

УДК 519.6

Рабочее пространство параллельного механизма типа додекапод

Данг С. Х.^{1,*}

[*rk6bmstu@mail.ru](mailto:rk6bmstu@mail.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Цель работы является исследованием рабочего пространства параллельного манипулятора типа додекапода. В статье реализован алгоритм конечномерной аппроксимации рабочего пространства додекапода и приближенного вычисления объема этого пространства. Объем рабочего пространства приближенно вычислено при сумме объединений построенных конечномерных аппроксимаций рабочего пространства. Представлены результаты вычислительных экспериментов с разработанным алгоритмическим и программным обеспечениями, показавшие их высокую эффективность. Исследование рабочего пространства манипулятора применяется для проектирования структуры манипулятора, оптимизации траектории движения додекапода в сложных пространствах, исследования проходимости додекапода в узких пространствах.

Ключевые слова: додекапод, параллельный манипулятор, рабочее пространство, рабочий объем

Введение

По сравнению с последовательными механизмами, параллельный механизм обладает высокой жесткостью, точностью перемещения выходного звена и способностью управлять большими нагрузками с высокими скоростями [1]. К недостаткам параллельных механизмов относятся ограниченное рабочее пространство и трудность решения прямой кинематической задачи.

Додекапод представляет собой параллельный механизм, основанный на платформе Стюарта. Механизм состоит из 12 штанг и шести шарнирных узлов. В отличие от платформы Стюарта, каждая из двух платформ додекапода может изменять свои размеры. Это обстоятельство позволяет использовать додекапод в различных областях техники: манипуляционные системы, транспортные механизмы, станки, миниатюрные роботы, робото-технические системы [2].

Уравнения кинематики додекапода [3] определяют соотношения между положениями его шарниров и длинами штанг. Данные уравнения можно использовать для

определения рабочего пространства додекапода и проектирования его траектории движения.

В работах [4-6] представлены алгоритмы построения рабочего пространства параллельного механизма типа 3-PRS, обладающего тремя степенями свободы. В данной работе на основе этих алгоритмов предложены алгоритмы построения рабочего пространства додекапода. Кроме того, в работе предложен алгоритм вычисления объема рабочего пространства додекапода, который является важной характеристикой любого манипуляционного механизма. Увеличение объема рабочего пространства механизма без существенного увеличения габаритных размеров его конструкции является одной из задач проектирования манипуляционных механизмов [7].

1. Постановка задачи

Додекапод состоит из 12 штанг и шести шарнирных узлов (рисунок 1). Длины штанг могут изменяться. Платформа основания (основание) B_1, B_2, B_3 и движущая платформа (платформа) P_1, P_2, P_3 состоят из трех штанг каждая. Остальные шесть штанг связывают платформы как показано на рисунке 1. С платформой связан схват манипулятора.

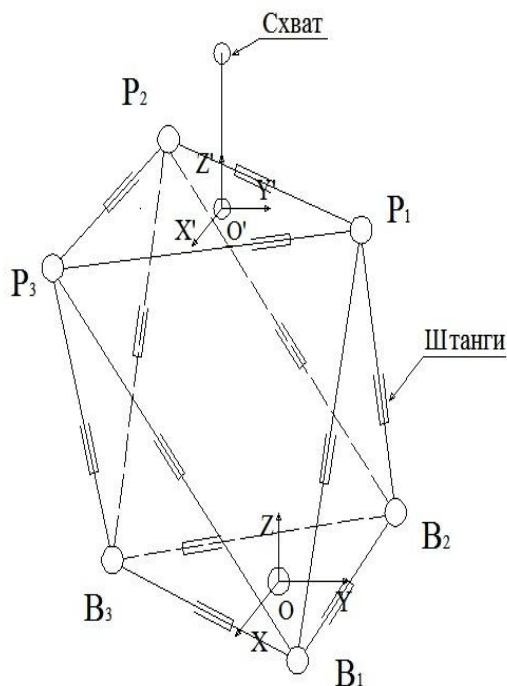


Рисунок 1 - Кинематическая схема додекапода: B_1, B_2, B_3 - шарниры основания; P_1, P_2, P_3 - шарниры платформы

Полагаем, что в исходном состоянии длины l_i , $i \in [1:12]$ штанг додекапода одинаковы и равны l_0 . На величины l_i наложены ограничения

$$l_{\min} \leq l_i \leq l_{\max}. \quad (1)$$

Заметим, что условия (1) ограничивают также минимальный и максимальный углы между штангами додекапода. Расстояние от схвата до платформы обозначаем $l_{cx.}$. Для простоты записи полагаем, что $l_{cx.} = 0$.

Рабочее пространство додекапода представляет собой часть пространства, в каждую из точек которого можно перевести схват механизма, не нарушая условий (1). Аналитическое определение рабочего пространства манипулятора удастся только в простейших случаях. Поэтому ставим задачу приближенного построения рабочего пространства додекапода.

2. Алгоритм конечномерной аппроксимации рабочего пространства додекапода

Введем в рассмотрение полярную систему координат (φ, λ, ρ) , начало которой совпадает с началом системы координат $OXYZ$ (рисунок 2). Здесь φ, λ – углы поворота вектора $\overrightarrow{OP}$, ρ – его длина.

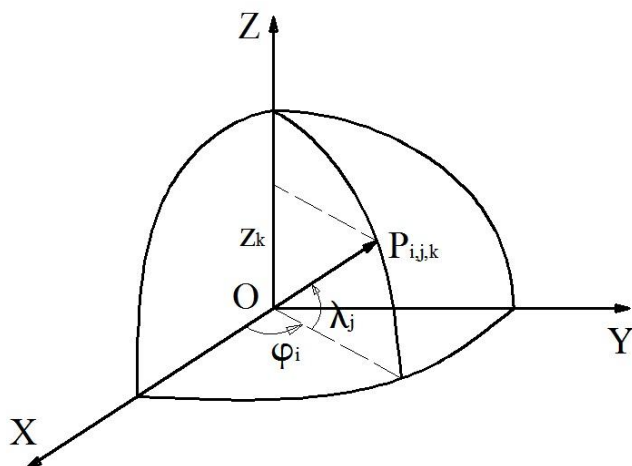


Рисунок 2 – Используемые системы координат

Покроем интервалы $z \in [0; l_{\max}]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\rho \in [l_{\min}; l_{\max}]$ равномерными сетками с шагами $\Delta z, \Delta \varphi, \Delta \rho$ соответственно, так что $z_i = i \Delta z$, $\varphi_j = j \Delta \varphi$, $\rho_k = k \Delta \rho$, где $i \in [0; n_z]$, $j \in [0; n_\varphi]$, $k \in [0; n_\rho]$.

Алгоритм построения конечномерной аппроксимации рабочего пространства додекапода имеет следующий вид.

1) Организуем вложенные циклы по $i \in [0:n_z]$, $j \in [0:n_\varphi]$, $k \in [0:n_\rho]$. Для текущего набора (i, j, k) выполняем следующие действия.

2) Определяем координаты точки $B_{i,j,k} = (x_i, y_i, z_i)$, $P_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$, где

$$\begin{cases} x_{i,j,k} = \rho_k \sin \varphi_j, \\ y_{i,j,k} = \rho_k \cos \varphi_j, \\ z_{i,j,k} = z_i. \end{cases} \quad (2)$$

3) Получаем матрицу трансформации [3]

$$T_{i,j,k} = \begin{bmatrix} & x_{i,j,k} \\ R_{i,j,k} & y_{i,j,k} \\ & z_{i,j,k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$R_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{i,j,k}^c \beta_{i,j,k}^c & \alpha_{i,j,k}^c \beta_{i,j,k}^s \gamma_{i,j,k}^s - \alpha_{i,j,k}^s \gamma_{i,j,k}^c & \alpha_{i,j,k}^c \beta_{i,j,k}^s \gamma_{i,j,k}^c + \alpha_{i,j,k}^s \gamma_{i,j,k}^s \\ \alpha_{i,j,k}^s \beta_{i,j,k}^c & \alpha_{i,j,k}^s \beta_{i,j,k}^s \gamma_{i,j,k}^s + \alpha_{i,j,k}^c \gamma_{i,j,k}^c & \alpha_{i,j,k}^s \beta_{i,j,k}^s \gamma_{i,j,k}^c - \alpha_{i,j,k}^c \gamma_{i,j,k}^s \\ -\beta_{i,j,k}^s & \beta_{i,j,k}^c \gamma_{i,j,k}^s & \beta_{i,j,k}^c \gamma_{i,j,k}^c \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \alpha_{i,j,k}^c = \cos \alpha_{i,j,k}, \quad \alpha_{i,j,k}^s = \sin \alpha_{i,j,k}, \\ \beta_{i,j,k}^c = \cos \beta_{i,j,k}, \quad \beta_{i,j,k}^s = \sin \beta_{i,j,k}, \\ \gamma_{i,j,k}^c = \cos \gamma_{i,j,k}, \quad \gamma_{i,j,k}^s = \sin \gamma_{i,j,k}; \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i,j,k} = 0, \\ \beta_{i,j,k} = \arctan \left(\frac{x_{i,j,k}}{z_{i,j,k}} \right), \\ \gamma_{i,j,k} = \arcsin \left(-\frac{y_{i,j,k}}{\sqrt{x_{i,j,k}^2 + y_{i,j,k}^2 + z_{i,j,k}^2}} \right). \end{array} \right. \end{cases} \quad (5)$$

5) Для $Z = Z_k$ вычисляем длины всех боковых штанг манипулятора

$$\begin{aligned}
l_{i,j} &= B_{i,j,k} P_{i,j,k} = B_{i,j,k} O + O O'_{i,j,k} + O'_{i,j,k} P_{i,j,k} = \\
&= -B_{i,j,k}^B + O O'_{i,j,k} + (R_{i,j,k}, P_{i,j,k}^P)
\end{aligned}
\quad (6)$$

где компоненты векторов $B_{i,j,k}^B, P_{i,j,k}^P$ известны; $i = 1 \div 3, j \neq i$; $(\cdot, \cdot)$ - оператор скалярного произведения. Здесь $l_{i,j}$ - длина штанги, соединяющей точки $B_{i,j,k}$ и $P_{i,j,k}$.

6) Проверяем выполнение ограничений (1). Если все полученные длины штанг удовлетворяют этому условию, то сохраняем координаты точки $P_{i,j,k}$ и циклический процесс продолжаем. В противном случае цикл по k завершаем.

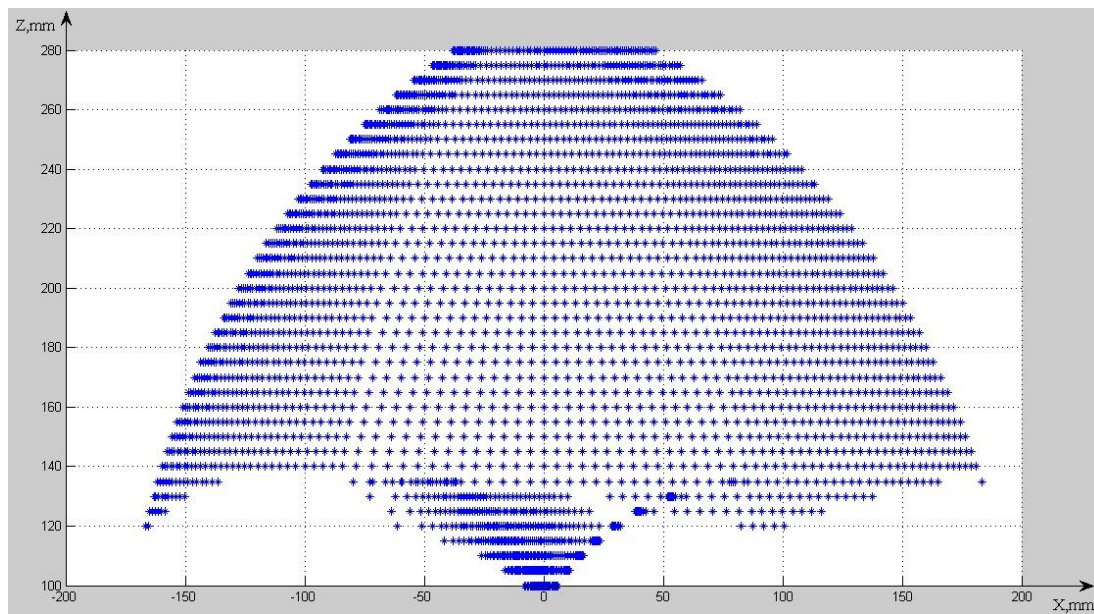
После завершения циклического процесса накопленный массив координат точек $P_{i,j,k}$ представляет собой искомую конечномерную аппроксимацию рабочего пространства додекапода.

3. Вычислительный эксперимент

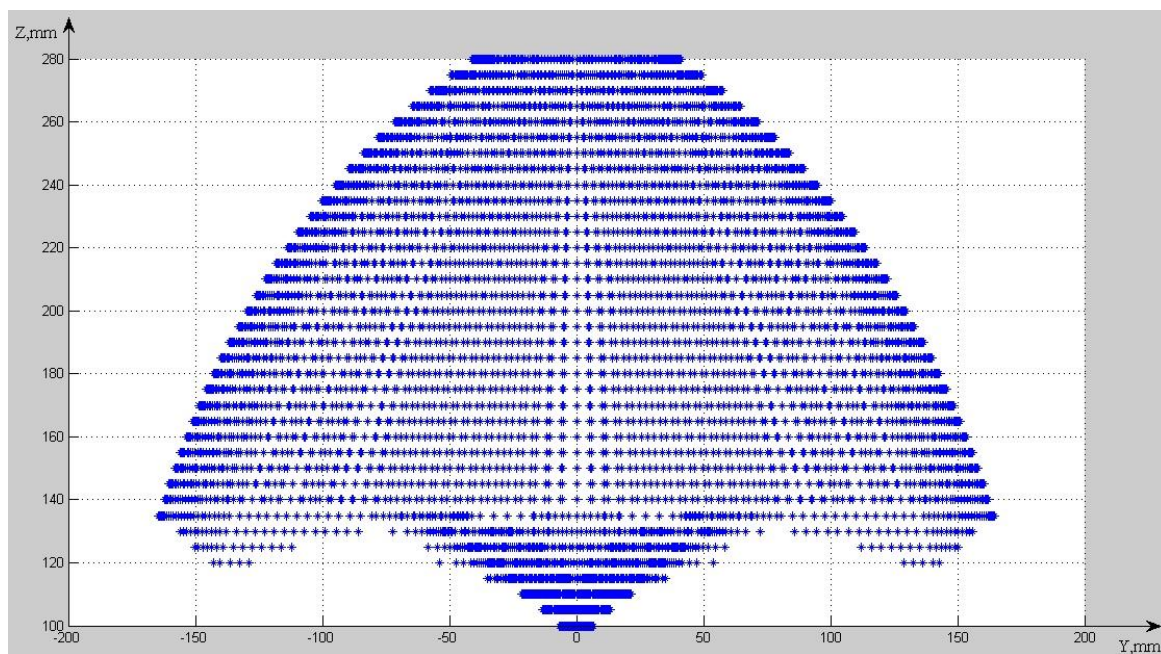
Представленный в п. 2 алгоритм реализован в среде программной системы *Matlab*. С помощью разработанного алгоритмического и программного обеспечения построена аппроксимация рабочего пространства додекапода со следующими параметрами:

$$l_0 = 200 \text{ мм}; \quad r_B = 120 \text{ мм}, \quad r_P = 100 \text{ мм}, \quad \Delta z = 5 \text{ мм}, \quad \Delta \varphi = \frac{\pi}{180}, \quad \Delta \rho = 0,5 \text{ мм}.$$

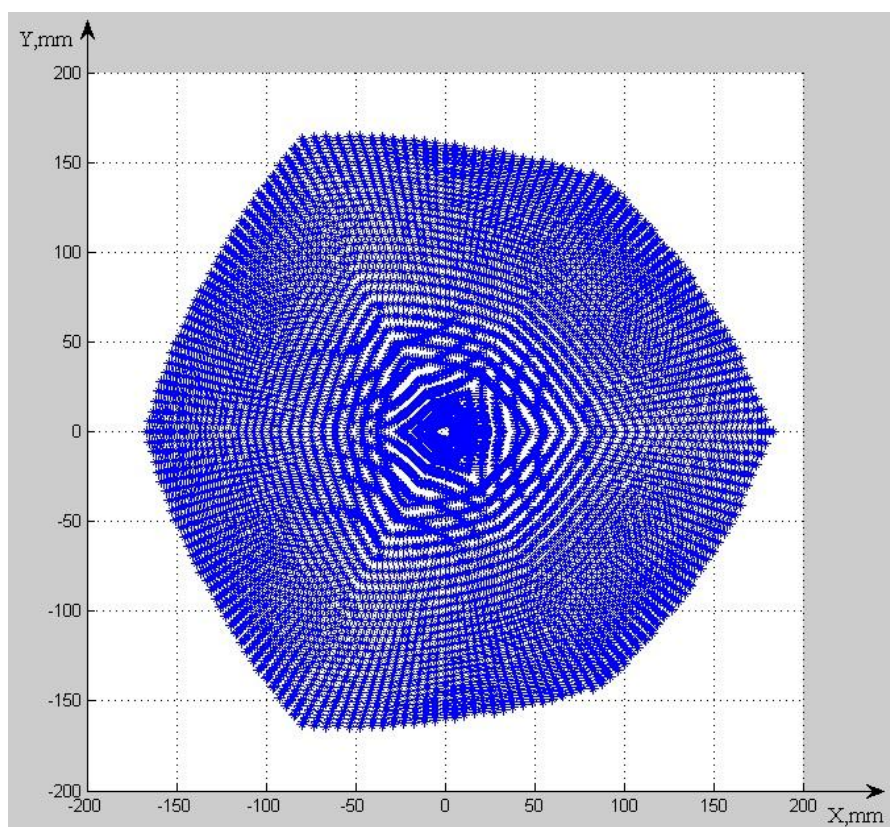
Некоторые результаты вычислений представлены на рисунке 3.



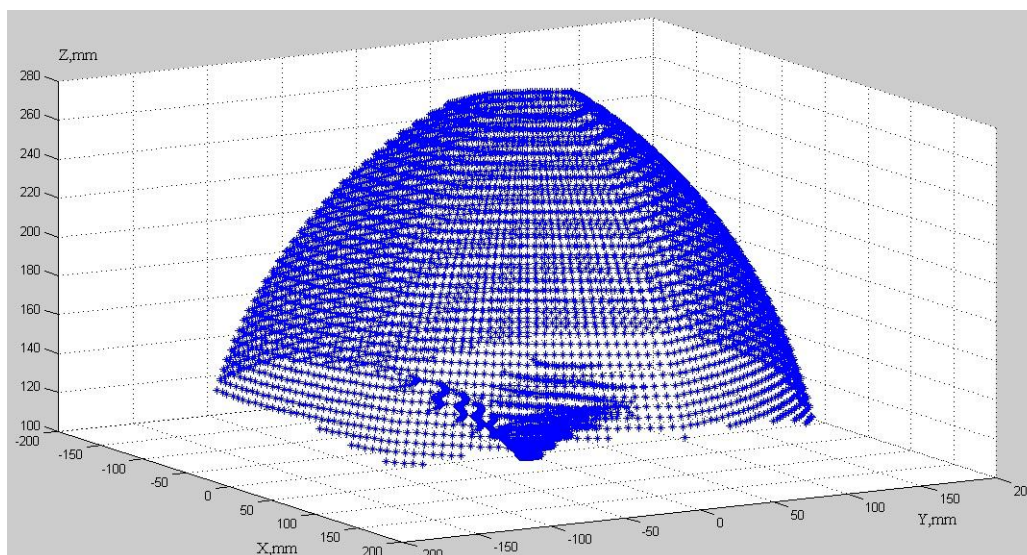
а) проекция на плоскость OXZ



б) проекция на плоскость OYZ



в) проекция на плоскость OXY



г) трехмерный вид

Рисунок 3 – Аппроксимация рабочего пространства додекапода

Представленные результаты показывают, что рабочее пространство рассматриваемого додекапода состоит из двух частей: верхняя, похожая на параболоид, и нижняя, близкая к конусоиду.

При изменении длин всех штанг основания и платформы получается полное рабочее пространство додекапода. На рисунке 4 представлены проекции рабочих пространств додекапода на плоскости OXZ .

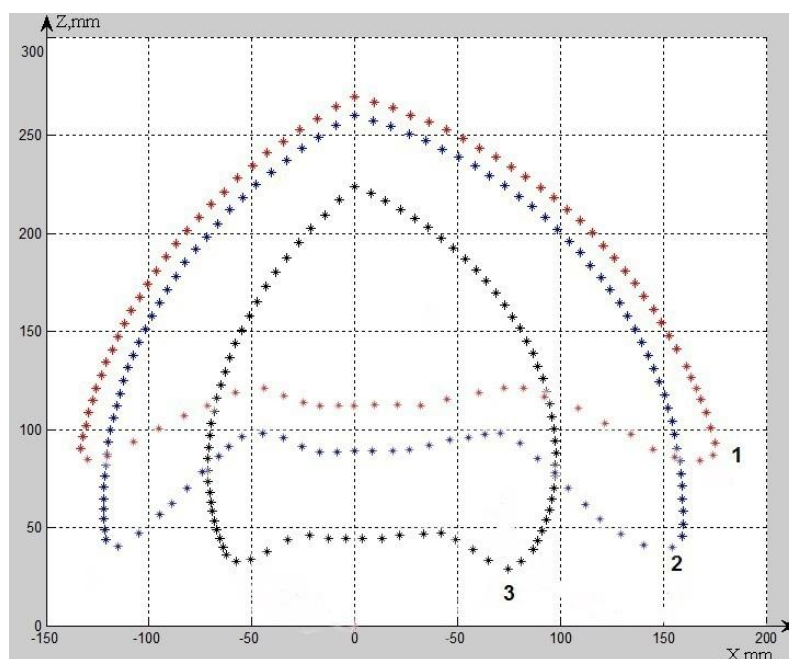


Рисунок 4. Проекция рабочих пространств додекапода на плоскость OXZ :

1 - $r_B = 100$ мм, $r_P = 100$ мм; 2 - $r_B = 150$ мм, $r_P = 200$ мм;

3 - $r_B = 200$ мм, $r_P = 200$ мм

4. Объем рабочего пространства

Построенная конечномерная аппроксимация рабочего пространства додекапода позволяет вычислить приближенный объем этого пространства. Алгоритм вычисления объема рабочего пространства додекапода имеет следующий вид.

1) Определяем диапазоны изменения радиусов основания r_B и платформы r_P :

$$r_B = [r_{B\min}, r_{B\min} + \Delta r, r_{B\min} + 2\Delta r, \dots, r_{B\max}];$$

$$r_P = [r_{P\min}, r_{P\min} + \Delta r, r_{P\min} + 2\Delta r, \dots, r_{P\max}].$$

2) Для каждого набора значений (r_B, r_P) строим конечномерную аппроксимацию рабочего пространства додекапода.

3) Находим объединение построенных конечномерных аппроксимаций рабочего пространства (рисунок 5).

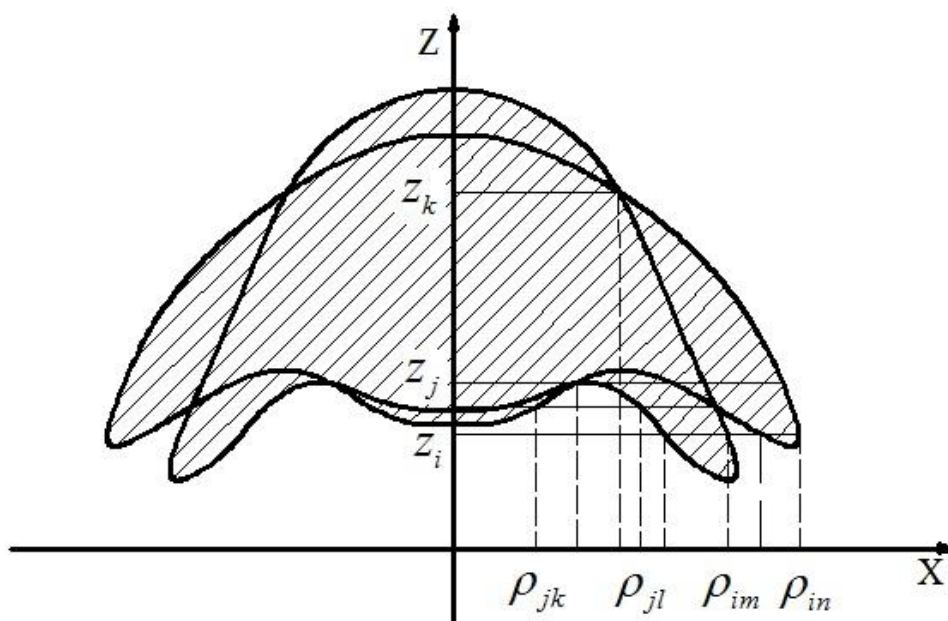


Рисунок 5 - Сечения рабочего пространства для двух конечномерных аппроксимаций

4) Определяем объем каждого слоя, толщина которого равна $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ (рисунок 6).

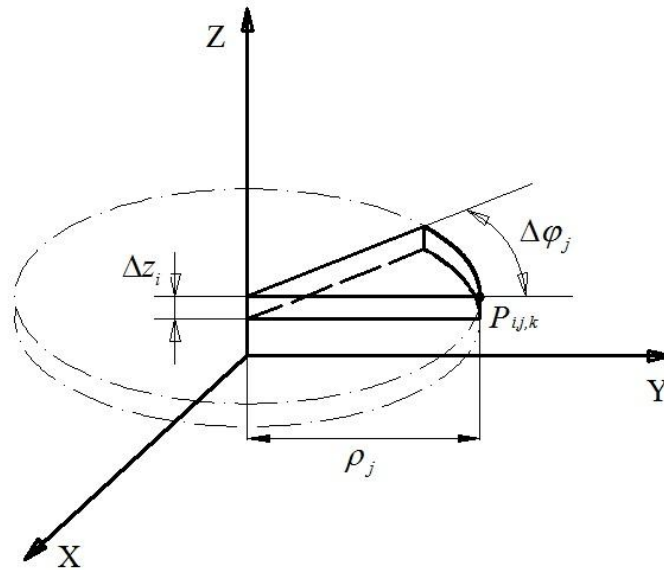


Рисунок 6 – К определению объема i - слоя рабочего пространства додекапода

4.1) Вычисляем объем каждого сектора

$$dV_{i,j} = \frac{\Delta\varphi_j}{2\pi} \pi \rho_j^2 \Delta z = \frac{1}{2} \rho_j^2 \Delta\varphi_j \Delta z_i.$$

4.2) Суммируем все полученные объемы:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n_\varphi} dV_{i,j}.$$

5) Определение полный объем рабочего пространства додекапода по формуле

$$V = \sum_1^{n_z} V_i.$$

Программная реализация данного алгоритма также выполнена в среде программной системы *Matlab*. С помощью алгоритма и программного обеспечения вычислен приближенный объем рабочего пространства додекапода, представленного в п. 2, равный $V = 0,0176 \text{ м}^3$.

Заключение

В работе предложены алгоритмы построения конечномерной аппроксимации рабочего пространства додекапода и приближенного вычисления объема этого пространства. Выполнена программная реализация предложенных алгоритмов в среде программной системы *Matlab*. Представлены результаты вычислительных экспериментов

с разработанным алгоритмическим и программным обеспечениями, показавшие их высокую эффективность.

Список литературы

1. Merlet J.P. Parallel Robots. Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 31-65. DOI: [10.1007/978-94-010-9587-7](https://doi.org/10.1007/978-94-010-9587-7)
2. Саяпин С.Н., Синев А. В. Адаптивный мобильный пространственный робот-манипулятор и способ организации движений и контроля физико-механических свойств и геометрической формы контактируемой поверхности и траектории перемещения с его помощью: пат. 2424893 РФ. 2011.
3. Данг Суан Хиеп. Кинематика односекционного параллельного манипулятора типа «додекапод» // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 2. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/539000.html> (дата обращения 01.05.2014). DOI: [10.7463/0213.0539000](https://doi.org/10.7463/0213.0539000)
4. Yangmin Li, Qingsong Xu. Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2007. Vol. 23, iss. 4. P. 395-408. DOI: [10.1016/j.rcim.2006.04.007](https://doi.org/10.1016/j.rcim.2006.04.007)
5. Madusudanan Sathia Narayanan, Sourish Chakravarty, Hrishi Shah, Venkat N. Krovi. Kinematic-, Static- and Workspace Analysis of a 6-P-U-S Parallel Manipulator // Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2010 (August 15-18, 2010, Montreal, Quebec, Canada). 2010. P. 1456-1464.
6. Filho S.C.T., Cabral E.L.L. Kinematics and workspace analysis of a parallel architecture robot: the Hexa // ABCM Symposium Series in Mechatronics. 2006. Vol. 2. P. 158-165. Available at: http://www.abcm.org.br/pt/wp-content/symposium-series/SSM_Vol2/Section_III_Robotics/SSM2_III_01.pdf , accessed 01.05.2014.
7. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. С. 75-92.

Workspace of Parallel Mechanism of Dodekapod Type

S.H. Dang^{1,*}

*rk6bmstu@mail.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: dodekapod, parallel manipulator, workspace analysis

Dodekapod represents a parallel mechanism based on Stewart's platform. The mechanism consists of 12 bars and six hinged knots. Unlike Stewart's platform, each of two platforms of a dodekapod can change the sizes. This circumstance allows us to use a dodekapod in various engineering areas, namely in handling systems, transport mechanisms, machines, tiny robots, and robotic systems. The working space is one of the important characteristics of a dodekapod. When determining a working space, we can draw up the necessary data of a dodekapod, develop an algorithm of the movement, etc.

Item 1. Problem statement. This item represents main names and characteristics of a dodekapod, condition for restriction of bar lengths, working space definition.

Item 2. Finite-dimensional approximation algorithm of working space of a dodekapod. Each P point position in the working space is given in the polar system of coordinates $P_{i,j,k}$. The algorithm includes a cycle of 6 stages. After completing a cyclic process the cumulative array of coordinates of points $P_{i,j,k}$ represents a required finite-dimensional approximation of working space of a dodekapod.

Item 3. Computing experiment. The algorithm presented in the item 2 is realized in the *Matlab* software system environment. A developed algorithm and the software enable an approximation of the dodekapod working space to be constructed with the following parameters:

$$l_0=200 \text{ mm}; r_B=120 \text{ mm}, r_P=100 \text{ mm}, \Delta Z=5 \text{ mm}, \Delta \varphi=\pi/180, \Delta \rho=0,5 \text{ mm}$$

$$l_0 = 200 \text{ mm}; R_B = 100, R_P = 100 r_B = 120 \text{ mm}, r_P = 100 \text{ mm},$$

$$\Delta z = 5 \text{ mm}, \Delta \varphi = \frac{\pi}{180}, \Delta \rho = 0,5 \text{ mm}.$$

Item 4. Working space volume. The constructed finite-dimensional approximation of working space of a dodekapod allows us to calculate the approximate volume of this space. The algorithm to calculate volume of dodekapod working space includes a cycle of 5 stages. This algorithm is implemented in the *Matlab* software system environment as well.

Conclusion. The work offers algorithms to create finite-dimensional approximation of working space of a dodekapod and perform approximate calculation of this space volume. It presents results of computing experiments with developed algorithms and software to show their high efficiency.

References

1. Merlet J.P. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 31-65. DOI: [10.1007/978-94-010-9587-7](https://doi.org/10.1007/978-94-010-9587-7)
2. Saiapin S.N., Sinev A.V. *Adaptivnyi mobil'nyi prostranstvennyi robot-manipuliator i sposob organizatsii dvizhenii i kontrolia fiziko-mekhanicheskikh svoistv i geometricheskoi formy kontaktiruemoi poverkhnosti i traektorii peremeshcheniia s ego pomoshch'iu* [Adaptive mobile 3D manipulator robot and method of organizing displacements and control over physical mechanical properties, geometrical shape of contact surface and displacement trajectory hereby]. Patent RF, no. 2424893, 2011.
3. Dang S.H. [Kinematics of a single-section parallel “dodekapod” manipulator]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana - Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 2. DOI: [10.7463/0213.0539000](https://doi.org/10.7463/0213.0539000)
4. Yangmin Li, Qingsong Xu. Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2007, vol. 23, iss. 4, pp. 395-408. DOI: [10.1016/j.rcim.2006.04.007](https://doi.org/10.1016/j.rcim.2006.04.007)
5. Madusudanan Sathia Narayanan, Sourish Chakravarty, Hrishi Shah, Venkat N. Krovi. Kinematic-, Static- and Workspace Analysis of a 6-P-U-S Parallel Manipulator. *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2010*, August 15-18, 2010, Montreal, Quebec, Canada. 2010. P. 1456-1464.
6. Filho S.C.T., Cabral E.L.L. Kinematics and workspace analysis of a parallel architecture robot: the Hexa. *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, 2006, vol. 2, pp. 158-165. Available at: http://www.abcm.org.br/pt/wp-content/symposium-series/SSM_Vol2/Section_III_Robotics/SSM2_III_01.pdf, accessed 01.05.2014.
7. Zenkevich S.L., Iushenko A.S. *Osnovy upravleniia manipuliatsionnymi robotami* [Bases of control of manipulation robots]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004, pp. 75-92.