Наука и Образование
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. №9. С. 65–74.
DOI: 10.7463/0914.0726862
Представлена в редакцию: 29.06.2014
© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 511.361

О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами в малых точках

Иванков П. Л.[1,*]

*ivankovpl@mail.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В работе рассматривается задача о линейной независимости значений обобщенных гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами. Для решения такой задачи нельзя непосредственно применить известный в теории трансцендентных чисел метод Зигеля, поскольку упомянутые функции не принадлежат к выделенному Зигелем специальному классу целых функций. Применение эффективной конструкции линейных приближающих форм потребовало наложения дополнительного условия на варьируемые параметры: разность этих параметров должна быть рациональным числом. В данной работе применяется эффективная конструкция совместных приближений, что позволило отказаться от последнего условия, однако при этом пришлось ограничиться значениями рассматриваемых функций в достаточно малой по абсолютной величине точке.

Ключевые слова: оценки линейных форм; совместные приближения; обобщенные гипергеометрические функции; иррациональные параметры.

Введение

В данной работе изучаются арифметические свойства значений гипергеометрических функций с различными параметрами, причём варьируемые параметры иррациональны. Ранее для решения такой задачи была использована эффективная конструкция линейных приближающих форм; при этом пришлось наложить дополнительное ограничение: разность варьируемых параметров должна быть рациональным числом. Использование совместных приближений позволяет избавиться от последнего требования, однако приводит к необходимости ограничиться значениями рассматриваемых функций лишь в достаточно малой по модулю точке.

1. Результаты

Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$, $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, $b(x) \in \mathbb{I}[x]$, $m = \deg b(x)$, $u = m + 1$, $b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим при $k = 1, 2$, $j = 1, \ldots, u$

функции

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)(x+\lambda_k)}. \tag{1}$$

Арифметическая природа значений гипергеометрических функций с различными параметрами изучалась в ряде работ (см., например, [1, 2]), причем обычно предполагалось, что варьируемые параметры (λ_1 и λ_2 в случае функций (1)) рациональны. Функции с различными иррациональными параметрами были рассмотрены в [3].

Теорема 1. Пусть выполнены все указанные выше условия, и пусть q — достаточно большое по модулю целое число из поля $\mathbb{I}$. Дополнительно предположим, что

$$b(0) = 0. \tag{2}$$

Тогда числа

$$F_{kj}\left(\frac{1}{q}\right), \quad k = 1,\, 2, \quad j = 1,\, \ldots,\, u, \tag{3}$$

линейно независимы над $\mathbb{I}$.

В отличие от теоремы работы [3] здесь не предполагается, что $\lambda_1 - \lambda_2$ является рациональным числом; нижняя граница для $|q|$, о которой речь в теореме 1, может быть эффективно вычислена. Применяемый метод позволяет также оценить снизу модуль однородной линейной формы от чисел (3).

2. Доказательства

Для доказательства теоремы работы [3] применялась эффективная конструкция аппроксимаций Паде первого рода. В данной работе мы применяем совместные приближения, что, как обычно, дает лучшие результаты. Пусть n — натуральное число, $N_1 = \left[\frac{2un}{2u-1}\right]$, $N_2 = \left[\frac{un}{2u-1}\right]$. Обозначим

$$\theta_{\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(z)\, dz}{\prod\limits_{x=N_1-\mu}^{N_1} (z+x)}, \quad \mu = 0,\, 1,\, \ldots,\, N_1,$$

где

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{2} \prod_{\sigma=0}^{N_2-1} (z - \lambda_k + \sigma), \tag{4}$$

а Γ — положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции. Рассмотрим вспомогательный многочлен

$$P(z) = \sum_{\mu=0}^{N_1} z^{\mu}\, \theta_{\mu} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} b(x), \tag{5}$$

с помощью которого определим бесконечные ряды

$$\frac{1}{N_2!} P(z) F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{kj\nu} z^{\nu} \tag{6}$$

и многочлены

$$P_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p_{kj\nu} z^{\nu}, \quad k = 1,\, 2, \quad j = 1,\, \ldots,\, u. \tag{7}$$

Лемма 1. Для любого многочлена $B(\mu)$, степень которого не превышает $N_2 - 1$, выполняются равенства

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu B(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{x+\lambda_k} = 0, \quad k = 1,\, 2.$$

Доказательство. Из теории рядов Ньютона (см., например, [4, с. 40–41]) и неравенства $2N_2 \leqslant N_1$ следует, что тождественно по z выполняется равенство

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu \prod_{x=N_1-\mu+1}^{N_1} (z+x) = \Phi(z).$$

Отсюда

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x} = \frac{\Phi(z)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(z+x)}.$$

Подставляя в это равенство $z = \lambda_k - \sigma$, получаем

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu B_{k\sigma}(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{x+\lambda_k} = \frac{\Phi(\lambda_k - \sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(\lambda_k - \sigma + x)}, \tag{8}$$

где

$$B_{k\sigma}(\mu) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} \frac{\lambda_k + N_1 - \mu - x}{\lambda_k - x}. \tag{9}$$

Если $0 \leqslant \sigma \leqslant N_2 - 1$, то правая часть равенства (8) равна нулю в силу (4). Поскольку любой многочлен от μ степени не выше $N_2 - 1$ можно представить в виде линейной комбинации многочленов $B_{k\sigma}(\mu)$, $\sigma = 0,\, 1,\, \ldots,\, N_2 - 1$, то отсюда вытекает требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 2. В правой части равенства (6) $p_{kj\nu} = 0$, $k = 1,\, 2$, $j = 1,\, \ldots,\, u$, $\nu = n+1,\, \ldots,\, N_1$.

Доказательство. Из (1), (5) и (6) получаем

$$N_2! p_{kj\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \theta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} b(x) \cdot (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{1}{b(x)(x+\lambda_k)} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu Q_{kj\nu}(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{x+\lambda_k}, \tag{10}$$

где

$$Q_{kj\nu}(\mu) = (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-\mu)(x+\lambda_k-\mu); \tag{11}$$

верхний индекс суммирования ν можно заменить на N_1 в силу условия (2). Степень многочлена $Q_{kj\nu}(\mu)$ меньше N_2, поэтому требуемое утверждение следует из леммы 1. Лемма доказана.

Заметим, что среди многочленов (7) имеются отличные от тождественного нуля (на самом деле ни один из них не равен нулю тождественно), так как, например,

$$p_{110} = \frac{\Phi(-N_1)}{N_2!} \prod_{x=1}^{N_1} b(x) \neq 0.$$

Лемма 3. Порядок нуля при $z = 0$ функций

$$R_{kjk'j'}(z) = P_{k'j'}(z)\, F_{kj}(z) - P_{kj}(z)\, F_{k'j'}(z), \quad k,\, k' = 1,\, 2, \quad j,\, j' = 1,\, \ldots,\, u, \tag{12}$$

не меньше $N_1 + 1$.

Доказательство. Очевидно, что разность

$$(P(z)\, F_{k'j'}(z))F_{kj}(z) - (P(z)\, F_{kj}(z))F_{k'j'}(z)$$

равна нулю тождественно. С другой стороны, в силу леммы 2 многочлены (7) можно записать в виде

$$P_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{N_1} p_{kj\nu} z^{\nu},$$

и тогда утверждение леммы легко следует из (6). Лемма доказана.

Мы видим, что многочлены $P_{kj}(z)$ можно использовать для получения совместных приближений функций (1). В дальнейшем через $\gamma_1,\, \gamma_2,\, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n и q (они могут зависеть от поля $\mathbb{I}$ и от параметров функций (1)).

Лемма 4. Справедливы оценки

$$|p_{kj\nu}| \leqslant e^{\gamma_1 n}\left(\frac{n!}{\nu!}\right)^u, \quad |P_{kj}(1/q)| \leqslant e^{\gamma_2 n}(n!)^u, \quad |R_{kjk'j'}(1/q)| \leqslant e^{\gamma_3 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}|q|^{\gamma_4 - \frac{2un}{2u-1}},$$
$$k,\, k' = 1,\, 2, \quad j,\, j' = 1,\, \ldots,\, u, \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$$

Лемма имеет чисто технический характер; перечисленные оценки вытекают из формул для коэффициентов многочленов $P_{kj}(z)$ и коэффициентов разложения функций $R_{kjk'j'}(z)$ в ряды по степеням z; при оценке модулей последних функций используется лемма 3.

Лемма 5. Для коэффициентов многочленов (7) справедливы равенства

$$p_{kj\nu} = \frac{1}{N_2!} \sum_{\sigma=N_2}^{N_3} \frac{\prod\limits_{x=1}^{\sigma}(\lambda_k - \sigma + x)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(\lambda_k - \sigma + x)} \Phi(\lambda_k - \sigma) \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{Q_{kj\nu}(z)dz}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma}(\lambda_k + N_1 - x - z)}, \tag{13}$$
$$k = 1,\, 2, \quad j = 1,\, \ldots,\, u, \quad \nu = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$$

В правой части (13) через N_3 обозначена максимальная из степеней многочленов $Q_{kj\nu}(z)$, определенных равенством (11); положительно ориентированная окружность Γ_1 охватывает все полюсы подынтегральной функции.

Доказательство. Воспользуемся равенствами (10) и (11). Разложив многочлены от μ из левой части (11) в ряды Ньютона, запишем их в виде

$$Q_{kj\nu}(\mu) = \sum_{\sigma=0}^{N_3} C_{kj\nu\sigma} B_{k\sigma}(\mu), \tag{14}$$

где $B_{k\sigma}(\mu)$ определяются равенством (9),

$$C_{kj\nu\sigma} = \prod_{x=0}^{\sigma-1}(\lambda_k - x)\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{Q_{kj\nu}(z)dz}{\prod\limits_{x=0}^{\sigma}(\lambda_k + N_1 - x - z)}. \tag{15}$$

Подставим в (10) вместо $Q_{kj\nu}(\mu)$ правую часть (14):

$$p_{kj\nu} = \frac{1}{N_2!}\sum_{\sigma=0}^{N_3} C_{kj\nu\sigma} \sum_{\mu=0}^{N_1} \theta_\mu B_{k\sigma}(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{x+\lambda_k}. \tag{16}$$

Заметим, что равенство (10) справедливо также и при $0 \leqslant \nu \leqslant n$. Из (8) следует, что внутренняя сумма в правой части (16) равна

$$\frac{\Phi(\lambda_k - \sigma)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(\lambda_k - \sigma + x)}.$$

Последнее выражение в силу (4) равно нулю при $0 \leqslant \sigma \leqslant N_2 - 1$, и, приняв во внимание (15), мы получаем требуемое. Лемма доказана.

Нам понадобятся оценки общего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{kj}(z)$. Общим знаменателем некоторого множества X чисел из поля $\mathbb{I}$ будем называть любое ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое каждое число из X становится целым в $\mathbb{I}$. Наименьший по модулю знаменатель множества X будем называть наименьшим общим знаменателем этого множества.

Лемма 6. Модуль общего наименьшего знаменателя чисел (13) не превышает величины $e^{\gamma_4 n}(n!)^{\frac{u}{2u-1}}$.

Доказательство. Из (4) следует, что

$$\Phi(\lambda_k - \sigma) = \prod_{k'=1}^{2}\prod_{\sigma'=0}^{N_2-1}(\lambda_k - \sigma - \lambda_{k'} + \sigma') = \pm\frac{\sigma!}{(\sigma - N_2)!N_2!}\cdot N_2!\cdot\prod_{\sigma'=0}^{N_2-1}(\lambda_k - \lambda_{k'} - \sigma + \sigma'),$$

где в последнем произведении $k' \in \{1, 2\},\ k' \neq k$. Заметим также, что

$$\frac{\prod\limits_{x=1}^{\sigma}(\lambda_k - \sigma + x)}{\prod\limits_{x=1}^{N_1}(\lambda_k - \sigma + x)} = \begin{cases} \prod\limits_{x=0}^{\sigma-N_1-1}(\lambda_k - x), & \sigma \geqslant N_1, \\ \prod\limits_{x=1}^{N_1-\sigma}\dfrac{1}{\lambda_k + x}, & N_2 \leqslant \sigma < N_1. \end{cases}$$

Интеграл, входящий в (13), можно записать в виде вычета относительно точки $z = \infty$. Такая запись показывает, что модуль общего наименьшего знаменателя этих интегралов (при всех допустимых значениях индексов k, j, ν, σ) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_5 n}$. Мы видим, что требуемая оценка общего наименьшего знаменателя чисел (13) фактически сводится к такой оценке для чисел

$$\frac{\prod\limits_{\sigma'=0}^{N_2-1}(\lambda_k - \lambda_{k'} - \sigma + \sigma')}{\prod\limits_{x=1}^{N_1-\sigma}(\lambda_k + x)},$$

где $k,\, k' \in \{1,\, 2\}$, $k \neq k'$, $N_2 \leqslant \sigma < N_1$. Здесь следует обратиться к теории делимости в квадратичных полях. Соответствующее рассуждение можно скопировать с доказательства леммы 4 работы [3], внеся в это доказательство лишь незначительные изменения технического характера. В результате получим, что модуль общего наименьшего знаменателя чисел (13) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_6 n}(n!)^{\frac{u}{2u-1}}$. Суммируя все вышесказанное, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Обращаясь к доказательству теоремы 1, заметим прежде всего, что при выполнении условий этой теоремы функции (1) линейно независимы над полем рациональных дробей — это следует из результатов работы [5]. Дальнейшие действия стандартны: многочлены (7) образуют совместные приближения для функций (1), причем среди этих многочленов есть отличные от нуля (см. замечание перед формулировкой леммы 3), и соответствующий порядок нуля при $z = 0$ разве лишь на константу отличается от максимально возможного. Известно (см., например, [6, с. 185]), что функции (1) удовлетворяют системе уравнений $Y' = AY$, где $Y = (y_{11},\, \ldots,\, y_{1u},\, y_{21},\, \ldots,\, y_{2u})^{\mathrm{T}}$, а $(2u{\times}2u)$-матрица коэффициентов $A = A(z)$ состоит из рациональных функций. Обозначим через $R_1(z)$ матрицу

$$\big(R^{(1)}_{kjk'j'}(z)\big), \quad k,\, k' = 1,\, 2, \quad j,\, j' = 1,\, \ldots,\, u, \tag{17}$$

где $R^{(1)}_{kjk'j'}(z) = R_{kjk'j'}(z)$; см. (12). Строки этой матрицы располагаются в порядке возрастания индекса k и в порядке возрастания j при равных k; аналогичное правило действует и в отношении столбцов, которые занумерованы парами индексов (k', j'). Тогда очевидно, что

$$R_1(z) = F(z)\, P_1(z) - (F(z)P_1(z))^{\mathrm{T}},$$

где

$$F(z) = \big(F_{11}(z),\, \ldots,\, F_{1u}(z),\, F_{21}(z),\, \ldots,\, F_{2u}(z)\big)^{\mathrm{T}},$$
$$P_1(z) = \big(P^{(1)}_{11}(z),\, \ldots,\, P^{(1)}_{1u}(z),\, P^{(1)}_{21}(z),\, \ldots,\, P^{(1)}_{2u}(z)\big),$$
$$P^{(1)}_{kj}(z) = P_{kj}(z), \quad k = 1,\, 2, \quad j = 1,\, \ldots,\, u.$$

Определим при $l = 2,\, 3,\, \ldots$ матрицы

$$R_l(z) = \big(R^{(l)}_{kjk'j'}(z)\big), \quad k,\, k' = 1,\, 2, \quad j,\, j' = 1,\, \ldots,\, u$$

с помощью равенств

$$R_l(z) = a(z)\big(R'_{l-1}(z) - A(z)\,R_{l-1}(z) + (A(z)R_{l-1}(z))^{\mathrm{T}}\big), \quad l = 2,\,3,\,\ldots,$$

строки и столбцы этих матриц упорядочены так же, как и в случае матрицы (17); через $a(z)$ обозначен общий наименьший знаменатель элементов матрицы $A(z)$. Непосредственно проверяется, что при этом $R_l(z) = F(z)\,P_l(z) - (F(z)\,P_l(z))^{\mathrm{T}}$, где

$$P_l(z) = \big(P_{11}^{(l)}(z),\ \ldots,\ P_{1u}^{(l)}(z),\ P_{21}^{(l)}(z),\ \ldots,\ P_{2u}^{(l)}(z)\big) = \\ = a(z)(P'_{l-1}(z) - P_{l-1}(z)A^{\mathrm{T}}), \quad l = 2,\,3,\,\ldots$$

Лемма 7. При всех достаточно больших n определитель

$$\Delta(z) = \big|P_{kj}^{(l)}(z)\big|, \quad l = 1,\,\ldots,\,2u, \quad k = 1,\,2, \quad j = 1,\,\ldots,\,u$$

отличен от тождественного нуля.

Доказательство можно скопировать с доказательства леммы 4 работы [7]; см. также [8]. Далее осуществим переход от функциональных линейных форм к числовым (подробности см. в работе [8]). Получающееся при этом утверждение приводим без доказательства.

Лемма 8. Для любого достаточно большого натурального числа n найдется набор чисел

$$v_{11}^{(l)},\ \ldots,\ v_{1u}^{(l)},\ v_{21}^{(l)},\ \ldots,\ v_{2u}^{(l)}, \quad l = 1,\,\ldots,\,2u, \tag{18}$$

обладающий следующими свойствами

1) $\det(v_{kj}^{(l)})_{\substack{l=1,\ldots,2u;\\ k=1,2,\ j=1,\ldots,u}} \neq 0$;

2) $\big|v_{kj}^{(l)}\big| \leqslant e^{\gamma_7 n}|q|^{\gamma_7+n}(n!)^u$;

3) $\left|v_{kl}^{(l)}F_{k'j'}\left(\dfrac{1}{q}\right) - v_{k'j'}^{(l)}F_{kj}\left(\dfrac{1}{q}\right)\right| \leqslant e^{\gamma_7 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}\,|q|^{\gamma_7-\frac{n}{2u-1}}$;

4) модуль общего наименьшего знаменателя чисел (18) оценивается сверху величиной $|q|^{\gamma_7}e^{\gamma_7 n}(n!)^{\frac{u}{2u-1}}$.

Перечисленные свойства выполняются при всех допустимых значениях индексов.

Из последней леммы нетрудно вывести утверждение теоремы. Пусть $h_{11},\,\ldots,\,h_{1u}$, $h_{21},\,\ldots,\,h_{2u}$ — произвольный нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$. При некотором значении l, $1 \leqslant l \leqslant 2u$, имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{u} h_{kj}v_{kj}^{(l)}\right| \geqslant q^{-\gamma_7}e^{-\gamma_7 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}. \tag{19}$$

С другой стороны, $F_{11}(0) = 1$, и, следовательно, $F_{11}\left(\dfrac{1}{q}\right) \neq 0$ при достаточно большом (по модулю) значении q. Поэтому при таком q левую часть (19) можно записать в виде

$$\frac{1}{\left|F_{11}\left(\frac{1}{q}\right)\right|}\left|v_{11}^{(l)}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m} h_{kj}F_{kj}\left(\frac{1}{q}\right) + \sum_{(k,j)\neq(1,1)} h_{kj}\left(v_{kj}^{(l)}F_{11}\left(\frac{1}{q}\right) - v_{11}^{(l)}F_{kj}\left(\frac{1}{q}\right)\right)\right|. \tag{20}$$

Последняя сумма распространена на все допустимые значения индексов k и j, удовлетворяющие указанному условию. Если предположить, что двойная сумма в (20) равна нулю, то мы получим, учитывая неравенство (19) и третье свойство чисел $v_{kj}^{(l)}$ из леммы 8, такое соотношение

$$\frac{1}{\left|F_{11}\left(\frac{1}{q}\right)\right|}\sum_{(k,j)\neq(1,1)}|h_{kj}|e^{\gamma_7 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}|q|^{\gamma_7-\frac{n}{2u-1}}\geqslant|q|^{-\gamma_7}e^{-\gamma_7 n}(n!)^{-\frac{u}{2u-1}}.$$

Полученное неравенство противоречиво, если $|q|\geqslant q_0$ и число n достаточно велико, что и доказывает теорему.

Заключение

Использованная в данной работе конструкция может быть распространена и на случай, когда рассматриваются также продифференцированные по параметру гипергеометрические функции. Это, по-видимому, даст возможность обобщить некоторые результаты работы [9].

Список литературы

1. Фельдман Н.И. Оценки снизу для некоторых линейных форм // Вестник Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 1967, № 2. С. 63–71.
2. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами // Математические заметки. 1992. Т. 52, вып. 6. С. 25–31.
3. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 6. С. 65–72.
4. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Московского университтета, 1982. 312 с.
5. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // In: New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207–215.
6. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
7. Иванков П.Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая // Математические заметки. 2002. Т. 71, вып, 3. С. 390–397.
8. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Padé approximation to Diophantine inequalities in values of G-function // In: Number Theory. Springer-Berlin-Heidelberg, 1985. P. 9-51. (Ser. Lecture Notes in Mathematics; vol. 1135). DOI: 10.1007/BFb0074600
9. Иванков П.Л. О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 2.

Science & Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 9, pp. 65–74.
DOI: **10.7463/0914.0726862**
Received: 29.06.2014
© Bauman Moscow State Technical University

On the Values of Hypergeometric Functions with Different Irrational Parameters at Small Points

Ivankov P. L.[1,*]

[*]ivankovpl@mail.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: estimates of linear forms, simultaneous approximations, generalized hypergeometric functions, irrational parameters

In this paper we consider a problem concerning the linear independence of the values of generalized hypergeometric functions with different irrational parameters. To solve this problem it is impossible to apply directly Siegel's method known in the theory of transcendental numbers, since abovementioned functions do not belong to a special class of entire functions Siegel has introduced. The method of Siegel uses a Dirichlet principle to construct linear approximating form. Such a construction cannot be realized if the coefficients of Taylor series of the functions under consideration have "bad" denominators. We have exactly this circumstance in the case of hypergeometric functions with irrational parameters. There exists a modification of the method of Siegel, which allows us to apply the Dirichlet principle in this case also, but it is still unknown if this modification can be used in a situation where the varied parameters are irrational.

Usually in the case of irrational parameters one applies effective methods for constructing linear approximating form. If we apply such a construction in the case of different irrational parameters we shall have to confine ourselves by only two parameters and introduce the additional requirement: the difference of these parameters must be a rational number. The practice of considering similar problems for hypergeometric functions with irrational parameters shows that the use of simultaneous approximations leads as a rule to better results. In case of problems with different irrational parameters it is possible, for example, to waive the condition of rationality of the varied parameters difference.

In this paper, the effective construction of simultaneous approximations differs from previously proposed, which made it possible owing to some additional considerations of a technical nature to improve the arithmetic part of the method (which is, mainly, to attain an acceptable estimate of the least common denominator of the coefficients of the approximating polynomials). As a result the above mentioned unnecessary restriction on the varied parameters was dropped, but we have to restrict ourselves to the values of the functions only at the point with a small absolute value.

Remaining within the methods used in this paper one can obtain some other results which are not discussed in the article, however, increasing the number of varied parameters (if only to three) or rejecting the restriction on the values of the functions will require, probably, some new ideas.

References

1. 1.Fel'dman N.I. Lower bounds for certain linear forms. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 1967, no. 2 , pp. 63–71. (in Russian).
2. Ivankov P.L. Arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with different parameters. *Matematicheskie zametki*, 1992, vol. 52, iss. 6, pp. 25–31. (English translation: *Mathematical Notes*, 1992, vol. 52, no. 6, pp. 1188–1192. DOI: 10.1007/BF01209370).
3. Ivankov P.L. On values of hypergeometric functions with different irrational parameters. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika*, 2005, vol. 11, no. 6, pp. 65–72. (English translation: *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 146, iss. 2, pp. 5674–5679. DOI: 10.1007/s10958-007-0383-z).
4. Fel'dman N.I. *Sed'maia problema Gil'berta* [Hilbert's seventh problem]. Moscow, MSU Publ., 1982. 312 p. (in Russian).
5. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms. In: New Advances in Transcendence Theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney, 1988, pp. 207–215.
6. Shidlovskiy A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 448 p. (in Russian).
7. Ivankov P.L. Simultaneous Approximations with Regard to the Specific Character of the Homogeneous Case. *Matematicheskie zametki*, 2002, vol. 71, iss. 3, pp. 390–397. (English translation: *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 3, pp. 355–361. DOI: 10.1023/A:1014898808012).
8. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Pade approximation to Diophantine inequalities in values of G-function. In: *Number Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. 9–51. (Ser. Lecture Notes in Mathematics; vol. 1135). DOI: 10.1007/BFb0074600
9. Ivankov P.L. On the values of hypergeometric functions some of which are differentiated with respect to parameter. *Chebyshevskii sbornik*, 2012, vol. 13, no. 2, pp. 64–70. (in Russian).