Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 192–208.

DOI: **10.7463/1014.0728843**

Представлена в редакцию: 01.10.2014

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 629.7.01

Способ определения временного параметра программы

Баслык К. П.[1,*], Генералов Н. Н.[1], Кулешов Б. Г.[1]

*kbaslyk@gmail.com

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье предложена методика определения временного параметра программы угла атаки на участке выведения управляемой баллистической ракеты или ракеты-носителя. Для заданных проектно-баллистических параметров ракеты определяется максимально допустимое значение амплитуды угла атаки, а затем для произвольной амплитуды в границах этого интервала вычисляется временной параметр программы угла атаки. Первая задача формулируется как задача условной оптимизации и решается методом множителей, а вторая – как нелинейное уравнение, которое решается методом Ньютона. Рассмотрены особенности численной реализации этого алгоритма: нормирование уравнений движения и введение контроля точности на шаге интегрирования методом Рунге-Кутта. Предложенная методика реализована в виде оригинальной компьютерной программы, приведены результаты решения тестового примера. На основе этих результатов получена оценка влияния погрешности задания временного параметра программы угла атаки на точность определения угла траектории в конце активного участка.

Ключевые слова: летательный аппарат, активный участок траектории, программа выведения, программа угла атаки, проектно-баллистические параметры, уравнения движения летательного аппарата, метод множителей, модифицированная функция Лагранжа, метод Ньютона

Введение

Программа выведения полезного груза является одним из обязательных разделов учебной литературы по баллистике [2,4] и проектированию летательных аппаратов [1,3,5,6]. Как правило, в учебниках приводится деление активного участка траектории (АУТ) на отрезки в зависимости от числа ступеней и назначения летательного аппарата (ЛА), указываются общие требования и ограничения, которые накладываются на параметры этой программы.

В настоящей статье предложен способ определения одной из таких характеристик – временного параметра программы угла атаки управляемой баллистической ракеты или ракеты-носителя.

1. Методика определения временного параметра программы угла атаки как решение задачи нелинейного программирования

Для одноступенчатой ракеты, также как для первой ступени многоступенчатых ракет, при моделировании выведения полезного груза используется программа полета [7], состоящая из трех последовательно отрабатываемых участков:

- вертикальный полет ракеты до величины относительной массы ракеты μ_1=0,96;
- участок программного разворота по углу атаки α;
- участок гравитационного разворота с нулевым углом атаки.

Программный разворот по углу атаки задается в виде быстро убывающей и столь же быстровозрастающей функции. В [2,7] она имеет вид:

$$\alpha_{\text{пр}}(t) = -4 \cdot \alpha_{\text{m}} \cdot e^{a(t_1 - t)} \cdot \left(1 - e^{a(t_1 - t)}\right), \qquad (1)$$

где t_1 – время окончания участка вертикального полета; α_{m} – амплитудное значение угла атаки; a – параметр программы полета, с$^{-1}$.

При заданных проектно-баллистических параметрах (ПБП) ракеты коэффициент a зависит от величины амплитуды угла атаки α_{m}. Он должен быть подобран так (см. [7]), чтобы в конце программного разворота, то есть при пренебрежимо малом угле атаки (в настоящей работе принято значение $-0{,}01 \cdot \alpha_{\text{m}}$) скорость ракеты, которую в дальнейшем условимся обозначать $V_{0,8}$, была бы не более (но и, желательно, не намного менее), величины, соответствующей 0,8·М. Это составляет примерно 0,8·0,330=0,264 км/с. Таким образом, выбор параметра a программы полета из формулы (1) представляет собой отдельную задачу.

На рисунке 1 показано как раз такое соотношение величин $V_{0,8}$ и $\alpha = -0{,}01 \cdot \alpha_{\text{m}}$ для значения a=0,3412 с$^{-1}$ и проектно-баллистических параметров ракеты из рассмотренного далее примера. Как нетрудно видеть, указанные необходимые значения скорости полета (0,264 км/с) и угла атаки (–0,01·6,0°) достигаются примерно на 23-й секунде полета.

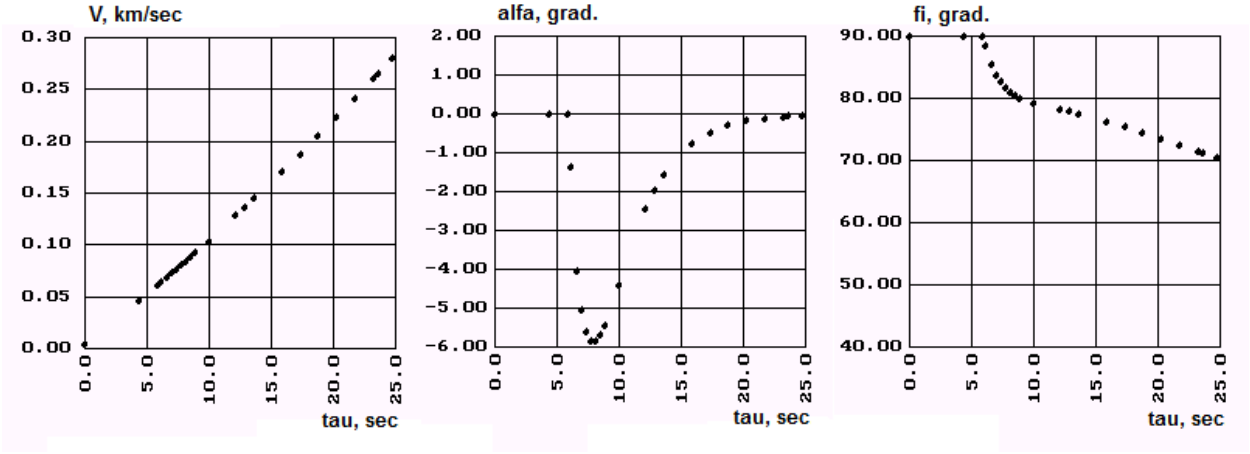

Рис. 1. Изменение по времени (tau): величины скорости (V); угла атаки (alfa); угла тангажа (fi) на участке программного разворота по углу атаки

Решения этой проблемы можно избежать, если задавать программный угол атаки, как это предложено, например, в [1,5], а именно:

$$\alpha_{\text{пр}}(\text{M}) = -4 \cdot \alpha_{\text{m}} \cdot e^{\tilde{a}(\text{M}_1 - \text{M})} \cdot \left(1 - e^{\tilde{a}(\text{M}_1 - \text{M})}\right). \qquad (2)$$

Здесь аргументом функции $\alpha_{\text{пр}}$ является число Маха M; M_1 - значение числа Маха, соответствующее моменту окончания вертикального подъема. Приняв (см. [1]), что M_1=0,1, получают значение $\tilde{a} \approx 5{,}25$.

Неудобство такого подхода, на наш взгляд, состоит в том, что число Маха само определяется в результате интегрирования уравнений движения, и не связано строго только со временем полета и ПБП рассматриваемого ЛА.

Далее в статье изложен способ определения временного параметра *a* программы угла атаки из формулы (1), основанный на одном из методов условной оптимизации и решении нелинейного уравнения.

Поставленная задача решается при следующих допущениях:

1) движение летательного аппарата – плоское;

2) ограничений на скорость изменения угла тангажа не накладывается.

Текущее время полета (в пределах работы одной ступени) вычисляется как

$$t = (1 - \mu) \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}. \qquad (3)$$

Здесь μ - относительная масса ракеты; ν_0 – начальная нагрузка на тягу (для второй и третьей ступени используется $\nu_{\text{П}}$ – нагрузка на тягу в пустоте); $I_{\text{уд.0}}$ – удельный импульс тяги на Земле, м/с.

Следовательно, для значения t_1 из формулы (1) получаем:

$$t_1 = (1 - \mu_1) \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} = (1 - 0{,}96) \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} = 0{,}04 \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}. \qquad (4)$$

Определим значение μ_2:

$$\alpha(\mu_2) = -0{,}01 \cdot \alpha_{\text{m}}. \qquad (5)$$

Рассматривается исходное уравнение:

$$-0{,}01 \cdot \alpha_{\text{m}} = -4 \cdot \alpha_{\text{m}} \cdot e^{a(t_1 - t)} \cdot \left(1 - e^{a(t_1 - t)}\right). \qquad (6)$$

Выполняя в формуле (6) замену переменной вида

$$y = e^{a(t_1 - t)}, \qquad (7)$$

получим квадратное уравнение:

$$-0{,}01 = -4 \cdot y \cdot (1 - y) \Leftrightarrow y^2 - y + 0{,}0025 = 0,$$

которое имеет два корня:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{0{,}99}}{2}; \qquad y_2 = \frac{1 - \sqrt{0{,}99}}{2}.$$

Как несложно убедиться, первое из них соответствует нисходящему участку функции программного угла атаки (см. рис. 1), а второе – как раз интересующему нас восходящему.

Соотношение, обратное приведенному в формуле (7), имеет вид:

$$e^{\ln(y)} = e^{a(t_1 - t)} \quad \Leftrightarrow \quad t = t_1 - \frac{\ln(y)}{a} \quad \Leftrightarrow \quad (1-\mu)\cdot \nu_0 P_{\text{уд.0}} = t_1 - \frac{\ln(y)}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\mu = 1 - \frac{t_1 - \dfrac{\ln(y)}{a}}{\nu_0 \cdot \dfrac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}}. \tag{8}$$

Тогда получаем, что

$$\mu_2 = 1 - \frac{t_1 - \dfrac{\ln\left(\dfrac{1-\sqrt{0{,}99}}{2}\right)}{a}}{\nu_0 \cdot \dfrac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}}. \tag{9}$$

Отметим, что если не соотносить величину угла атаки в конце программного разворота (см. формулу (5)) с амплитудой α_{m}, принципиально ничего не изменится. В этом случае параметр α_{m} в явном виде войдет в окончательное выражение (9) для определения μ_2.

Таким образом, параметр программы полета a при известном значении α_{m} может быть определен из решения нелинейного уравнения

$$\frac{V_{0,8}}{0{,}264} - 1 = 0\,. \tag{10}$$

Здесь $V_{0,8}=V(\mu_2(a))$ – значение скорости ракеты в конце программного разворота по углу атаки, которое при заданных ПБП и α_{m} является функцией параметра программы полета a. Эта скорость определяется интегрированием уравнений движения ракеты на АУТ при изменении μ от 1 до μ_2.

Сделаем некоторые замечания. Из анализа выражения (9) видно, что чем больше величина параметра полета a, тем меньше будет значение μ_2, и, следовательно, за меньшее время произойдет программный разворот. Сокращение времени разворота, безусловно, в реальных условиях полета повлечет за собой увеличение нагрузок на органы управления, которые могут превысить допустимые. При решении задачи проектирования ЛА величина α_{m} может быть заранее неизвестна, и являться одной из координат искомого вектора проектных параметров. Поэтому проанализируем, какие формальные ограничения, не относящиеся к характеристикам автомата стабилизации и конструкции органов управления, накладываются на нее.

Закон изменения угла наклона траектории к местному горизонту (МГ) ϑ может быть получен в результате интегрирования дифференциального уравнения [8]:

$$\frac{d\vartheta}{d\mu}=\frac{1}{V}\cdot\left(\left(-\frac{I_{\text{уд.0}}\cdot a^{\text{Э}}}{\mu}+\frac{p_{\text{h}}}{p_0}\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}\cdot\left(a^{\text{Э}}-1\right)}{\mu}\right)\cdot\sin\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{C_{\text{Y}}\cdot q\cdot\nu_0\cdot I_{\text{уд.0}}}{\mu\cdot p_{\text{M}}}+\left(g-\frac{V^2}{R_{\oplus}+H}\right)\cdot\nu_0\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}\cdot\cos\vartheta\right). \qquad (11)$$

Здесь V – скорость полета, км/с; H – высота полета, км; $a^{\text{Э}}$ – коэффициент увеличения тяги в пустоте; g_0, g – ускорение свободного падения на Земле и на высоте полета соответственно, км/с^2; p_{h}, p_0 – давление окружающей среды на высоте полета и на Земле; p_{M} – стартовая нагрузка на мидель (для расчетов в настоящей работе принимается $p_{\text{M}}=10^5$ Н/м^2); $q=\frac{\rho V^2}{2}$ - скоростной напор, величину которого следует вычислять в таких единицах, чтобы в результате второе слагаемое из формулы (11) имело размерность км/с; C_{Y} – аэродинамический коэффициент подъемной силы; $R_{\oplus}$ - радиус Земли, км.

Вполне очевидно, что в формуле (11) первое слагаемое (при синусе угла атаки) – отрицательное. Тогда, чем меньше отрицательный угол атаки (см. соотношение (1)), тем больше значение производной $\frac{d\vartheta}{d\mu}$, и тем, следовательно, быстрее убывает угол ϑ по времени.

Во время гравитационного разворота угол атаки равен нулю (α=0), и уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{d\vartheta}{d\mu}=\frac{1}{V}\cdot\left(g-\frac{V^2}{R_{\oplus}+H}\right)\cdot\nu_0\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}\cdot\cos\vartheta. \qquad (12)$$

Скорость ракеты в конце работы первой ступени не превышает значения 5,0 км/с, поэтому правая часть уравнения (12), в чем легко убедиться – положительна. Следовательно, с уменьшением относительной массы ракеты μ угол наклона траектории к МГ ϑ на участке гравитационного разворота будет также уменьшаться.

Уменьшение значения ϑ больше допустимого значения может привести к последующему уменьшению высоты полета до отрицательной величины. Отсутствие этого эквивалентно выполнению условия, что угол наклона траектории к МГ на всем участке работы первой ступени не становится отрицательным, а именно:

$$\vartheta(\tau_{\text{I}})\geq 0. \qquad (13)$$

Тогда если диапазон изменения величины α_{m} заранее неизвестен, можно сформулировать задачу нелинейного программирования: для заданных ПБП ракеты определить максимально допустимое значение амплитуды угла атаки

$$\alpha_{\text{m}}\to\max\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha_{\text{m}}}\to\min \qquad (14)$$

при наличии ограничений: типа равенства (см. формулу (10)) и типа неравенства (см. формулу (13)).

Отметим, что в работе [9] вместо ограничения (10), относящегося к скорости полета, используется требование достижения к моменту окончания программного разворота высоты 3,5 км.

Задача (14) при ограничениях (10) и (13) может быть решена методом множителей [10] относительно вектора неизвестных:

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T = [\alpha_{\text{m}}, a]^T, \tag{15}$$

то есть, сводится к отысканию экстремума модифицированной функции Лагранжа, которая в данном случае записывается как

$$F(\mathbf{X}, \lambda_1, \lambda_2, c) = 0{,}01 \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{m}}} + \lambda_1 \left(\frac{V_{0,8}}{0{,}264} - 1 \right) + \lambda_2 \left(\langle \vartheta_{\text{I}} \rangle \right) + \frac{1}{2} c \left(\left(\frac{V_{0,8}}{0{,}264} - 1 \right)^2 + \left(\langle \vartheta_{\text{I}} \rangle \right)^2 \right). \tag{16}$$

Здесь λ_1, λ_2, – неопределенные множители Лагранжа; c – параметр штрафа, при достижении которым достаточно большого значения функция (16) становится выпуклой); 0,01 – множитель, который вводится для масштабирования задачи.

Ограничение типа неравенства (см. соотношения (13), (16)) учитывается при помощи оператора срезки [11]

$$\langle x \rangle = \begin{cases} |x|, & x < 0; \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи условной оптимизации методом множителей (см. [10]) состоит из следующих шагов.

1. Задается начальное приближение для компонент вектора **X** (см. формулу (15)), например α_{m}=1,0° и a=0,3 1/с.

2. Задаются начальные значения множителей Лагранжа $\lambda_i^{(0)} = 0$, i=1,2, а также начальное значение параметра штрафа c, которое во всех рассмотренных здесь примерах принято равным 40 ($c^{(0)}$=40).

3. Для фиксированных значений множителей Лагранжа λ_1, λ_2 и параметра штрафа «c» с заданной точностью решается задача многомерной безусловной оптимизации, то есть определяется минимум функции $F(\mathbf{X},\lambda_1,\lambda_2,c)$ (см. формулу (16)). Эта задача решается методом детерминированного покоординатного спуска [12] с точностью ε_1. Решение считается достигнутым, если выполняется условие вида [13]:

$$\frac{\left| F\left(\mathbf{X}^{(P)}, \lambda_1, \lambda_2, c\right) - F\left(\mathbf{X}^{(P-1)}, \lambda_1, \lambda_2, c\right) \right|}{1 + \left| F\left(\mathbf{X}^{(P)}, \lambda_1, \lambda_2, c\right) \right|} < \varepsilon_1. \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{X}^{(P)}$ – вектор, вычисленный на шаге номер «P» спуска по всем координатам (см. формулу (16)). Для рассматриваемого в статье примера было принято значение ε_1=10^{-5}.

4. Производится пересчет значений множителей Лагранжа по формулам:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(N+1)} = \lambda_1^{(N)} + c^{(N)} \cdot \left(\dfrac{V_{0,8}}{0,264} - 1 \right); \\ \lambda_2^{(N+1)} = \lambda_2^{(N)} + c^{(N)} \cdot \left(\langle \vartheta_1 \rangle \right). \end{cases} \tag{18}$$

Здесь «N» - номер итерации решения задачи условной оптимизации.

5. Вычисляется значение параметра штрафа по формуле:

$$c^{(N+1)} = \beta \cdot c^{(N)}, \tag{19}$$

где $\beta \geq 1,0$. В расчетах, произведенных в данной работе, принято β=4,0.

6. Вычисляется точность ε_2 (в настоящей работе $\varepsilon_2=5\cdot10^{-5}$) решения задачи условной оптимизации по формуле, аналогичной соотношению (17):

$$\varepsilon_2 = \frac{\left| F\left(\mathbf{X}^{(N)}, \lambda_1^{(N)}, \lambda_2^{(N)}, c^{(N)}\right) - F\left(\mathbf{X}^{(N-1)}, \lambda_1^{(N-1)}, \lambda_2^{(N-1)}, c^{(N-1)}\right) \right|}{1 + \left| F\left(\mathbf{X}^{(N)}, \lambda_1^{(N)}, \lambda_2^{(N)}, c^{(N)}\right) \right|}. \tag{20}$$

Если точность по значениям модифицированной функции Лагранжа, вычисленная на итерации номер «N», недостаточная, то осуществляется переход к шагу номер 3.

Отличие метода множителей от метода штрафных функций (см. [10,11]) состоит в том, что здесь не требуется бесконечно увеличивать значение параметра штрафа (см. соотношение (19)). Путем проведения численного эксперимента было получено, что для задач баллистического проектирования ЛА в формуле (19) можно установить значение β=1,0 по достижении параметром штрафа величины $5\cdot10^4$ ($c=5\cdot10^4$).

После того, как определено максимально допустимое значение амплитуды угла атаки α_m^{MAX} (см. формулу (16)), можно, предварительно задав, например, α_m^{MIN}=0,05°, разбить интервал

$$[\alpha_m^{MIN}, \alpha_m^{MAX}], \tag{21}$$

на участки, и вычислить значение программы полета a в каждой узловой точке.

Так как значение α_m^{MAX} уже вычислено, теперь не нужно заботиться о чрезмерном снижении ЛА, и значит, величина a может быть определена только из решения нелинейного уравнения (10), а именно:

$$\frac{V_{0,8}}{0,264} - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0. \tag{22}$$

Функция $V_{0,8}(a)$, как может быть показано, является монотонно убывающей. В самом деле:

$$\frac{dV_{0,8}}{da} = \frac{dV_{0,8}}{d\mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{da}. \tag{23}$$

При этом для сомножителей из формулы (23) выполняются следующие соотношения. Для первого сомножителя: $\dfrac{dV_{0,8}}{d\mu_2} < 0$ - ракета непрерывно набирает скорость с уменьшением относительной массы μ.

Для второго сомножителя:

$$\frac{d\mu_2}{da} = -\frac{\ln\left(\frac{1-\sqrt{0{,}99}}{2}\right)}{\nu_0 \cdot P_{\text{уд.0}}} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1-\sqrt{0{,}99}}{2}\right)}{\nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} \cdot a^2} > 0. \qquad (24)$$

Следовательно $\frac{dV_{0,8}}{da} < 0$.

Ввиду монотонности функции $V_{0,8}(a)$ уравнение (22) будет иметь только один корень, и может быть решено методом Ньютона [14]. То есть очередное приближение для искомого значения a определяется как

$$a^{(N+1)} = a^{(N)} - \left.\frac{\varphi(a)}{\frac{d}{da}(\varphi)}\right|_{a=a^{(N)}}. \qquad (25)$$

Здесь значение функции

$$\varphi(a) = \frac{V_{0,8}}{0{,}264} - 1$$

определяется численным интегрированием уравнений движения ЛА на АУТ; N – номер итерации.

Знаменатель выражения (25) вычисляется как производная сложной функции, а именно (см. формулу (24)):

$$\left.\frac{d}{da}(\varphi)\right|_{a=a^{(N)}} = \left.\frac{d\varphi}{d\mu_2}\right|_{a=a^{(N)}} \cdot \left.\frac{d\mu_2}{da}\right|_{a=a^{(N)}} = \frac{1}{0{,}264} \cdot \left.\frac{dV}{d\mu_2}\right|_{a=a^{(N)}} \cdot (-1) \cdot \frac{\ln\left(\frac{1-\sqrt{0{,}99}}{2}\right)}{\left(a^{(N)}\right)^2 \cdot \nu_0 \cdot I_{\text{уд0}}}. \qquad (26)$$

После того, как вычислены значения параметра a, соответствующие узловым точкам α_m из интервала (21), этот параметр программы полета для произвольного значения амплитуды угла атаки с достаточной степенью точности можно определить аппроксимацией полиномами Лагранжа (см. [14]).

2. Особенности численной реализации

Предложенная методика была реализована в виде оригинальной программы на алгоритмическом языке PASCAL. Остановимся на некоторых вопросах численной реализации.

На рисунке 2 показаны: системы координат, внешние силы, действующие на ЛА, а также входящие в уравнения движения угловые величины.

Использованы следующие обозначения: **C** – центр масс ракеты; **xOy** – стартовая система координат (СК); $\mathbf{Cx_1}$ – главная ось связанной СК; $\mathbf{Cx_2}$ – главная ось скоростной СК; **Mg** – сила тяжести; **X, Y** – сила лобового сопротивления и подъемная сила; **P** – сила тяги; **V** – скорость; **r** – радиус-вектор.

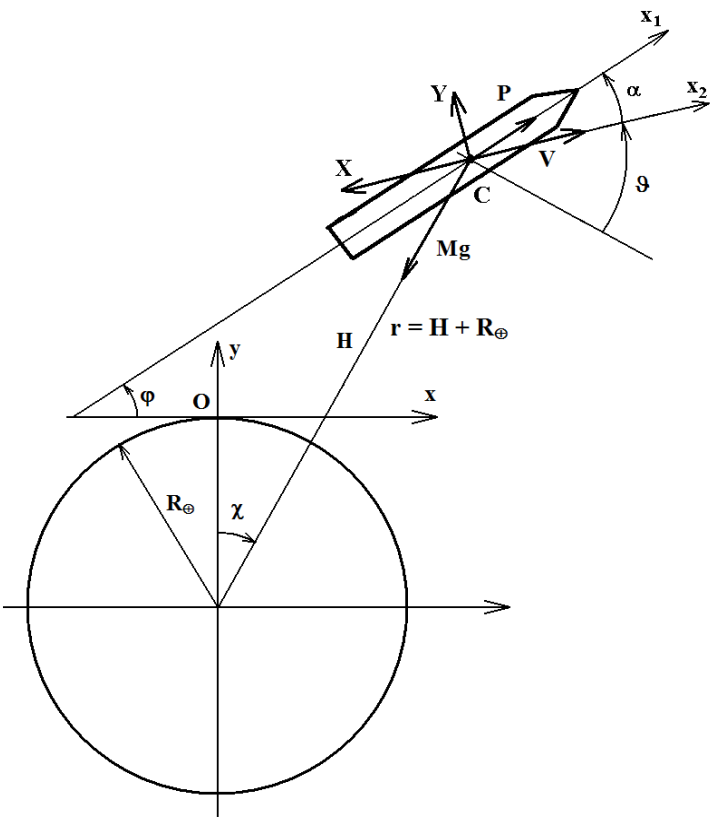

Рис. 2. Угловые координаты, определяющие положение ЛА. Внешние силы, действующие на АУТ

Уравнения движения ЛА как материальной точки на АУТ имеют вид (см. [8]):

$$\frac{dV}{d\mu}=\left(-\frac{I_{\text{уд.0}}\cdot a^{\text{Э}}}{\mu}+\frac{p_{\text{h}}}{p_0}\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}\cdot\left(a^{\text{Э}}-1\right)}{\mu}\right)\cdot\cos\alpha+\frac{C_{\text{X}}\cdot q\cdot\nu_0\cdot I_{\text{уд.0}}}{\mu\cdot p_{\text{M}}}+g\cdot\nu_0\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}\cdot\sin\vartheta; \quad (27)$$

$$\frac{dH}{d\mu}=-V\cdot\nu_0\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}\cdot\sin\vartheta; \quad (28)$$

$$\frac{d\chi}{d\mu}=-\frac{V}{R_{\oplus}+H}\cdot\nu_0\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}\cdot\cos\vartheta; \quad (29)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\mu}=\frac{1}{V}\cdot\left(\left(-\frac{I_{\text{уд.0}}\cdot a^{\text{Э}}}{\mu}+\frac{p_{\text{h}}}{p_0}\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}\cdot\left(a^{\text{Э}}-1\right)}{\mu}\right)\cdot\sin\alpha-\right.$$

$$\left.-\frac{C_{\text{Y}}\cdot q\cdot\nu_0\cdot I_{\text{уд.0}}}{\mu\cdot p_{\text{M}}}+\left(g-\frac{V^2}{R_{\oplus}+H}\right)\cdot\nu_0\cdot\frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0}\cdot\cos\vartheta\right). \quad (30)$$

Здесь χ полярный угол (координата); C_{X} – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления.

Аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы с учетом малости углов атаки на атмосферном участке полета могут быть представлены как

$$\begin{cases} C_{\text{X}}(M,\alpha) = C_{\text{X1}} \cdot \cos\alpha + C_{\text{Y1}} \cdot \sin\alpha = \left| \begin{array}{c} \sin\alpha \approx \alpha; \\ \cos\alpha \approx 1; \\ C_{\text{Y1}} = C_{\text{Y1}}^{\alpha} \cdot \alpha; \\ C_{\text{X1}} = C_{\text{X1}}^{0} \end{array} \right| = C_{\text{X1}}^{0} + C_{\text{Y1}}^{\alpha} \cdot \alpha^2 \approx C_{\text{X1}}^{0}; \\ C_{\text{Y}}(M,\alpha) = -C_{\text{X1}} \cdot \sin\alpha + C_{\text{Y1}} \cdot \cos\alpha = \left(C_{\text{Y1}}^{\alpha} - C_{\text{X1}}^{0}\right) \cdot \alpha, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$\begin{cases} C_{\text{X1}}^{0} = C_{\text{X1}}(\text{M},0); \\ C_{\text{Y1}}^{\alpha} = \left.\dfrac{\partial C_{\text{Y1}}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}. \end{cases} \tag{32}$$

Здесь M – число Маха.

При интегрировании уравнений движения (27) – (30) коэффициенты из формул (31) могут быть приняты согласно [15], а именно:

$$C_{\text{X1}}^{0} = \begin{cases} 0{,}29, \quad 0 \le \text{M} \le 0{,}8; \\ \text{M} - 0{,}51, \quad 0{,}8 \le \text{M} \le 1{,}068; \\ 0{,}091 + \dfrac{0{,}5}{\text{M}}, \quad \text{M} \ge 1{,}068; \end{cases} \tag{33}$$

$$C_{\text{Y1}}^{\alpha} = \begin{cases} 2{,}8, \quad 0 \le \text{M} \le 0{,}25; \\ 2{,}8 + 0{,}447 \cdot (\text{M} - 0{,}25), \quad 0{,}25 \le \text{M} \le 1{,}1; \\ 3{,}18 - 0{,}660 \cdot (\text{M} - 1{,}1), \quad 1{,}1 \le \text{M} \le 1{,}6; \\ 2{,}85 + 0{,}350 \cdot (\text{M} - 1{,}6), \quad 1{,}6 \le \text{M} \le 3{,}6; \\ 3{,}55, \quad \text{M} \ge 3{,}6. \end{cases} \tag{34}$$

Сделаем некоторые замечания, относящиеся к интегрированию уравнений движения.

Во-первых, целесообразно нормировать переменные из уравнений движения так, чтобы их величины принадлежали интервалу [0,1]. Этого можно добиться, умножив интегрируемые переменные на масштабные коэффициенты, а именно:

$$V = \overline{V} \cdot V_{12}; H = \overline{H} \cdot H_{12}; \chi = \overline{\chi} \cdot \chi_{12}; \vartheta = \overline{\vartheta} \cdot \vartheta_{12}. \tag{35}$$

Эти множители могут быть заданы как ориентировочные параметры конца АУТ управляемой баллистической ракеты, рассчитанной на дальность 12000 км (см. [6]). Тогда

V_{12}=7,4 км/с; H_{12}=300 км; χ_{12}=370/$R_{\oplus}$=0,0581; ϑ_{12}=π/2.

После выполнения преобразования по формулам (35), уравнения движения (27) – (30) принимают вид:

$$\frac{d\overline{V}}{d\mu} = \frac{1}{V_{12}} \left[\left(-\frac{I_{\text{уд.0}} \cdot a^{\text{Э}}}{\mu} + \frac{p_{\text{h}}}{p_0} \cdot \frac{I_{\text{уд.0}} \cdot \left(a^{\text{Э}} - 1\right)}{\mu} \right) \cdot \cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{\text{X}} \cdot q \cdot \nu_0 \cdot I_{\text{уд.0}}}{\mu \cdot p_{\text{M}}} + g \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} \cdot \sin\left(\overline{\vartheta} \cdot \vartheta_{12}\right) \right]; \tag{36}$$

$$\frac{d\overline{H}}{d\mu} = -\frac{1}{H_{12}} \cdot \overline{V} \cdot V_{12} \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} \cdot \sin\left(\overline{\vartheta} \cdot \vartheta_{12}\right); \tag{37}$$

$$\frac{d\overline{\chi}}{d\mu} = -\frac{1}{\chi_{12}} \cdot \frac{\overline{V} \cdot V_{12}}{R_{\oplus} + \overline{H} \cdot H_{12}} \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} \cdot \cos\left(\overline{\vartheta} \cdot \vartheta_{12}\right); \tag{38}$$

$$\frac{d\overline{\vartheta}}{d\mu} = \frac{1}{\vartheta_{12}} \cdot \frac{1}{\overline{V} \cdot V_{12}} \cdot \left(\left(-\frac{I_{\text{уд.0}} \cdot a^{\text{Э}}}{\mu} + \frac{p_{\text{h}}}{p_0} \cdot \frac{I_{\text{уд.0}} \cdot \left(a^{\text{Э}} - 1\right)}{\mu} \right) \cdot \sin\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{\text{Y}} \cdot q \cdot \nu_0 \cdot I_{\text{уд.0}}}{\mu \cdot p_{\text{M}}} + \left(g - \frac{\left(\overline{V} \cdot V_{12}\right)^2}{R_{\oplus} + \overline{H} \cdot H_{12}} \right) \cdot \nu_0 \cdot \frac{I_{\text{уд.0}}}{g_0} \cdot \cos\left(\overline{\vartheta} \cdot \vartheta_{12}\right) \right). \tag{39}$$

Нормирование уравнений движения позволяет ввести контроль точности на шаге интегрирования системы уравнений (36) – (39) методом Рунге-Кутта 4-го порядка (см. [14]), а также существенно сократить время выполнения этой процедуры, что актуально ввиду многократного ее вызова в алгоритме оптимизации. Для рассмотренного ниже примера интегрирование уравнений движения производилось с точностью $\varepsilon_3=10^{-8}$ на шаге, при этом использовались переменные с двойной точностью.

Аппроксимация параметров стандартной атмосферы [16] для высот более 10 км производилась с использованием полиномов Лагранжа четвертого порядка по точкам, взятым через каждые 5 км. В [8] отмечено, что такая точность является вполне достаточной при решении задач проектирования.

3. Результаты решения тестового примера

В качестве решения тестового примера представим результат подбора параметров программы полета α_{m} и a для спроектированной по программе RK1 [17] одноступенчатой баллистической ракеты.

** ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ **
дальность макс. -1500.0 [км]
масса полезного груза - 750.0 [кг]
давление в камере сгорания -18.0 [МПа]
давление в выходном сечении - .070 [МПа]
расходный комплекс -173.32 [сек]
показатель изоэнтропы -1.144
плотность горючего - 786.0 [кг/куб.м]
плотность окислителя -1442.0 [кг/куб.м]
стехиометрическое соотношение - 3.06
коэффициент избытка окислителя -1.00
** ПРОЕКТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ **
** Массовые и габаритные характеристики **
* нагрузка на тягу - .509

* относительная конечная масса - .234
* масса стартовая - 7857.5 [кг]
* диаметр -1.100 [м]
** Параметры конца активного участка **
* скорость Vк -3415.5 [м/сек]
* угол траектории Teta - 39.98 [град.]
* координата Xк - 84.6 [км]
* координата Yк - 89.8 [км]
* время активного участка Тк -113.1 [сек]
** Параметры ДУ **
* удельный импульс нулевой -2842.6 [м/сек]
* удельный импульс пустотный -3106.1 [м/сек]

Для заданных ПБП ракеты были получены следующие значения:

$$\alpha_m=5{,}865°; \quad a=0{,}3410\ \text{с}^{-1},$$

а также соответствующие им параметры конца АУТ:

$$V_A=3{,}397\ \text{км/с}; \quad \vartheta_A=39{,}98°; \quad X_A=84{,}6\ \text{км}; \quad Y_A=88{,}4\ \text{км}.$$

Как следует из сопоставления результатов для конца АУТ в программе RK1 и во вновь разработанной программе, они практически полностью совпадают.

В заключение приведем результаты вычисления частных производных от скорости и от угла траектории в конце АУТ по параметру *a*. Для исходных данных тестового примера получим:

$$\frac{\partial V_A}{\partial a}=-3{,}765\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{км}}{\text{с}}\cdot\text{с}; \quad \frac{\partial \vartheta_A}{\partial a}=58{,}83\ °\cdot\text{с}.$$

Последняя производная при погрешности задания Δa=0,01 с$^{-1}$ дает для ϑ_A поправку порядка 0,6°, что является весьма значительной величиной (см. [8]).

Заключение

1. Предложена методика определения временного параметра программы угла атаки, а также максимально допустимого значения амплитуды изменения этого угла как функции проектно-баллистических параметров ракеты.

2. Разработана компьютерная программа на алгоритмическом языке PASCAL, реализующая предложенную методику.

3. Приведено решение тестового примера, показавшее хорошее соответствие результатов, полученных в данной работе, и при использовании ранее разработанной программы «RK1».

4. Проведена оценка влияния погрешности определения временного параметра программы угла атаки на значение угла наклона траектории к местному горизонту в конце АУТ.

5. Расчеты, проведенные при подготовке данной работы, показали, что метод множителей может быть использован как при проведении проектных расчетов ЛА [18], так и для определения параметров программы полета.

6. Данный материал может быть использован при разработке учебных компьютерных программ определения проектно-баллистических и проектно-конструктивных параметров летательных аппаратов, а также в программах семинарских занятий учебных дисциплин «Основы устройства ЛА» и «Проектирование ЛА».

Список литературы

1. Алифанов О.М., Андреев А.Н., Гущин В.Н., Золотов А.А., Матвеев Ю.А., Перелыгин В.П., Хохулин В.С. Баллистические ракеты и ракеты-носители. М.: Дрофа, 2004. 512 с.
2. Лысенко Л.Н. Наведение и навигация баллистических ракет. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 672 с.
3. Мишин В.П., Безвербый В.К., Панкратов Б.М., Зернов В.И. Основы проектирования летательных аппаратов (транспортные системы). М.: Машиностроение, 2005. 375 с.
4. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 407 с.
5. Сердюк В.К. Проектирование средств выведения космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2009. 504 с.
6. Николаев Ю.М., Соломонов Ю.С. Инженерное проектирование управляемых баллистических ракет с РДТТ. М.: Воениздат, 1979. 240 с.
7. Феодосьев В.И. Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. 496 с.
8. Разумеев В.Ф. Выбор проектно-баллистических параметров ракет. М.: Изд-во МВТУ, 1973. 154 с.
9. Мазгалин Д.В., Починский В.И. Метод определения азимута пуска и программы угла тангажа на атмосферном активном участке полета ракеты-носителя // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2010. № 22 (198). С. 47-50.
10. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа : пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
11. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: пер. с англ. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1986. 350 с.
12. Бейко И.В., Бублик В.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. К.: Вища школа, 1983. 512 с.
13. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 632 с.

15. Варфоломеев В.И., Копытов М.И. Проектирование и испытания баллистических ракет. М.: Воениздат, 1970. 392 с.
16. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. Введ. 1982-07-01. М.: Изд-во стандартов, 1981. 180 с.
17. Генералов Н.Н. Методические указания по выбору ПБП БР с ЖРД. Вычислительная программа «RK1». М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1985. 24 с.
18. Баслык К.П., Генералов Н.Н., Кулешов Б.Г. Применение метода множителей для решения задачи баллистического проектирования ракеты-носителя // Инженерный журнал: наука и инновации. Электрон. журн. 2013. № 7 (19). Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/849.html (дата обращения 22.09.2014).

.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 10, pp. 192–208.

DOI: **10.7463/1014.0728843**

Received: 01.10.2014

© Bauman Moscow State Technical Unversity

Method for Determining the Time Parameter

K.P. Baslyk[1,*], N.N. Generalov[1], B.G. Kuleshov[1]

*kbaslyk@gmail.com

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: launch vehicle, active trajectory leg, program of flight, the program of attack angle, project and ballistic parameters, equations of motion of the launch vehicle, multiplier method, modified Lagrange function, Newton method

This article proposes a method for calculating one of the characteristics that represents the flight program of the first stage of ballistic rocket i.e. time parameter of the program of attack angle.

In simulation of placing the payload for the first stage, a program of flight is used which consists of three segments, namely a vertical climb of the rocket, a segment of programmed reversal by attack angle, and a segment of gravitational reversal with zero angle of attack.

The programed reversal by attack angle is simulated as a rapidly decreasing and increasing function. This function depends on the attack angle amplitude, time and time parameter.

If the projected and ballistic parameters and the amplitude of attack angle were determined this coefficient is calculated based the constraint that the rocket velocity is equal to 0.8 from the sound velocity (0,264 km/sec) when the angle of attack becomes equal to zero. Such constraint is transformed to the nonlinear equation, which can be solved using a Newton method.

The attack angle amplitude value is unknown for the design analysis. Exceeding some maximum admissible value for this parameter may lead to excessive trajectory collapsing (foreshortening), which can be identified as an arising negative trajectory angle.

Consequently, therefore it is necessary to compute the maximum value of the attack angle amplitude with the following constraints: a trajectory angle is positive during the entire first stage flight and the rocket velocity is equal to 0,264 km/sec by the end of program of angle attack. The problem can be formulated as a task of the nonlinear programming, minimization of the modified Lagrange function, which is solved using the multipliers method.

If multipliers and penalty parameter are constant the optimization problem without constraints takes place. Using the determined coordinate descent method allows solving the problem of modified Lagrange function of unconstrained minimization with fixed values of multipliers and parameter of penalty. The solving problem of the optimization without constraints is one step of the optimization problem with constraints.

The proposed method was realized as a computational Pascal-language program. There is the multiple call of Runge-Kutta method procedure for integration of motion equations. To re-

duce operation-use time, normalization of motion equations is used, and the 4-th order Runge-Kutta method time step accuracy control is also applied.

The program test results were compared with the solution, which was obtained using the existing software for the one stage missile design.

The general results obtained in this paper are following: numerical determination method of the attack angle time parameter and maximum allowed value of the attack angle amplitude as functions of the projected and ballistic parameters; software implementation of this method. Deviation of angle trajectory value at the end of active trajectory leg as a function of the error of the time parameter was obtained as well. This paper can be used in the courses of learning such as "Introduction to rocketry" and "Launch vehicle design".

References

1. Alifanov O.M., Andreev A.N., Gushchin V.N., Zolotov A.A., Matveev Iu.A., Perelygin V.P., Khokhulin V.S. *Ballisticheskie rakety i rakety-nositeli* [Ballistic missiles and booster rockets]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 512 p. (in Russian).
2. Lysenko L.N. *Navedenie i navigatsiia ballisticheskikh raket* [Guidance and navigation of ballistic missiles]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2007. 672 p. (in Russian).
3. Mishin V.P., Bezverbyi V.K., Pankratov B.M., Zernov V.I. *Osnovy proektirovaniia letatel'nykh apparatov (transportnye sistemy)* [Fundamentals of aircraft design (transportation systems)]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 375 p. (in Russian).
4. Sikharulidze Iu.G. *Ballistika i navedenie letatel'nykh apparatov* [Ballistics and guidance of aircraft]. Moscow, BINOM. Laboratoriia znanii Publ., 2011. 407 p. (in Russian).
5. Serdiuk V.K. *Proektirovanie sredstv vyvedeniia kosmicheskikh apparatov* [Designing spacecraft launch vehicles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009. 504 p. (in Russian).
6. Nikolaev Iu.M., Solomonov Iu.S. *Inzhenernoe proektirovanie upravliaemykh ballisticheskikh raket s RDTT* [Engineering design of guided ballistic missiles with solid fuel rocket engine]. Moscow, Voenizdat Publ., 1979. 240 p. (in Russian).
7. Feodos'ev V.I. *Osnovy tekhniki raketnogo poleta* [Basic techniques of rocket flight]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 496 p. (in Russian).
8. Razumeev V.F. V*ybor proektno-ballisticheskikh parametrov raket* [The choice of design and ballistic parameters of missiles]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1973. 154 p. (in Russian).
9. Mazgalin D.V., Pochinskii V.I. The method of determining the azimuth of the start and the tangage angle program on the active site of atmospheric flight of rocket launcher. *Vestnik Iuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Komp'iuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika = Bulletin of the South Ural State University. Series "Computer*

Technologies, Automatic Control and Radioelectronics", 2010, no. 22 (198), pp. 47-50. (in Russian).

10. Bertsekas D.P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York, 1982. (Russ. ed.: Bertsekas D.P. *Uslovnaia optimizatsiia i metody mnozhitelei Lagranzha*. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1987. 400 p.).
11. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. *Engineering Optimization: Methods and Applications*. John Wiley and sons, New York, 1983. (Russ. ed.: Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. *Optimizatsiia v tekhnike. V 2 t. T. 1*. Moscow, Mir Publ., 1986. 350 p.).
12. Beiko I.V., Bublik V.N., Zin'ko P.N. *Metody i algoritmy resheniia zadach optimizatsii* [Methods and algorithms for solving optimization problems]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1983. 512 p. (in Russian).
13. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. *Practical optimization*. Emerald Group Publishing Limited, 1982. 418 p. (Russ. ed.: Gill P.E., Murray W., Wright M.H. *Prakticheskaia optimizatsiia*. Moscow, Mir Publ., 1985. 509 p.).
14. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, BINOM. Laboratoriia znanii Publ., 2009. 632 p. (in Russian).
15. Varfolomeev V.I., Kopytov M.I. *Proektirovanie i ispytaniia ballisticheskikh raket* [Design and testing of ballistic missiles]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970. 392 p. (in Russian).
16. GOST 4401-81. Atmosfera standartnaia. Parametry [State Standard 4401-81. Standard atmosphere. Parameters]. Moscow, Standards Publishing House, 1981. 180 p. (in Russian).
17. Generalov N.N. *Metodicheskie ukazaniia po vyboru PBP BR s ZhRD. Vychislitel'naia programma "RK1"* [Methodological guidance on the choice of design and ballistic parameters of the BR with LRE. Computer program "RK1"]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1985. 24 p. (in Russian).
18. Baslyk K.P., Generalov N.N., Kuleshov B.G. Application of the method of multipliers for the ballistic designing of three-stage carrier rocket. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 7 (19). Available at: http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/849.html , accessed 22.09.2014. (in Russian).