тонкостенных элементов и соединительной муфты между ними.

Малые размеры выделенного участка позволили разбить конструкцию на требуемое число конечных элементов для получения необходимых результатов расчета с учетом взаимодействия тонкостенных элементов и паяного шва.

Для оценки корректности разработанной методики с существующими ППП были проведены сравнительные расчеты в Ansys 14.5 для протяженной конструкции, показанной на рис.1, которая имеет тонкостенное поперечное сечение прямоугольной формы. Проводились квазистатический анализ на действие ускорения величиной 20g

вдоль оси Y, а также модальный анализ с определением собственных частот и форм колебаний.

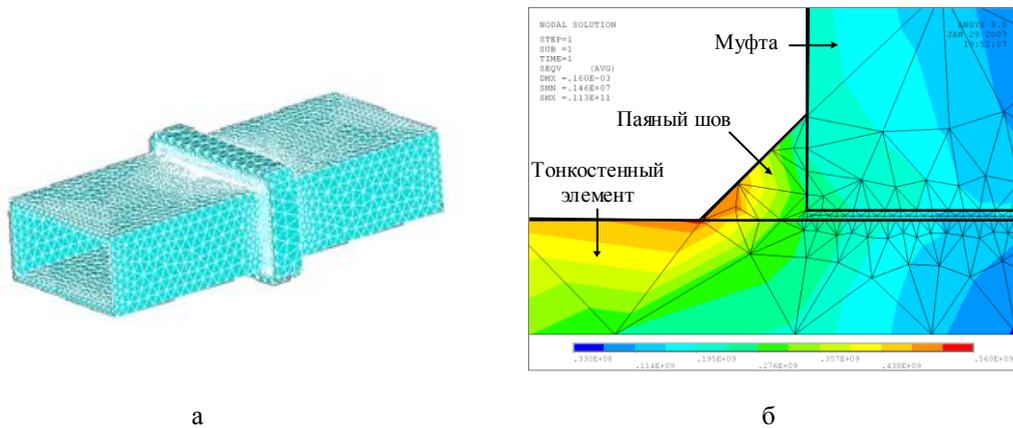


Рис. 5. Выделенный локальный участок конструкции и результаты его расчета а – КЭ-модель локального участка; б – результаты расчета локального участка

Для удобства, графические результаты проведенных сравнительных расчетов показаны на рис.6, а численные значения сведены в таблицу 1.

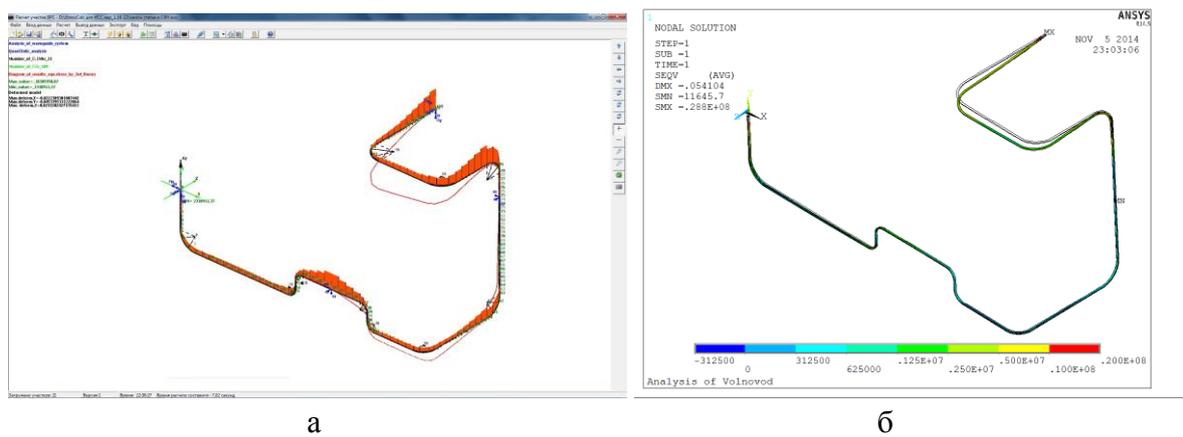


Рис. 5. Пример графических результатов сравнительных расчетов а - результаты расчета в разработанном ПО; б - результаты расчета в ППП Ansys

Таблица 1 – Сравнение результатов расчета

| Условия расчета | | Квазистатический анализ | | | Модальный анализ | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------------|---------------------|----------------------|------------------|------------|------------|------------|
| Тип программы | Кол-во и тип КЭ | Время расчета | Макс.перемещения, м | Макс.напряжения, МПа | Время расчета | f_1 , Гц | f_2 , Гц | f_3 , Гц |
| ППП Ansys | 1 208 КЭ Shell181 | 5,693 с | 0,0541 | 28,8 | 7,746 с | 412 | 743 | 1 206 |
| | 32 171 КЭ Solid98 | 2 мин.03 с | 0,0531 | 27,5 | 3 мин. 11 с | 428 | 724 | 1 188 |
| Созданное ПО | 217 | 4,734 с | 0,0453 | 18,3 | 6,832 с | 435 | 761 | 1 302 |

Сравнение результатов (табл. 1) показывает, что расчетные значения имеют хорошую общую сходимость, порядка 15-35%.

Время расчета КЭ-модели, состоящей из оболочечных элементов в ППП Ansys существенно зависит от количества конечных элементов и в первом варианте лишь немногим больше, чем для стержневой модели в разработанном ПО. Это, на наш взгляд, объясняется использованием в ППП Ansys более производительных решателей совместно с технологиями параллельного программирования. Использование же более мелкой КЭ-сетки, а тем более твердотельных КЭ существенно замедляет процесс решения в ППП Ansys при практически одинаковых получаемых результатах расчета. Для уточненного расчета в разработанном ПО можно в объемной постановке выделять только отдельные локальные малоразмерные области и разбивать их на требуемую КЭ-сетку из меньшего числа твердотельных конечных элементов, поскольку не требуется разбиение на твердотельные КЭ всей исследуемой конструкции. Это значительно снижает время моделирования и расчета.

Все процедуры, необходимые для задания геометрии, свойств материала, условий закрепления и нагружения, расчета стержневой конструкции, а также выделения локального участка и его трансляция в виде твердотельной модели в ППП Ansys (Nastran и др.) с соответствующими граничными условиями автоматизированы и оформлены в виде законченного программного продукта [21-26] для расчета протяженных, пространственно-разветвленных тонкостенных конструкций волноводно-распределительных систем космических аппаратов связи. В программе для модуля трансляции выделенного локального участка используется внутренний язык программирования конкретного ППП. Например, для передачи выделенного участка в ППП ANSYS разработанное программное обеспечение использует внутренний язык программирования APDL этого пакета [14].

Созданное программное обеспечение позволяет конструктору-проектировщику оперативно оценивать НДС протяженных стержневых конструкций и вносить в нее различные изменения (установка дополнительных опор, изменение геометрических размеров и др.) для достижения и обеспечения условий прочности и жесткости исследуемой конструкции в целом и локальных областях в частности.

Заключение

Разработана методика расчета статического и динамического состояния протяженных тонкостенных конструкций, которая позволяет оценивать их напряженно-деформированное состояние в целом как стержневых систем и выделять локальные области в виде объемных моделей для уточненного анализа с требуемой точностью.

Предложенный подход является универсальным по отношению к форме поперечного сечения исследуемой конструкции и позволяет помимо тонкостенных форм сечений рассчитывать стержни толстостенного профиля, а также сплошного поперечного сечения любых форм.

Предложенный метод расчета реализован в программном обеспечении, позволяющем выявлять и оценивать на этапах проектирования опасные области создаваемой конструкции на действие статических и динамических нагрузок.

Некоторым недостатком метода является необходимость доработки модуля трансляции локального участка стержневой конструкции в твердотельную модель для каждой новой формы поперечного сечения. Вместе с тем, созданные модули трансляции [25,26] позволяют выполнять расчеты с наиболее часто встречающимися формами поперечного сечения: круглое, прямоугольное (сплошное и тонкостенное) и др.

Созданные методики расчета и сопровождающее программное обеспечение используются в ОАО «Информационные спутниковые системы имени академика М.Ф. Решетнёва» при проектировании протяженных тонкостенных конструкций волноводно-распределительных систем космических аппаратов серии «Экспресс», «ГЛОНАСС», «Луч-5А». Результаты расчетов позволили обосновать конструктивное исполнение ВРС и технологию их сборки пайкой: в частности, разработанные методики позволили уменьшить толщину стенки элементов ВРС с 1,2 мм до 0,6 мм с обеспечением условий прочности и жесткости при снижении массы на 20-30%.

Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ (грант №12-08-31058) и гранта Президента РФ № МК-257.2013.8

Список литературы

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. СПб.: Лань, 2005. 656 с.
2. Агамиров Л.В. Сопротивление материалов. М.: Астрель, 2003. 256 с.
3. Власов В.З. Избранные труды. Т. 2. Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1963. 507 с.
4. Ржаницын А.Р. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.
5. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 387 с.
6. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. 380 с.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: пер. с англ. 3-е изд. М.: Либроком, 2009. 640 с.
8. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М. Система дифференциальных уравнений для элемента волноводного тракта космических аппаратов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2-7 июля 2010 г.): тез. докл. Суздаль, 2010. С. 172-174.
9. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В. О проблеме решения системы дифференциальных уравнений динамического состояния волноводов при запуске КА связи //

- Международная научная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики” (Новосибирск, 5-12 августа 2012 г.): тез. докл. Новосибирск, 2012. С. 327-328.
10. Полянин А. Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
 11. Сухотерин М.В. Метод суперпозиции исправляющих функций в задачах теории пластин. СПб.: Изд-во СПбПУ, 2009. 265 с.
 12. Галанин М.П. Методы численного анализа математических моделей. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 591 с.
 13. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнёв М.М. Обеспечение прочности и точности крупногабаритных волноводно-распределительных систем КА связи // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 1. С. 112-117.
 14. ANSYS 14.5 Help, 2011.
 15. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. New York: McGraw-Hill, 1993. 752 p.
 16. Przemieniecki J.S. Theory of Matrix Structural Analysis. New York: Dover Publications, 2010. 480 p.
 17. Yokoyama T. Vibrations of a hanging Timoshenko beam under gravity // Journal of Sound and Vibration. 1990. Vol. 141, no. 2. P. 245-258. DOI: [10.1016/0022-460X\(90\)90838-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90838-Q)
 18. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 448 с.
 19. Тестоедов Н.А., Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М., Халиманович В.И., Наговицин Н.В., Гоцелюк О.Б., Барыкин Е.С. Статический анализ прочностных параметров складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов с замкнутым поперечным сечением: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661200 РФ. 2012.
 20. Тестоедов Н.А., Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М., Халиманович В.И., Наговицин В.Н., Синьковский Ф.К. Квазистатический анализ складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661201 РФ. 2012.
 21. Тестоедов Н.А., Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М., Халиманович В.И., Наговицин В.Н. Модальный анализ складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов с замкнутым поперечным сечением: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661204 РФ. 2012.
 22. Тестоедов Н.А., Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М., Халиманович В.И., Наговицин В.Н., Гоцелюк О.Б. Анализ вынужденных колебаний складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов с замкнутым поперечным сечением: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661199 РФ. 2012.

23. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М., Наговицин В.Н., Гоцелюк О.Б. Модуль экспорта локального участка стержневой модели складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов с замкнутым поперечным сечением в твердотельную модель Nastran: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661197 РФ. 2012.
24. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнев М.М., Наговицин В.Н., Гоцелюк О.Б. Модуль экспорта локальной области складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов с замкнутым поперечным сечением из стержневой модели в твердотельную модель Ansys: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661198 РФ. 2012.

Method of Analysis of Extended Thin-Walled Constructions with not Axisymmetric Cross Section

P.N. Silchenko¹, I.V. Kudryavtsev^{1,*},
O.B. Gotseluk¹, E.S. Novikov¹

*kudniya@rambler.ru

¹Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Keywords: thin-walled elements, not axisymmetric cross section, statics, dynamics, mode of deformation

Extended thin-walled constructions with various form of cross section have a wide circulation in mechanical engineering. These are pipelines of different function, elements of difficult trellised designs of buildings, farms, etc.

For calculations of similar designs their simplified model as a set of one-dimensional beam elements is, as a rule, used. However, use of the simplifying hypotheses of the theory of beams allows estimating only a work of the entire design, in general, disregarding the local places of possible concentration of stress, as well as the growth of values of tangent stress for the thin-walled elements and warping of cross section corresponding to them. Shortcomings of such simplification are especially strongly shown in calculations of thin-walled designs with not axisymmetric form of cross section of an open profile.

The two-stage calculation procedure is developed to solve the stated problem. It allows analysis of extended thin-walled designs, in general, with a possibility to find the specified solutions for separate local areas.

At the first stage the extended construction in global statement is modelled by spatial beam system with equivalent conditions of loading and fixing which is calculated by the known methods of mechanics of beams.

At the second stage, in beam model the local site is allocated which is transformed into solid-state model and broadcasted in processing program Ansys (Nastran, etc.) with the corresponding boundary conditions as vectors of forces and displacements obtained at the stage of beams analysis. For a broadcast of the allocated local site, in the program is preliminary specified a valid geometry of the cross section and a position of its center of masses with respect to which will be placed the longitudinal axis of a beam to which boundary conditions are given. Boundary conditions at the edges of the allocated site will be transformed from the beam model to the equivalent loadings of solid-state volume model.

The developed methods for calculating a beam design, and also for allocating a local site and its broadcasting as a solid-state model in processing program Ansys (Nastran, etc.) with the corresponding boundary conditions are computerized (automated) and offered as a completed software product.

References

1. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. *Stroitel'naia mekhanika* [Structural mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2005. 656 p. (in Russian).
2. Agamirov L.V. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Astrel' Publ., 2003. 256 p. (in Russian).
3. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. T. 2. Tonkostennye uprugie sterzhni. Printsipy postroeniia obshchei tekhnicheskoi teorii obolochek* [Selected Works. Vol. 2. Thin-walled elastic rods. Principles of construction of general technical theory of shells]. Moscow, AS of USSR Publ., 1963. 507 p. (in Russian).
4. Rzhantsyn A.R. *Stroitel'naia mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1982. 400 p. (in Russian).
5. Bychkov D.V. *Stroitel'naia mekhanika sterzhnevykh tonkostennykh konstruktsii* [Structural mechanics of rod thin-walled structures]. Moscow, Gosstroizdat Publ., 1962. 387 p. (in Russian).
6. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I. *Lineinaia teoriia tonkikh obolochek* [Linear theory of thin shells]. St. Petersburg, SPbSU Publ., 2010. 380 p. (in Russian).
7. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959. (Russ. ed.: Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i oblochki*. Moscow, Librokom Publ., 2009. 640 p.).
8. Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M. System of differential equations for the element of waveguide path of spacecraft. *Mezhdunarodnaia konferentsiia po differentsial'nym uravneniiam i dinamicheskim sistemam: tez. dokl.* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems: abstracts], Suzdal', 2-7 July, 2010, pp. 172-174. (in Russian).
9. Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V. On the problem of solving a system of differential equations of the dynamic state of the waveguides at startup of communication spacecraft. *Mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia "Obratnye i nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki": tez. dokl.* [International Scientific Conference "Inverse and ill-posed

- problems of mathematical physics”: abstracts], Novosibirsk, 5-12 August, 2012, pp. 327-328. (in Russian).
10. Polianin A. D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniia nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 256 p. (in Russian).
 11. Sukhoterin M.V. *Metod superpozitsii ispravliaiushchikh funktsii v zadachakh teorii plastin* [Superposition method correcting functions in the theory of plates]. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2009. 265 p. (in Russian).
 12. Galanin M.P. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modelei* [Methods for numerical analysis of mathematical models]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2012. 591 p. (in Russian).
 13. Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M. Ensuring the strength and accuracy of large-size waveguide distribution systems of communication satellites. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2012, no. 1, pp. 112-117. (English translation: *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2012, vol. 41, iss. 1, pp. 91-95. DOI: [10.3103/S1052618811060173](https://doi.org/10.3103/S1052618811060173)).
 14. ANSYS 14.5 Help, 2011.
 15. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of Structures*. New York, McGraw-Hill, 1993. 752 p.
 16. Przemieniecki J.S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York, Dover Publications, 2010. 480 p.
 17. Yokoyama T. Vibrations of a hanging Timoshenko beam under gravity. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, vol. 141, no. 2, pp. 245-258. DOI: [10.1016/0022-460X\(90\)90838-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90838-Q)
 18. Nashif A.D., Jones D.I.G., Henderson J.P. *Vibration Damping*. New York, John Wiley and Sons, 1985. (Russ. ed.: Nashif A.D., Jones D.I.G., Henderson J.P. *Dempfirovanie kolebanii*. Moscow, Mir Publ., 1988. 448 p.).
 19. Testoedov N.A., Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M., Khalimanovich V.I., Nagovitsin N.V., Gotseliuk O.B., Barykin E.S. *Sticheski analiz prochnostnykh parametrov skladchatykh tonkostennykh obolochechnykh konstruksii volnovodov s zamknutym poperechnym secheniem* [Static analysis of strength properties of folded thin-walled shell structures of waveguides with a closed cross-section]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012661200 RF, 2012. (in Russian).
 20. Testoedov N.A., Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M., Khalimanovich V.I., Nagovitsin V.N., Sin'kovskii F.K. *Kvazisticheski analiz skladchatykh tonkostennykh obolochechnykh konstruksii volnovodov* [Quasi-static analysis of folded thin-walled shell

- structures of waveguides]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012661201 RF, 2012. (in Russian).
21. Testoedov N.A., Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M., Khalimanovich V.I., Nagovitsin V.N. *Modal'nyi analiz skladchatykh tonkostennykh obolochechnykh konstruksii volnovodov s zamknutym poperechnym secheniem* [Modal analysis of folded thin-walled shell structures of waveguides with a closed cross-section]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012661204 RF, 2012. (in Russian).
 22. Testoedov N.A., Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M., Khalimanovich V.I., Nagovitsin V.N., Gotseliuk O.B. *Analiz vynuzhdennykh kolebanii skladchatykh tonkostennykh obolochechnykh konstruksii volnovodov s zamknutym poperechnym secheniem* [Analysis of forced vibrations of folded thin-walled shell structures of waveguides with a closed cross-section]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012661199 RF, 2012. (in Russian).
 23. Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M., Nagovitsin V.N., Gotseliuk O.B. *Modul' eksporta lokal'nogo uchastka sterzhnevoi modeli skladchatykh tonkostennykh obolochechnykh konstruksii volnovodov s zamknutym poperechnym secheniem v tverdotel'nuiu model' Nastran* [The module of export of local section of rod model of folded thin-walled shell structures of waveguides with a closed cross-section to the solid model Nastran]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012661197 RF, 2012. (in Russian).
 24. Sil'chenko P.N., Kudriavtsev I.V., Mikhnev M.M., Nagovitsin V.N., Gotseliuk O.B. *Modul' eksporta lokal'noi oblasti skladchatykh tonkostennykh obolochechnykh konstruksii volnovodov s zamknutym poperechnym secheniem iz sterzhnevoi modeli v tverdotel'nuiu model' Ansys* [The module of export of local scope of folded thin-shell structures of waveguides with a closed cross-section from the core model to the solid model Ansys]. Certificate of state registration of computer program, no. 2012661198 RF, 2012. (in Russian).