

УДК 519.688

Оценка обусловленности матрицы дискретизации в методе конечных объемов

Авдеев Е. В.^{1,*}, Фурсов В. А.¹

[*j-avdeev@yandex.ru](mailto:j-avdeev@yandex.ru)

¹ Самарский государственный аэрокосмический университет имени
академика С.П. Королева, Самара, Россия

Рассматривается задача сравнения и выбора варианта пространственной дискретизации в задаче, решаемой методом конечных объемов. Для одной и той же задачи строится несколько разных сеток. Для каждого варианта сетки на основе нормированной матрицы дискретизации рассчитываются показатели обусловленности. Для оценки степени мультиколлинеарности используется показатель диагонального преобладания. Показана связь этого показателя с обусловленностью решаемой СЛАУ. Вычислительная сложность приведенного показателя диагонального преобладания существенно ниже в сравнении с показателями обусловленности. Предложенная процедура позволяет осуществлять сравнение и выбор наиболее подходящего варианта дискретизации по времени и по пространству без использования пробных решений СЛАУ, что способно снизить вычислительную сложность решения задачи.

Ключевые слова: обусловленность матрицы, система линейных алгебраических уравнений, показатели мультиколлинеарности, показатель диагонального преобладания

Введение

Одним из популярных методов решения задач математической физики является метод конечных объемов (МКО). В нем расчетная область дискретизируется по пространству на множество ячеек, границы которых образуют сетку. Уравнения зависимостей физических величин также дискретизируют, заменяя уравнения в непрерывной форме их дискретными аналогами. Получают систему уравнений – каждой ячейке соответствует одно уравнение. В частности, в случае МКО отдельное уравнение записывается для каждого отдельного объема. В результате формируется система линейных либо нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейные уравнения обычно сводят к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием процедуры линеаризации [1].

Размерность СЛАУ и связанная с этим точность решения задачи зависят от степени детализации задачи, т.е. числа конечных объемов, на которые разбивается вся область. Известно, что увеличение размеров конечных объемов может привести к потере точности, вследствие слишком грубой аппроксимации характеристик. Однако чрезмерное

увеличение числа узлов сетки ведет к повышению вычислительной сложности решаемой задачи. Подбор подходящего шага дискретизации сетки является одной из центральных проблем при решении задач механики сплошных сред.

Поэтому исследуются методы и подходы, в которых для выбора сетки используются простые, с точки зрения вычислительных затрат, критерии. В частности, в работах [2-5] рассматриваются методы, основанные на анализе поля градиентов и/или поля значений физических величин. В работах [6-8] описываются методы апостериорной оценки так называемых анизотропных погрешностей интерполяции и методы создания оптимальной треугольной сетки [9-10]. Общим недостатком этих подходов и методов является необходимость проведения решений задачи для получения выходных значений, на основе которых осуществляется оценка того, насколько удачно выбран вариант дискретизации рабочей области.

В настоящей работе исследуется возможность прогнозирования наиболее подходящего варианта дискретизации с использованием показателей обусловленности матрицы дискретизации. Известно, что наиболее полной характеристикой обусловленности являются собственные значения матрицы дискретизации. Однако решение полной или частной проблемы собственных значений [11] представляет серьезные вычислительные трудности. Новизна рассматриваемого подхода состоит в использовании достаточного критерия обусловленности, вычисляемого по элементам матрицы дискретизации. Это позволяет существенно сократить объем пробных вычислений.

1. Постановка задачи

Пусть в результате дискретизации задачи сформирована СЛАУ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная разреженная $n \times n$ -матрица коэффициентов дискретизации; $\mathbf{x}$ — $n \times 1$ -вектор, компонентами которого являются искомые (выходные) значения; $\mathbf{b}$ — $n \times 1$ -вектор известных (входных) значений. Если $\mathbf{A}$ — неособенная матрица, то искомое решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Известна [12] оценка для относительных ошибок в решениях

$$\delta \mathbf{x} = \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\| \leq \frac{K(\mathbf{A})}{1 - K(\mathbf{A})}(\delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{b}), \quad (1.2)$$

где $\delta \mathbf{A} = \|\Delta \mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|$, $\delta \mathbf{b} = \|\varepsilon\|/\|\mathbf{b}\|$; $\Delta \mathbf{A}$, ε - возмущения матрицы $\mathbf{A}$ и правой части системы (1.1) соответственно; $K(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ — так называемое число обусловленности.

Далее ограничимся случаем согласованной с евклидовой нормой вектора спектральной матричной нормы, для которой

$$K(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad (1.3)$$

где $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ - максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ соответственно. Из (1.2), (1.3) видно, что решающее значение в формировании ошибок в решениях имеет обусловленность матрицы $\mathbf{A}$ системы (1.1).

2. Обоснование метода оценки обусловленности

Известно [13], что одним из основных источников плохой обусловленности является мультиколлинеарность (почти линейная зависимость) векторов, из которых составлена матрица $\mathbf{A}$. Наиболее информативными мерами обусловленности и мультиколлинеарности являются: определитель $\det(\mathbf{A})$; число обусловленности $K(\mathbf{A})$; минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = \min_{i=1,n} \lambda_i(\mathbf{A})$. Эти меры являются исчерпывающими характеристиками свойств мультиколлинеарности и, как следствие, обусловленности матрицы $\mathbf{A}$, однако их вычисление, особенно в случае, когда матрица плохо обусловлена, является серьезной проблемой.

В работе [14] для прогнозирования ошибок в задачах идентификации по параметрам моделей рассматривалось применение в качестве меры обусловленности так называемого показателя диагонального преобладания неотрицательно-определенной информационной матрицы $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$:

$$F(\mathbf{G}) = \frac{tr^2 \mathbf{G}}{tr \mathbf{G}^2} = \frac{(\sum g_{i,j})^2}{\sum g_{i,j}^2} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{G}) \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\mathbf{G}) \right)^{-1}. \quad (2.1)$$

Здесь $g_{i,j}$ - элементы матрицы $\mathbf{G}$; $\lambda_i(\mathbf{G}), i = \overline{1,n}$ - ее собственные значения. Для удобства оценки степени мультиколлинеарности задачи этот показатель следует вычислять для соответствующей матрицы сопряженности

$$\mathbf{R} = \mathbf{D} \mathbf{G} \mathbf{D}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n)$, $d_i = 1/\sqrt{g_{ii}}$. При этом соотношение для вычисления показателя диагонального преобладания (4) принимает вид

$$F(\mathbf{R}) = \frac{tr^2 \mathbf{R}}{tr \mathbf{R}^2} = \frac{n^2}{n + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n r_{i,j}^2}. \quad (2.3)$$

Далее нам будет удобно использовать нормированное значение показателя диагонального преобладания матрицы сопряженности

$$F_n(\mathbf{R}) = \frac{F(\mathbf{R}) - 1}{n - 1}, \quad (2.4)$$

который изменяется в интервале $[0,1]$. Показатель (2.1) и его различные представления (2.3), (2.4) тесно связаны с указанными выше мерами. На рисунке 1 приведены графики изменения показателя $F_n(\mathbf{R})$ и трех мер обусловленности для шести матриц с различной степенью обусловленности. Сравнимость показателя (2.3) с определителем и минимальным собственным значением обеспечивается за счет масштабирования по формуле (2.2). Для сравнимости с числом обусловленности вместо обычного представления спектрального числа обусловленности (2.1) рассматривалось его обратное значение

$$K^{-1}(\mathbf{R}) = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}. \quad (2.5)$$

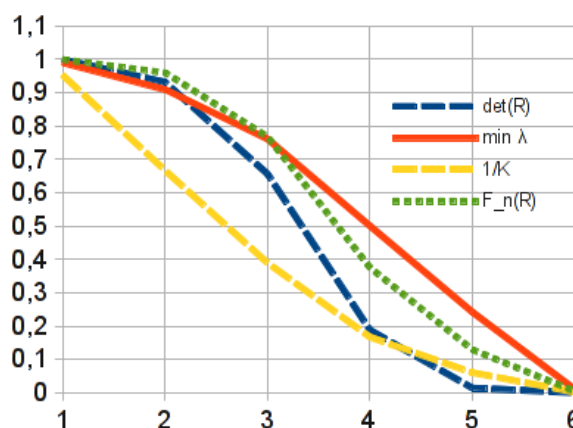


Рис. 1. Зависимости мер от степени обусловленности

Заметим, что минимальное собственное значение является, в некотором смысле, абсолютной мерой мультиколлинеарности. В то же время, при одном и том же значении показателя диагонального преобладания мультиколлинеарность матриц может быть существенно различной. Связано это с чувствительностью показателя (2.3) к относительным различиям абсолютных значений недиагональных элементов $r_{i,j}$; $i, j = \overline{1, n}$; $i \neq j$.

Показатель $F_n(\mathbf{R})$ может выступать как самостоятельная мера мультиколлинеарности и обусловленности. При этом показатель $F_n(\mathbf{R})$ легко вычисляется по элементам матрицы дискретизации.

3. Описание технологии выбора дискретизации в задаче механики сплошных сред

При проведении исследований использовалась следующая задача.

Исходная геометрия, как изображено на рисунке 2 – куб с длиной ребра 1 метр.

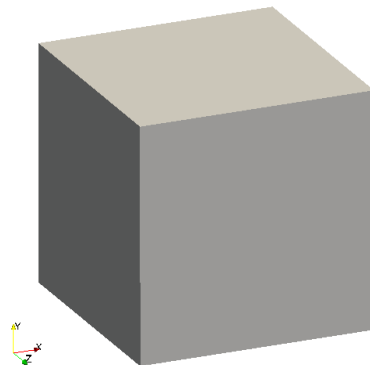


Рис. 2. Исходная геометрия задачи

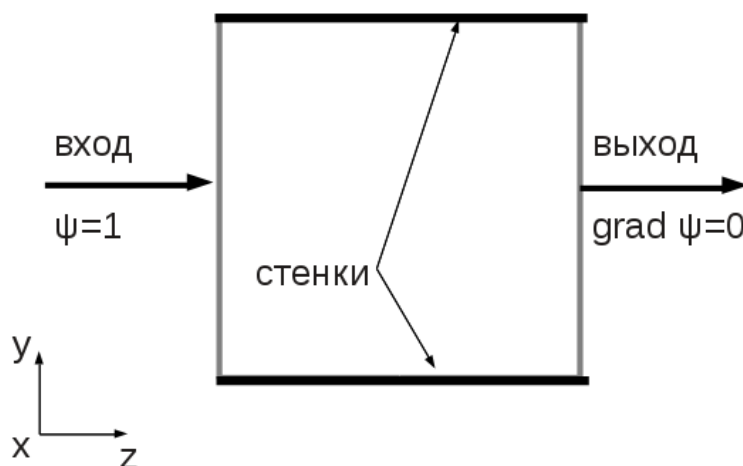


Рис. 3. Граничные условия задачи

Как изображено на рисунке 3, на одну грань куба подается поток $\psi = 1$, который проходит сквозь куб и выходит через противоположную грань $grad \psi = 0$.

Изменение потока задается уравнением переноса

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \psi) = 0, \quad (3.1)$$

где $\psi = \psi(x, t)$ - концентрация вещества; $\phi = \phi(\psi(x, t))$ - поток вещества.

Метод конечных объемов предусматривает, что равенство (3.1) в интегральной форме (3.2) будет выполняться для каждого конечного объема V_p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \psi dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\varphi \psi) dV = 0, \quad (3.2)$$

где P – центр конечного объема.

Примем, что значение величины ψ_P в некоторой точке x внутри конечного объема изменяется согласно разностной схеме Эйлера первого порядка и выражается как

$$\psi(x) = \psi_P + (x - x_P)(\nabla \psi)_P,$$

где $\psi_P = \psi(x_P)$.

Тогда первое слагаемое выражения (3.2) преобразуем следующим образом:

$$\int_{V_P} \psi(x) dV = \int_{V_P} [\psi_P + (x - x_P)(\nabla \psi)_P] dV = \psi_P \int_{V_P} dV + \left[\int_{V_P} (x - x_P) dV \right] (\nabla \psi)_P = \psi_P V_P. \quad (3.3)$$

Преобразуем второе слагаемое выражения (3.2) с помощью обобщенной теоремы Остроградского-Гаусса: интеграл от дивергенции векторного поля φ по объему V равен потоку вектора через поверхность S , ограничивающую данный объем:

$$\int_V \nabla \cdot \varphi dV = \oint_{\partial V} dS \varphi. \quad (3.4)$$

Здесь ∂V замкнутая поверхность, ограничивающая объем V ; dS – вектор, по величине равный площади бесконечно малого участка на грани и направленный вдоль нормали к грани в направлении от объема V .

Учитывая, что конечный объем ограничен набором плоских граней, преобразуем выражение (3.4) к сумме интегралов по поверхности:

$$\int_V \nabla \cdot \varphi dV = \oint_{\partial V} dS \varphi = \sum_f \left(\int_f dS \varphi \right) = \sum_f S \varphi_f, \quad (3.5)$$

где φ_f выражает значение переменной в центре грани; S – вектор площади, направлен из центра грани в направлении от центра ячейки.

Учитывая (3.3), (3.5) выражение (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_P V_P) + \sum_f S \varphi_f \psi_P = 0. \quad (3.6)$$

Примем, что дискретизация по времени производится согласно разностной схеме Эйлера первого порядка и выражение (3.6) записывается как

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\psi_P V_P) + \sum_f S \varphi_f \psi_P \right] dt = 0. \quad (3.7)$$

Проинтегрируем (3.7):

$$\psi_p V_p + S \psi_f \sum_f (\varphi_f \Delta t) = 0.$$

Разделим левую и правую часть на Δt :

$$\frac{\psi_p}{\Delta t} V_p + \sum_f S \psi_f \varphi_f = 0. \quad (3.8)$$

На основе (3.8) записывается система линейных уравнений для каждого конечного объёма. В правую часть выражения (3.8) подставляются начальные условия. Получившаяся СЛАУ в матричном виде может быть представлена в виде (1.1).

Далее для рассматриваемых вариантов сеток рассчитывается нормированное значение показателя диагонального преобладания матрицы сопряженности $F_n(\mathbf{R})$ (2.4). На основе анализа получившихся значений показателя $F_n(\mathbf{R})$ выбирается наиболее подходящий вариант сетки для заданных параметров задачи – чем больше значение $F_n(\mathbf{R})$, тем лучше подобраны параметры.

4. Результаты экспериментов в среде OpenFOAM

В экспериментах использовались только гексаэдральные сетки с постоянным и переменным шагом. Авторы не исключают применимость полученных результатов для других типов сеток.

Для решения СЛАУ (1.1) использовался метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием (PBiCG).

В настоящем разделе приведем результаты экспериментов по определению следующих зависимостей:

- связь показателя диагонального преобладания с показателями обусловленности;
- связь обусловленности системы линейных алгебраических уравнений с невязкой.

В таблице 1 приведены полученные значения показателей обусловленности и показателя диагонального преобладания для различных вариантов сеток.

Таблица 1. Значения показателей обусловленности и показателя диагонального преобладания $F_n(\mathbf{R})$ для различных вариантов сеток оформления таблицы

Размерность сетки X:Y:Z	1x1x5	1x10x100	3x1x400	6x3x10	1x1x800	1x1x100	3x2x100	20x1x20
Количество ячеек	5	1000	1200	180	800	100	600	400
K^{-1}	0.9994	0.9901	0.9616	0.8968	0.8621	0.8003	0.8003	0.6973
$\lambda_{\min}$	0.9997	0.9950	0.9804	0.9415	0.9259	0.8891	0.8891	0.8217
$\det(\mathbf{R})$	1.0000	0.9939	0.8914	0.9257	0.3340	0.7362	0.1592	0.0438
$F_n(\mathbf{R})$	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9973	0.9939	0.9939	0.9848

На рисунке 4 варианты упорядочены по убыванию обусловленности.

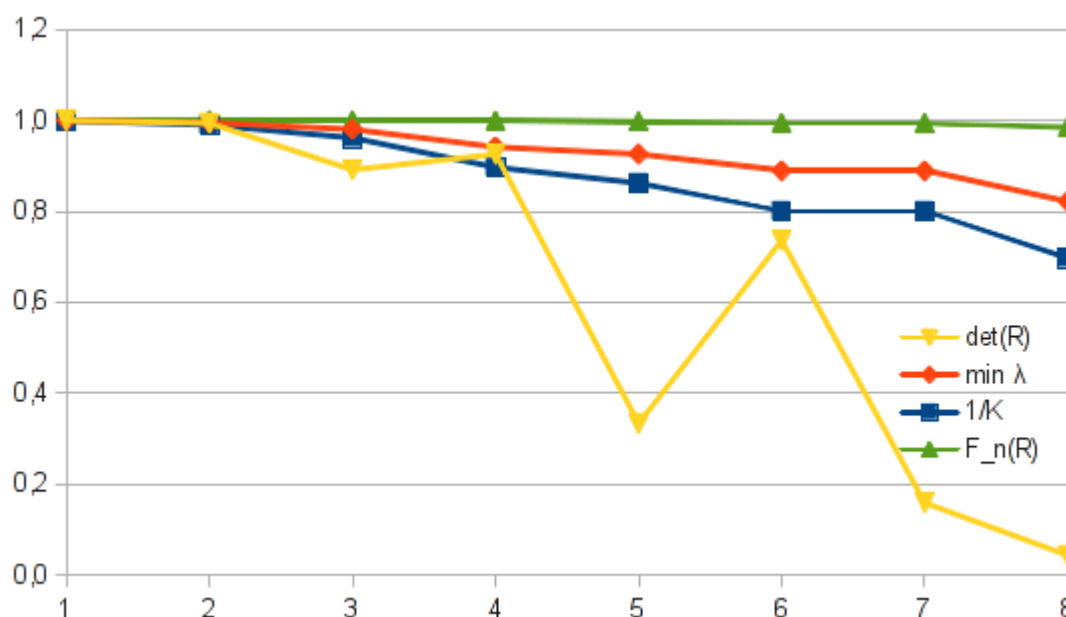


Рис. 4. Значения показателей обусловленности и показателя диагонального преобладания $F_n(\mathbf{R})$ для различных вариантов сеток

Чтобы убедиться в том, что показатели обусловленности и показатель диагонального преобладания $F_n(\mathbf{R})$ ведут себя одинаково, попарно посчитаем линейный коэффициент корреляции между наборами полученных значений:

$$Correl(a,b) = \frac{\sum (a - \bar{a})(b - \bar{b})}{\sqrt{\sum (a - \bar{a})^2 \sum (b - \bar{b})^2}},$$

где a, b - анализируемые наборы значений; $\bar{a}$ - среднее значение выборки a ; $\bar{b}$ - среднее значение выборки b .

В таблице 2 приведены коэффициенты корреляции показателей мультиколлинеарности и показателя диагонального преобладания $F_n(\mathbf{R})$.

Таблица 2. Коэффициенты корреляции показателей обусловленности

	K^{-1}	$\lambda_{\min}$	$\det(\mathbf{R})$	$F_n(\mathbf{R})$
K^{-1}		0.9988699232	0.8565186602	0.9304007086
$\lambda_{\min}$	0.9988699232		0.851565905	0.9439625719
$\det(\mathbf{R})$	0.8565186602	0.851565905		0.8159335722
$F_n(\mathbf{R})$	0.9304007086	0.9439625719	0.8159335722	

Как видно из таблицы 2 показатель диагонального преобладания $F_n(\mathbf{R})$ и меры обусловленности являются зависимыми.

Согласно полученным данным варианты с сетками из 5 и 1000 элементов, для которых $F_n(\mathbf{R}) = 1$, наиболее предпочтительны для решения рассматриваемой задачи.

Заключение

Вычислительная сложность нахождения показателя диагонального преобладания существенно меньше вычислительной сложности нахождения любой меры обусловленности и составляет, согласно (6), $2n + O(n^2)$. Для сравнения, вычислительная сложность обратного спектрального числа обусловленности (8) зависит от используемого алгоритма и может равняться $O(n^3)$. В современных задачах число ячеек сетки n может достигать $10^6 - 10^7$, поэтому вычислительная сложность является существенным доводом для использования в качестве критерия оценки качества сетки показателя диагонального преобладания.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке программы «Университетский кластер» – www.unicluster.ru. Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 12-07-00581).

Список литературы

1. Ferziger H.J., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. 3rd ed. Springer Berlin Heidelberg, 2002. 426 p. DOI: [10.1007/978-3-642-56026-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2)
2. Марчевский И.К., Пузикова В.В. Анализ эффективности итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, реализованных в пакете OpenFOAM // Труды Института системного программирования РАН. 2013. Т. 24, № 3. С. 71-86.
3. Сухинов А.А. Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 1. С. 86-98.
4. Поварицын М.Е., Захаренков А.С., Левашов П.Р., Хищенко К.В. Моделирование многокомпонентных гидродинамических течений с использованием адаптивных сеток // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13, вып. 3. С. 424-433.
5. Карасев П.И., А.С. Шишаева, Аксенов А.А. Качественное построение расчетной сетки для решения задач аэродинамики в программном комплексе FlowVision // Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2012» (Новосибирск, 26-30 марта 2012 г.): тр. 2012. С. 167-178.
6. Huang W. Measuring mesh qualities and application to variational mesh adaptation // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. Vol. 26, iss. 5. P. 1643-1666. DOI: [10.1137/S1064827503429405](https://doi.org/10.1137/S1064827503429405)

7. Huang W., Sun W. Variational mesh adaptation II: Error estimates and monitor functions // Journal of Computational Physics. 2003. Vol 184, iss. 2. P. 619-648. DOI: [10.1016/S0021-9991\(02\)00040-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(02)00040-2)
8. Kunert G. Robust a posteriori error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion equation on anisotropic tetrahedral meshes // Advances in Computational Mathematics. 2001. Vol. 15, iss. 1-4. P. 237-259. DOI: [10.1023/A:1014248711347](https://doi.org/10.1023/A:1014248711347)
9. D'Azevedo E.F., Simpson R. On optimal interpolation triangle incidences // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1989. Vol. 10, no. 6. P. 1063-1075. DOI: [10.1137/0910064](https://doi.org/10.1137/0910064)
10. D'Azevedo E.F., Simpson R. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error // Numerische Mathematik. 1991. Vol. 59. P. 321-348. DOI: [10.1007/BF01385784](https://doi.org/10.1007/BF01385784)
11. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: пер. с англ. М.: Мир, 1969. 168 с.
12. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
13. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
14. Фурсов В.А. Адаптивная идентификация по малому числу наблюдений // Информационные технологии. 2013. Прил. № 9. С. 1-32.

Discretization Matrix Condition Estimate in Finite Volume Method

E.V. Avdeev^{1,*}, V.A. Fursov¹

^{*}j-avdeev@yandex.ru

¹Samara State Aerospace University, Samara, Russia

Keywords: conditioning of the matrix, system of linear algebraic equations, indicators of multicollinearity, indicator of diagonal dominance

The paper concerns a task of selecting the spatial (mesh) and temporal (time step) discretization in problems to be solved by finite volume method.

The method is proposed in which the choice of the case settings is directly based on the analysis of a discretization matrix. The papers [2, 3, 4, 5] deal with the methods based on the analysis of the gradient field or value field of physical quantities. Papers [6], [7], [8] describe methods for a posteriori estimation of the so-called anisotropic interpolation errors and methods for creating an optimal triangular mesh [9], [10].

A common disadvantage of these methods is that it is necessary to solve the problem to obtain the output values. In this paper we propose a procedure based on the relationship of the discretization matrix multicollinearity with a mesh, a time step, and a chosen set of finite difference schemes.

A problem with a simple geometry in which the flow is specified by the hyperbolic equation, is chosen as an example. A number of experiments have been conducted to compare variations on the meshes for the specified difference schemes.

A type of the elements of considered meshes is hexahedrons. Meshes both with constant and with variable spatial step were used.

Calculations based on the normalized discretization matrix were performed for each variation of mesh to determine index of diagonal dominance, condition number, determinant, and minimum eigenvalue. To obtain multicollinearity, a diagonal dominance index was used. The paper shows the relationship of this parameter with the condition of solvable linear algebraic equation.

The computational complexity of the abovementioned index of diagonal dominance is significantly lower as compared to indices of condition such as a condition number and a minimum eigenvalue.

This allows us to estimate the condition of the linear algebraic equation with the least computational cost. The proposed procedure allows comparison and selection of the most appropriate spatial (mesh) and temporal (time step) discretization without a complete trial solution of

the linear algebraic equation, thereby significantly reducing the computational complexity of solving problems.

References

1. Ferziger H.J., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd ed. Springer Berlin Heidelberg, 2002. 426 p. DOI: [10.1007/978-3-642-56026-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2)
2. Marchevskiy I.K., Puzikova V.V. OpenFOAM iterative methods efficiency analysis for linear systems solving. *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN = Proceedings of the Institute for System Programming of RAS*, 2013, vol. 24, pp. 71-86. (in Russian).
3. Sukhinov A.A. Construction of Cartesian meshes with dynamic adaptation to the solution. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical modeling*, 2010, vol. 22, no. 1, pp. 86-98. (in Russian).
4. Povaritsyn M.E., Zakharenkov A.S., Levashov P.R., Khishchenko K.V. Simulation of multi-material hydrodynamic flows using adaptive mesh refinement. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye = Numerical Methods and Programming*, 2012, vol. 13, iss. 3, pp. 424-433. (in Russian).
5. Karasev P.I., A.S. Shishaeva, Aksenov A.A. High-quality construction of the computational grid to solve the problems of aerodynamics in the software package FlowVision. *Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya "Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT) 2012": tr. [Proc. of the international scientific conference "Parallel computational technologies (PCT) 2012"]*, Novosibirsk, 26-30 March, 2012, pp. 167-178. (in Russian).
6. Huang W. Measuring mesh qualities and application to variational mesh adaptation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, vol. 26, iss. 5, pp. 1643-1666. DOI: [10.1137/S1064827503429405](https://doi.org/10.1137/S1064827503429405)
7. Huang W., Sun W. Variational mesh adaptation II: Error estimates and monitor functions. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol 184, iss. 2, pp. 619-648. DOI: [10.1016/S0021-9991\(02\)00040-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(02)00040-2)
8. Kunert G. Robust a posteriori error estimation for a singularly perturbed reaction-diffusion equation on anisotropic tetrahedral meshes. *Advances in Computational Mathematics*, 2001, vol. 15, iss. 1-4, pp. 237-259. DOI: [10.1023/A:1014248711347](https://doi.org/10.1023/A:1014248711347)
9. D'Azevedo E.F., Simpson R. On Optimal Interpolation Triangle Incidences. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1989, vol. 10, no. 6, pp. 1063-1075. DOI: [10.1137/0910064](https://doi.org/10.1137/0910064)

10. D'Azevedo E.F., Simpson R. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik*, 1991, vol. 59, iss. 5, pp. 321-348. DOI: [10.1007/BF01385784](https://doi.org/10.1007/BF01385784)
11. Forsythe G.E., Moler C.B. *Computer solution of linear algebraic systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967. (Russ. ed.: Forsythe G.E., Moler C.B. *Chislennoe reshenie sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy*. Moscow, Mir Publ., 1969. 168 p.).
12. Voevodin V.V. *Vychislitel'nye osnovy lineynoy algebry* [Computational fundamentals of linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 304 p. (in Russian).
13. Demidenko E.Z. *Lineynaya i nelineynaya regressii* [Linear and nonlinear regression]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1981. 304 p. (in Russian).
14. Fursov V.A. Adaptive Identification on Small Number of Observations. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies*, 2013, suppl. no. 9, pp. 1-32. (in Russian).