

## Расчет фазовых скоростей бегущих волн в цилиндрической оболочке на основе анализа решения краевой задачи о вынужденных колебаниях

# 08, август 2014

DOI: 10.7463/0814.0725783

Каледин В. О.<sup>1</sup>, Седова Е. А.<sup>1</sup>, Шпакова Ю. В.<sup>2,а</sup>

УДК 539.3

<sup>1</sup>Россия, Новокузнецкий филиал-институт КемГУ

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана

<sup>а</sup>[shpakovayuliya@bmstu.ru](mailto:shpakovayuliya@bmstu.ru)

В течение последних десятилетий механическое поведение оболочек является объектом многочисленных исследований, актуальность которых определяется применением оболочек в несущих элементах ответственных силовых конструкций авиационной и ракетной техники, в судостроении, энергетическом и химическом машиностроении и т.д. Практически важный класс задач образуют задачи о взаимодействии упругих оболочек с обтекающим их потоком жидкости или газа, приводящем к возбуждению колебаний и образованию волн в связи с возможностью уменьшения гидродинамического сопротивления. Исследования в этой области проводятся начиная с 1960 года, однако работ по математическому моделированию, в которых бегущая волна возбуждалась бы не только самим течением (в носовой части), но и распределенными внутренними источниками энергии, пока нет. Поэтому вопрос о возможности снижения гидродинамического сопротивления корпусных конструкций за счет колебаний оболочек остается открытым.

В данной работе описывается получение аналитического решения задачи расчета фазовых скоростей бегущих волн на поверхности цилиндрической оболочки с учетом кинематической гипотезы, а так же методика численного расчета фазовой скорости, основанная на предположении, что стоячая волна при установившихся вынужденных колебаниях оболочки может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих волн – прямой и отраженной.

**Ключевые слова:** оболочка, фазовая скорость, продольные волны, волны изгиба, критическая частота, стоячая волна

### Введение.

Исследование задач распространения волн в элементах конструкций типа оболочек и пластин началось уже в 19 веке. За это время было исследовано распространение волн в пластине, позже для пластины были определены фазовые и групповые скорости [13]. Для цилиндрических оболочек было получено характеристическое уравнение по точной трех-

мерной теории при осесимметричных деформациях [12]. В 1979 году в работе [3] исследовано поведение деформируемых оболочек с протекающей жидкостью. Основное внимание уделяется переходным процессам, связанным с резкими изменениями параметров состояния жидкости в том или ином сечении оболочки. Речь идет о цилиндрических оболочках конечной и бесконечной длины. В работе [4] авторы дают уточненную постановку задач о распространении осесимметричных и неосесимметричных свободных волн в трехслойной цилиндрической оболочке бесконечной длины, решение которых позволило получить дисперсионные кривые – зависимости фазовой скорости распространения волн от их частоты. В работе [6] рассматриваются колебания конструкции, составленной из оболочек вращения, полость которых заполнена жидкостью. В статье [1] рассмотрена уточненная постановка задачи о пульсирующем течении ньютоновской жидкости в упругой трубе с учетом сдвиговой податливости оболочки и отдельной постановкой условий на внешней и внутренней поверхности. В книге [5] приводится обзор работ, связанных с распространением волн и колебаний в бесконечных и полубесконечных цилиндрических и сферических оболочках. Однако эти работы в основном посвящены оболочкам бесконечной длины. В диссертационной работе [11] рассматриваются волновые процессы, возникающие в цилиндрической оболочке конечной длины при обтекании потоком жидкости. В статье [2] исследуется динамическое поведение нагруженных оболочек вращения, содержащих неподвижную или текущую сжимаемую жидкость.

Однако до настоящего времени остаются неисследованными волновые процессы, протекающие в оболочке положительной гауссовой кривизны при обтекании ее потоком жидкости. Известные работы содержат утверждение о больших погрешностях, возникающих при расчете фазовых скоростей волн вторых и высших форм в тонких оболочках, описанных с помощью гипотезы Кирхгофа-Лява. Расчет волновых процессов в оболочках конечной длины при произвольной форме меридиана требует использования численных методов [7], что не всегда позволяет определить фазовую скорость бегущей волны с достаточно малой погрешностью.

В предлагаемой работе получено аналитическое решение задачи расчета фазовых скоростей (скоростей распространения) бегущих волн на поверхности цилиндрической оболочки, на одной из кромок которой действует возмущающая погонная сила, а вторая кромка закреплена; показана возможность использования гипотезы Кирхгофа-Лява для описания волновых процессов в тонких цилиндрических оболочках; выявлено влияние выбора кинематической гипотезы на результаты расчета фазовых скоростей, а так же предложена методика вычисления фазовой скорости, основанная на предположении, что стоячая волна при установившихся вынужденных колебаниях оболочки может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих волн – прямой и отраженной.

## Исходные уравнения и граничные условия.

Рассмотрим движущуюся цилиндрическую оболочку. Используем уравнения движения ортотропной оболочки вращения в криволинейной ортогональной лагранжевой системе координат  $(s, \theta, n)$  [9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s}(rN_s) + \frac{\partial P}{\partial \theta} - \cos \varphi N_\theta + \frac{1}{R_s} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{r}{R_s} Q_s + r q_s + r \int \rho dn \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rP) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi P + \frac{\partial}{\partial s}(\sin \varphi H) + \frac{\cos \varphi}{R_s} H + \sin \varphi Q_\theta + r q_\theta + r \int \rho dn \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R_s} N_s - \sin \varphi N_\theta + r \cdot q_n + r \int \rho dn \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) + \frac{\partial H}{\partial \theta} - \cos \varphi M_\theta - rQ_s + r m_s + r \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rH) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \cos \varphi H - rQ_\theta + r m_\theta + r \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right.$$

где  $u(s, \theta)$ ,  $v(s, \theta)$ ,  $w(s, \theta)$  – перемещения вдоль дуги, окружности и нормали соответственно;

$\psi_s(s, \theta)$ ,  $\psi_\theta(s, \theta)$  – углы поворота нормали;

$R_s, R_\theta$  – радиусы главных кривизн;

$t$  – время;

$h$  – толщина оболочки;

$\rho$  – плотность материала;

$\varphi$  – угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения;

$q_s, q_\theta, q_n$  – компоненты поверхностной распределенной нагрузки;

$m_s, m_\theta$  – поверхностные распределенные моменты;

$$r = R_\theta \sin \varphi; \quad P = N_{\theta s} - \frac{M_{s\theta}}{R_\theta} = N_{s\theta} - \frac{M_{\theta s}}{R_s}; \quad H = M_{s\theta} = M_{\theta s};$$

$$N_s = C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_\theta + C_{16}\varepsilon_{s\theta} + K_{11}\kappa_s + K_{12}\kappa_\theta + K_{16}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{11} + \gamma_\theta l_{21};$$

$$N_\theta = C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_s + K_{22}\kappa_\theta + K_{26}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{12} + \gamma_\theta l_{22};$$

$$N_{s\theta} = C_{16}\varepsilon_\theta + C_{26}\varepsilon_s + C_{66}\varepsilon_{s\theta} + K_{16}\kappa_\theta + K_{26}\kappa_s + K_{66}2\kappa_{\theta s} + \\ + \frac{1}{R_\theta} (K_{16}\varepsilon_\theta + K_{26}\varepsilon_s + K_{66}\varepsilon_{\theta s} + D_{16}\kappa_\theta + D_{26}\kappa_s + D_{66}2\kappa_{s\theta}) + \gamma_s l_{13} + \gamma_\theta l_{23};$$

$$\begin{aligned}
N_{\theta s} &= C_{16}\varepsilon_{\theta} + C_{26}\varepsilon_s + C_{66}\varepsilon_{\theta s} + K_{16}\kappa_{\theta} + K_{26}\kappa_s + K_{66}2\kappa_{\theta s} + \\
&+ \frac{1}{R_s} (K_{16}\varepsilon_{\theta} + K_{26}\varepsilon_s + K_{66}\varepsilon_{\theta s} + D_{16}\kappa_{\theta} + D_{26}\kappa_s + D_{66}2\kappa_{\theta s}) + \gamma_s l_{13} + \gamma_{\theta} l_{23}; \\
M_s &= K_{11}\varepsilon_s + K_{12}\varepsilon_{\theta} + K_{16}\varepsilon_{s\theta} + D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_{\theta} + D_{16}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{14} + \gamma_{\theta} l_{24}; \\
M_{\theta} &= K_{12}\varepsilon_s + K_{22}\varepsilon_{\theta} + K_{26}\varepsilon_{s\theta} + D_{12}\kappa_s + D_{22}\kappa_{\theta} + D_{26}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{15} + \gamma_{\theta} l_{25}; \\
M_{s\theta} &= M_{\theta s} = K_{16}\varepsilon_s + K_{26}\varepsilon_{\theta} + K_{66}\varepsilon_{s\theta} + D_{16}\kappa_s + D_{26}\kappa_{\theta} + D_{66}2\kappa_{s\theta} + \gamma_s l_{16} + \gamma_{\theta} l_{26}; \\
Q_s &= \Phi_{11}\gamma_s + \Phi_{12}\gamma_{\theta} + l_{11}\varepsilon_s + l_{12}\varepsilon_{\theta} + l_{13}\varepsilon_{s\theta} + l_{14}\kappa_s + l_{15}\kappa_{\theta} + l_{16}\kappa_{s\theta}; \\
Q_{\theta} &= \Phi_{21}\gamma_s + \Phi_{22}\gamma_{\theta} + l_{21}\varepsilon_s + l_{22}\varepsilon_{\theta} + l_{23}\varepsilon_{s\theta} + l_{24}\kappa_s + l_{25}\kappa_{\theta} + l_{26}\kappa_{s\theta}.
\end{aligned}$$

(последние два равенства используются только в случае принятия гипотезы Тимошенко), где  $C_{mp}$ ,  $D_{mp}$ ,  $K_{mp}$  – интегральные жесткостные характеристики, определяемые по формулам

$$C_{mp} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{mp}^i d\gamma, \quad D_{mp} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{mp}^i \gamma^2 d\gamma, \quad K_{mp} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} B_{mp}^i \gamma d\gamma$$

в которых величины  $B_{mp}^i$  для ортотропного материала в главных осях анизотропии определяются через модули упругости и коэффициенты Пуассона известным образом [9], а  $\Phi_{mp}$ ,  $l_{mp}$  – величины, определяемые через толщины, изменения толщин слоев и упругие характеристики их материалов.

Аналитическое решение найдем в следующих допущениях: все коэффициенты Пуассона ортотропного материала равны нулю; главные оси анизотропии совпадают с линиями кривизны. В качестве дополнительного предположения будем считать равными нулю коэффициенты взаимного влияния погонных сил и изгибающих моментов, что справедливо для достаточно тонких оболочек. Таким образом, в соответствии со сделанными допущениями

$$\begin{cases} r = \text{const}, R_s = \infty; \\ v_{12} = 0 \Rightarrow C_{12} = D_{12} = 0; \\ K_{ij} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $r$  – радиус оболочки;

$R_s$  – радиус кривизны в меридиональном направлении;

$v_{12}$  – коэффициент Пуассона;

Положим равными нулю слагаемые, содержащие производные по окружной координате, и слагаемые, равные нулю для цилиндрической оболочки. Таким образом, получим следующие уравнения движения в усилиях:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}(rN_s) - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) - N_\theta - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) - rQ_s + r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Переход от уравнений в усилиях к уравнениям в перемещениях приводит к различным результатам при использовании разных кинематических гипотез. Рассмотрим решение поставленной задачи отдельно для гипотезы Кирхгофа-Лява и для гипотезы Тимошенко, и проанализируем влияние выбора гипотезы на получаемые результаты моделирования.

При использовании гипотезы Кирхгофа-Лява тензор деформаций срединной поверхности содержит шесть компонент:

$$\varepsilon = [\varepsilon_s(s, \theta) \quad \varepsilon_\theta(s, \theta) \quad \varepsilon_{s\theta}(s, \theta) \quad \kappa_s(s, \theta) \quad \kappa_\theta(s, \theta) \quad \kappa_{s\theta}(s, \theta)]^T :$$

$$\varepsilon_s(s, \theta) = \frac{\partial u(s, \theta)}{\partial s} + \frac{w(s, \theta)}{R_s},$$

$$\varepsilon_\theta(s, \theta) = \frac{\cos \varphi}{r} u(s, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} w(s, \theta),$$

$$\varepsilon_{s\theta}(s, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial u(s, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v(s, \theta), \quad \kappa_s(s, \theta) = \frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} + \frac{u(s, \theta)}{R_s} \right), \quad (3)$$

$$\kappa_\theta(s, \theta) = \frac{\cos \varphi}{r} \left( -\frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} + \frac{u(s, \theta)}{R_s} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \sin \varphi \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w(s, \theta)}{\partial \theta^2} \right),$$

$$2\kappa_{s\theta}(s, \theta) = \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial v(s, \theta)}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v(s, \theta) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u(s, \theta)}{R_s} + \frac{w(s, \theta) \cos \varphi}{r} - \frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} \right).$$

Тогда в системе уравнений движения первое уравнение принимает вид:

$$r \frac{\partial N_s}{\partial s} - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

второе и пятое уравнение выполняются тождественно; остальные преобразуем, выразив из четвертого  $Q_s$  и подставив в третье:

$$\frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} r - N_\theta - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Подставим в полученные уравнения выражения для продольной погонной силы  $N_s = C_{11} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}$ , поперечной погонной силы  $N_\theta = C_{22} \cdot \frac{w}{r}$  и продольного момента

$M_s = D_{11} \cdot \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)$  с учетом принятых допущений и кинематической гипотезы. Получим

систему уравнений движения в перемещениях в случае гипотезы Кирхгофа-Лява:

$$\begin{cases} rC_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ rD_{11} \left( -\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right) - C_{22} \frac{w}{r} - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При использовании гипотезы Тимошенко деформации координатной поверхности выражаем через линейные перемещения координатной поверхности:  $u(s, \theta)$ ,  $v(s, \theta)$ ,  $w(s, \theta)$  – вдоль дуги, окружности и нормали соответственно – и углы поворота нормали:  $\psi_s(s, \theta)$  и  $\psi_\theta(s, \theta)$  [9].

Тогда система уравнений движения оболочки в перемещениях примет следующий вид:

$$\begin{cases} rC_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ rK_1 \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + rK_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{C_{22}}{r} w - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ rD_{11} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} - rK_1 \psi_s + rK_1 \frac{\partial w}{\partial s} + r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (6) отличается от системы (7) тем, что содержит три уравнения вместо двух в связи с большим числом степеней свободы.

### Расчет фазовых скоростей.

Первое уравнение в обеих системах, описывающее продольные колебания, одинаково, и после сокращения на  $r$  и деления на  $C_{11}$  представляет собой хорошо известное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\rho h}{C_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

описывающее продольную бегущую волну:

$$u(s, t) = J(s) \cos(\omega_1 t + \varphi_u), \quad (9)$$

где  $J(s)$  – амплитуда бегущей волны в зависимости от координаты вдоль меридиана;

$\omega_1$  – частота бегущей волны;

$\varphi_u$  - начальная фаза бегущей волны,

с фазовой скоростью, равной скорости звука в материале оболочки:

$$a_{np} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho h}}, \text{ где } C_{11} = E_1 \cdot h. \quad (10)$$

Волна изгиба описывается решением системы (6) или (7), в зависимости от выбранной кинематической гипотезы. В случае гипотезы Кирхгофа-Лява найдем решение второго уравнения в виде гармонической функции  $w(s, t) = B(s) \cos(\omega_2 t + \varphi_w)$ , где  $B(s)$  - амплитуда бегущей волны в зависимости от координаты вдоль меридиана;  $\omega_2$  - частота бегущей волны;  $\varphi_w$  - начальная фаза бегущей волны. Из второго уравнения системы (6), разделив на  $w$ , получим следующее уравнение:

$$-rD_{11}(\varphi'_w)^4 - C_{22} \frac{1}{r} + \omega^2 r \rho h = 0. \quad (11)$$

Для нахождения скорости волны изгиба выразим из уравнения (11)  $\varphi'_w$ , получим:

$$\varphi'_w = \sqrt[4]{\frac{r^2 \omega^2 \rho h - C_{22}}{r^2 D_{11}}}. \quad (12)$$

Разделим частоту на  $\varphi'_w$ , получим:

$$a_{к-л} = \frac{\omega \sqrt{r} \cdot \sqrt[4]{D_{11}}}{\sqrt[4]{r^2 \rho h \omega^2 - C_{22}}}, \quad (13)$$

где  $D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12}$ ,  $C_{22} = E_2 h$ .

Выражение (13) дает точное значение фазовой скорости волны изгиба в принятых допущениях в случае принятия гипотезы Кирхгофа-Лява.

Проведем расчет фазовой скорости изгибной волны в случае принятия гипотезы Тимошенко. Для расчета вынужденных изгибных колебаний используем два последних уравнения системы (7):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}(rQ_s) - N_\theta - r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rM_s) - rQ_s + r\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

Будем искать частное решение системы (14) в виде

$$\begin{pmatrix} w \\ \psi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{i\omega \left( t - \frac{s}{a_T} \right)}, \quad (15)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные константы,

$\omega$  – частота возмущающей силы,

$a_T$  – фазовая скорость бегущей волны в случае принятия гипотезы Тимошенко.

Таким образом, исходная система примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - \frac{C_{22}}{r^2} - \frac{\omega^2}{a_T^2} K_1 & -\frac{i\omega}{a_T} K_1 \\ -\frac{i\omega}{a_T} K_1 & \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 + K_1 + D_{11} \left( \frac{\omega^2}{a_T^2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Условием существования нетривиального решения данной системы является вырожденность матрицы коэффициентов, откуда получаем характеристическое уравнение относительно фазовой скорости:

$$-\omega^4 D_{11} K_1 \frac{1}{a_T^4} + \left( \omega^4 D_{11} \rho h - \omega^2 \frac{C_{22} D_{11}}{r^2} - \omega^4 K_1 \frac{\rho h^3}{12} \right) \frac{1}{a_T^2} + \left( \rho h \omega^2 - \frac{C_{22}}{r^2} \right) \left( \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 + K_1 \right) = 0. \quad (17)$$

Введем замену  $\frac{1}{a_T^2} = f$ , получим квадратное уравнение относительно  $f$ . Это уравнение имеет два корня:  $f_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4dc}}{2d}$  и  $f_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4dc}}{2d}$ , где обозначено:

$$d = -\omega^4 D_{11} K_1,$$

$$b = \omega^4 D_{11} \rho h - \omega^2 \frac{C_{22} D_{11}}{r^2} - \omega^4 K_1 \frac{\rho h^3}{12}, \quad (18)$$

$$c = \left( \rho h \omega^2 - \frac{C_{22}}{r^2} \right) \left( \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 + K_1 \right).$$

Оценим знак каждого из корней, заметив, что  $d < 0$ . Чтобы величина  $4dc$  была положительной, надо, чтобы  $c < 0$ , т.е. требуется, чтобы выполнялось условие

$$\omega^2 < \frac{C_{22}}{\rho h r^2} = \omega_{\text{крит}}^{(1)}. \text{ Условие } b < 0 \text{ выполняется, если } \omega^2 < \frac{C_{22}}{\rho h r^2} \cdot \frac{Es}{Es - \frac{5}{6} Gsn} = \omega_{\text{крит}}^{(2)}. \text{ Анализ}$$

всех возможных комбинаций знаков  $b$  и  $dc$  показал, что в случае, если квадрат частоты больше минимального из  $\omega_{\text{крит}}^{(1)}$ ,  $\omega_{\text{крит}}^{(2)}$ , то  $f_1 > 0$ , а  $f_2 < 0$ . Если же частота меньше минимальной из двух критических частот, то в случае, когда выражение  $b^2 - 4dc$  положительное, оба корня отрицательные, а в случае, когда оно отрицательное – комплексные.

Таким образом, можно сделать вывод, что уравнение (17) имеет четыре корня, два из которых, в случае, если квадрат частоты превышает минимальное из  $\omega_{\text{крит}}^{(1)}$ ,  $\omega_{\text{крит}}^{(2)}$ , чисто мнимые, а два – действительные, отличающиеся только знаком, что соответствует распро-

странению волны в прямом и обратном направлении. В случае, когда частота меньше минимальной из двух критических частот, все четыре корня комплексные. Чисто мнимые и комплексные частоты соответствуют аperiодическому движению оболочки и в дальнейшем не интерпретируются в качестве частот бегущих волн, однако формально в общем решении необходимо удерживать все слагаемые.

Для пары действительных фазовых скоростей  $a_T$  константы  $C_1$  и  $C_2$  могут быть найдены как нетривиальные решения вырожденной системы алгебраических линейных уравнений (16):

$$C_1 = \pm i \cdot \gamma \cdot C_2, \quad (19)$$

где  $\gamma = \frac{\frac{C_{22}}{r^2} + \frac{\omega^2}{a_T^2} K_1 - \rho h \omega^2}{K_1 \frac{\omega}{a_T}}$ .

В случае пары мнимых скоростей  $a_T = \pm \bar{a}_T i$ :

$$C_1 = \pm \beta \cdot C_2, \quad (20)$$

где  $\beta = \frac{-\frac{C_{22}}{r^2} + \frac{\omega^2}{\bar{a}_T^2} K_1 + \rho h \omega^2}{K_1 \frac{\omega}{\bar{a}_T}}$ .

Окончательно, общее решение системы (16) для случая двух действительных и двух чисто мнимых корней примет вид:

$$Y(s, t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\gamma \end{pmatrix} e^{-\frac{i\omega s}{a_T}} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\gamma \end{pmatrix} e^{\frac{i\omega s}{a_T}} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} e^{-\frac{\omega s}{\bar{a}_T}} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} e^{\frac{\omega s}{\bar{a}_T}}. \quad (21)$$

Примем граничные условия, соответствующие закреплению оболочки на кромке  $s=0$  и нагружению гармонической силой на противоположной кромке  $s=L$ :  $w(0, t) = 0$ ,  $\psi_s(0, t) = 0$ ,  $M_s(L, t) = 0$ ,  $Q_s(L, t) = J \cdot \cos \omega t$ . Найдем из граничных условий значения констант, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i\gamma & -i\gamma & \beta & -\beta \\ \frac{-i\omega L}{\gamma \cdot e^{\frac{-i\omega L}{a_T}}} & \frac{i\omega L}{\gamma \cdot e^{\frac{i\omega L}{a_T}}} & \frac{-\omega L}{-\beta \cdot e^{\frac{-\omega L}{\bar{a}_T}}} & \frac{\omega L}{-\beta \cdot e^{\frac{\omega L}{\bar{a}_T}}} \\ iK_1 \left( \gamma - \frac{\omega}{a_T} \right) e^{\frac{-i\omega L}{a_T}} & -iK_1 \left( \gamma - \frac{\omega}{a_T} \right) e^{\frac{i\omega L}{a_T}} & K_1 \left( \beta - \frac{\omega}{\bar{a}_T} \right) e^{\frac{-\omega L}{\bar{a}_T}} & -K_1 \left( \beta - \frac{\omega}{\bar{a}_T} \right) e^{\frac{\omega L}{\bar{a}_T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

откуда получим форму установившихся вынужденных изгибных колебаний – стоячей волны, представляющей собой суперпозицию бегущих волн. Далее этот результат будет

использован для вычисления фазовой скорости бегущей волны по известной форме и частоте вынужденных колебаний.

### Оценка влияния выбора кинематической гипотезы.

Исследуем зависимость действительных фазовых скоростей от жесткости поперечного сдвига  $K_1$  (рисунок 1). Это позволит выяснить условия, при которых решение на основе гипотезы Кирхгофа-Лява несущественно отличается от решения с учетом поперечного сдвига, и выяснить, переходит ли решение по гипотезе Тимошенко в пределе в решение по гипотезе Кирхгофа-Лява.

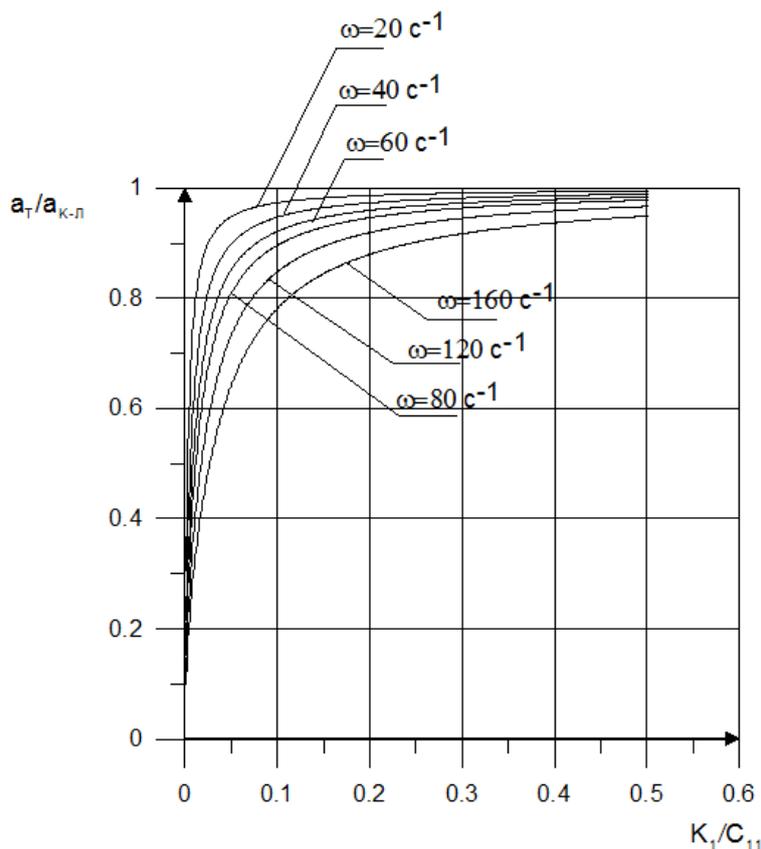


Рисунок 1 - Зависимость фазовой скорости волны изгиба от жесткости поперечного сдвига

Из рисунка 1 видно, что, независимо от частоты, начиная с определенного значения жесткости поперечного сдвига, скорости волн изгиба начинают стремиться к предельному значению.

Найдем предельное значение фазовой скорости изгибной волны из уравнения (17) при  $K_1 \rightarrow \infty$ . Получим следующее выражение:

$$\tilde{a} = \frac{\omega \sqrt{r} \cdot \sqrt[4]{D_{11}}}{\sqrt{-\frac{\omega^2 r}{\sqrt{D_{11}}} \cdot \frac{\rho h^3}{24} \pm \sqrt{\frac{\omega^4 r^2}{D_{11}} \left(\frac{\rho h^3}{24}\right)^2 + (r^2 \rho h \omega^2 - C_{22})}}}. \quad (23)$$

Сравним полученный результат со скоростью изгибной волны при использовании гипотезы Кирхгофа-Лява (13). Для этого найдем разность предельной фазовой скорости по гипотезе Тимошенко (23) и фазовой скорости по гипотезе Кирхгофа-Лява (13):

$$\tilde{a}-a_{\text{к-л}} = a_{\text{к-л}} \left( \frac{4\sqrt{\sqrt{r^2\rho h\omega^2 - C_{22}}}}{\sqrt{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + (r^2\rho h\omega^2 - C_{22})}}} - 1 \right), \quad (24)$$

где  $\gamma = \frac{\omega^2 r}{\sqrt{D_{11}}} \cdot \frac{\rho h^3}{24}$ .

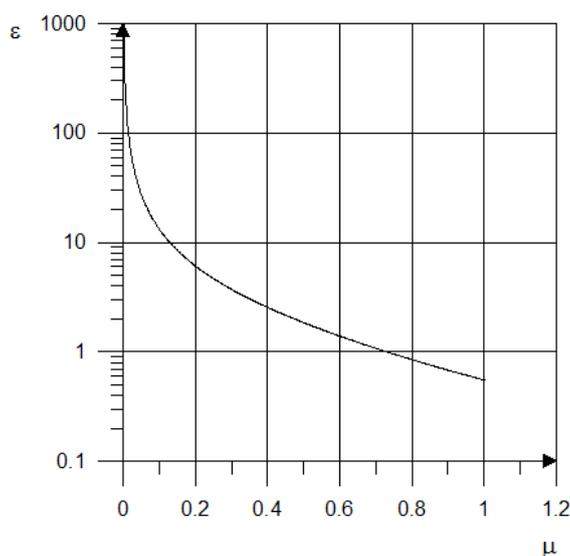
Анализируя полученный результат, заметим прежде всего, что действительная фазовая скорость получается при неотрицательном  $r^2\rho h\omega^2 - C_{22}$ , т.е. когда круговая частота вынужденных колебаний больше отношения скорости продольной волны в окружном направлении к радиусу оболочки. При этом условии корень в знаменателе имеет одно действительное и одно мнимое значение. Рассматривая только действительное значение, произведем замену:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sqrt{r^2\rho h\omega^2 - C_{22}}}{\gamma}}. \quad (25)$$

Таким образом, выражение в скобках примет вид:

$$\varepsilon(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \mu^4}}} - 1, \quad (26)$$

где  $\varepsilon(\mu)$  - убывающая функция с вертикальной асимптотой в нуле, т.е.  $\varepsilon(\mu)$  в окрестности нуля стремится к бесконечности (рисунок 2).



**Рисунок 2** - Относительная разность фазовых скоростей, найденных по гипотезам Кирхгофа - Лява и Тимошенко

Таким образом, при малых частотах (близких к критической величине  $\omega^* = \sqrt{\frac{C_{22}}{r^2 \rho h}}$ )

гипотеза Тимошенко в пределе при бесконечно большой сдвиговой жесткости дает бесконечную фазовую скорость, и разница между скоростями, определенными по разным гипотезам, бесконечно велика; при увеличении частоты предельная фазовая скорость в оболочке с учетом гипотезы Тимошенко приближается к скорости в оболочке с учетом гипотезы Кирхгофа-Лява [8].

### Методика численного расчета фазовой скорости бегущей волны.

Примем, что на оболочку вращения действует гармоническая по времени возмущающая сила. Уравнения движения для конечно-элементной модели оболочки, как известно, имеют вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно узловых перемещений и скоростей. В случае синусоидальной зависимости правых частей этой системы (узловых сил) от времени и отсутствии резонанса система имеет синусоидальное решение, соответствующее установившимся вынужденным колебаниям:

$$U(s, t) = A(s) \cos \omega t, \quad (27)$$

где  $A(s)$  – вектор-столбец амплитуды вынужденных колебаний,

$\omega$  – частота возмущающей силы,

$s$  – меридиональная координата.

Амплитуда вынужденных колебаний может быть найдена по известному вектору узловых значений амплитуд возмущающей силы:

$$A(s_i) = (K - M\omega^2)^{-1} F(s_i), \quad (28)$$

где  $K$  – матрица жесткости,

$M$  – матрица масс,

$F(s)$  – вектор узловых значений амплитуды возмущающей силы.

Вычисление вектора-столбца  $A$ , таким образом, не представляет особых сложностей. Если прямая и отраженная волны синусоидальны также по координате  $s$ , то длины обеих бегущих волн равны длине полученной стоячей волны, которая может быть определена как удвоенное расстояние между соседними нулями амплитуды интерполяцией по полученным узловым значениям. Зная длину волны  $\lambda$  и частоту  $\omega$ , можно найти фазовую

скорость  $a_{\text{фс}} = \frac{\lambda \omega}{2\pi}$ .

На практике использование такого подхода осложняется тем, что бегущая волна в оболочке интерферирует с отраженными вторичными волнами и не является синусоидальной функцией координаты, что порождает сложную картину наложения волн с различными длинами волн. Имея одинаковую частоту, эти волны распространяются, очевидно, с разными фазовыми скоростями.

Для выделения гармонических волн, составляющих сложные по форме вынужденные колебания, и расчета их фазовых скоростей применим дискретное преобразование Фурье. Для этого исходную функцию  $A(s)$ , дискретно заданную по всей длине меридиана, представим в виде спектра с помощью прямого преобразования:

$$S_k = \sum_{j=0}^N A_j \cdot \exp\left(\frac{-k \cdot 2\pi \cdot i \cdot s_j}{s_N}\right), \quad (29)$$

где  $i$  – мнимая единица,

$s_j$  – текущая меридиональная координата,

$A_j$  – текущее значение амплитуды,

$N$  – размерность вектора узловых амплитуд.

Для каждой составляющей полученного спектра выполним обратное преобразование Фурье:

$$F_j = \frac{1}{N+1} S_k \cdot \exp\left(\frac{-j \cdot 2\pi \cdot i \cdot s_j}{s_N}\right), \quad (30)$$

где  $S_k$  –  $k$ -я составляющая спектра.

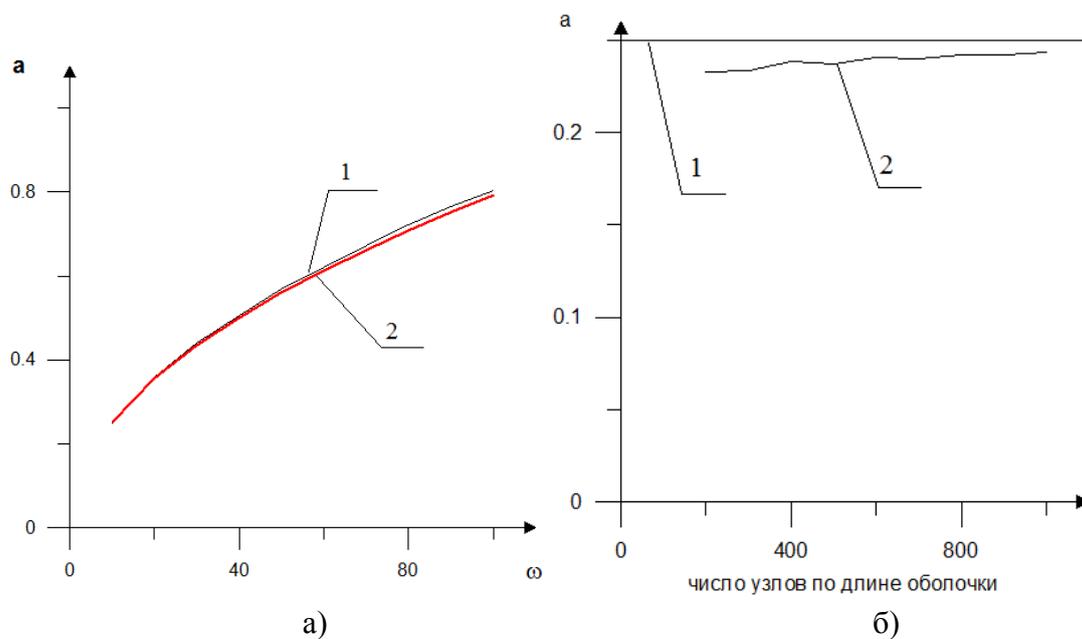
В результате получим дискретно заданную функцию амплитуды гармонической волны от координаты  $s$ , по которой можно рассчитать её фазовую скорость.

Сравним теоретические значения скорости бегущей волны и результаты, полученные с помощью дискретной модели. Для теоретического расчета возьмем цилиндрическую оболочку без воздействия внешнего давления, на которую на передней кромке действует возмущающая погонная сила по нормали к меридиану оболочки. Аналитическое решение получено в следующих допущениях: главные оси анизотропии совпадают с линиями кривизны; все коэффициенты Пуассона ортотропного материала равны нулю; коэффициенты взаимного влияния погонных сил и изгибающих моментов также равны нулю, что справедливо для достаточно тонких оболочек.

Для численных расчетов были приняты следующие параметры цилиндрической оболочки: длина 1 м, радиус 0,05 м, толщина 0,002 м, материал имеет модули упругости:  $E_1 = 945000$  МПа,  $E_2 = 0,01$  МПа, плотность 8000 кг/м<sup>3</sup>. Задавалась возмущающая погонная сила, приложенная на передней кромке по нормали к меридиану оболочки. Частота возмущающей силы варьировалась в пределах от 10 до 100 с<sup>-1</sup>.

Из рисунка 3,а) видно, что результаты, полученные из дискретного уравнения движения, хорошо согласуются с аналитическими. Различие не превышает 1,5%.

Расчеты скорости бегущей волны по описанной методике показывают, что как при свободной кромке, так и при запрещении поворота нормали вокруг касательной к передней кромке фазовые скорости получаются одинаковыми. Таким образом, кинематические граничные условия на передней кромке оболочки не влияют на скорость бегущей волны изгиба.



**Рисунок 3** - Сравнение аналитических и численных результатов: а) дисперсионная кривая: 1- аналитическое решение, 2 – численный расчет; б) сходимость численного решения при увеличении числа узлов по длине оболочки: 1 – аналитическое решение, 2 – результаты, полученные из дискретного уравнения движения

Оценим сходимость расчетов по предложенной методике к точному решению. Для этого будем последовательно сгущать сетку разбиения на конечные элементы от 200 узлов по длине элемента до 1000. Зависимость скорости бегущей волны от количества узлов по длине оболочки приведена на рисунке 3, б. Точное решение для данного примера составляет 0,25. Видно, что при уменьшении шага сетки решение стремится к точному.

Таким образом, описанная методика расчета фазовой скорости волн в оболочках позволяет получать достаточно точные результаты.

### Список литературы

1. Белоносов С.М. Пульсирующее осесимметричное возмущение ньютоновой жидкости в длинной цилиндрической упругой трубке // *Динамика сплошной среды: сб. науч. трудов*. Вып. 122. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2004. С. 3-39.
2. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2008. Т. 49, № 2. С. 313-322.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задача гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Горшков А.Г., Пожуев В.И. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1992. 224 с.
5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с. (Сер. Механика твердого деформируемого тела; т. 5).

6. Григорьев В.Г. Методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем: дис. ... докт. техн. наук. М., 2000. 328 с.
7. Каледин В.О., Седова Е.А. Нестационарные волновые процессы в оболочках вращения // Наука и технологии: труды XXVIII Российской школы. Т. 1. М.: РАН, 2008. С. 161-169.
8. Каледин В.О., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. Фазовые скорости бегущих волн в цилиндрической оболочке при конечной и бесконечной жесткости поперечного сдвига // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 9. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/958.html> (дата обращения 01.07.2014).
9. Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Бабич И.Ю. и др. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3 т. Т. 2. Механика элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1983. 464 с.
10. Седова Е.А. Решение связанной задачи гидроупругости // IX Межрегиональная научно-практическая конференция студентов и аспирантов (10 апреля 2009 г.): сб. трудов. В 3 т. Т. 1. Новокузнецк, 2009. С. 8-11.
11. Шпакова Ю.В. Статическая прочность и колебания подкрепленных оболочек вращения из слоистых композиционных материалов: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Томск, 2007. 16 с.
12. Ghosh J. Longitudinal vibrations of a hollow cylinder // Bull. Calc. Math. Soc. 1923-1924. Vol. 14. P. 31-40.
13. Lord Rayleigh. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // Proc. Lond. Math. Soc. 1889. Vol. 20. P. 225-234.

**Calculation of Phase Velocities of Traveling Waves in a Cylindrical Shell Based on the Solution Analysis of Boundary Problem of Forced Oscillations**

# 08, August 2014

DOI: 10.7463/0814.0725783

V.O. Kaledin<sup>1</sup>, E.A. Sedova<sup>1</sup>, Yu.V. Shpakova<sup>2,a</sup><sup>1</sup>Novokusnetsk Branch-Institute of Kemerovo State University 654041, Novokuznetsk, Russia<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia<sup>a</sup>[shpakovayuliya@bmstu.ru](mailto:shpakovayuliya@bmstu.ru)

---

**Keywords:** [shell](#), [the phase velocity](#), [longitudinal waves](#), [bending waves](#), [critical frequency](#), [steady wave](#)

---

In this paper we consider a moving orthotropic cylindrical shell of rotation. The purpose is to assess the choice of kinematic hypothesis for calculating the phase velocities of cylindrical shells. The comparison was done for the two hypotheses, namely: those of Timoshenko and Kirchhoff-Love. The calculation was performed under the following assumptions: all Poisson's ratios of orthotropic material were taken to be zero; the principal axes of anisotropy coincide with the lines of curvature, the coefficients of mutual influence of forces per unit length and bending moments were taken to be zero, which is valid for sufficiently thin shells. Analysis of the phase velocity of the cylindrical shell has shown that at low frequencies of traveling wave Timoshenko's hypothesis gives an infinite value of the phase velocity. However, with increasing frequency of the traveling wave phase velocities obtained with different kinematic hypotheses, in the limit approach each other. Additionally, this article presents a numerical calculation of the phase velocity of the traveling waves. Calculation technique developed by V.O. Kaledin is based on the assumption that the traveling (direct and reflected) waves, forming a standing wave, are in superposition at sustained forced vibrations of a shell. Next, the analytical results, obtained for a cylindrical shell with the harmonic disturbing force acting at the front edge, have been compared with the numerical results obtained under the same assumptions. The difference between the numerical and analytical results is less than 1,5%.

We note that many of the well-known works mention low accuracy when using the Kirchhoff-Love hypothesis to calculate phase velocities of the second and higher forms in thin cylindrical shells of rotation. This work is soundly refutes this claim and can form the basis of further

studies of wave processes in shells of rotation of arbitrary Gaussian curvature using the Kirchhoff-Love hypothesis.

## References

1. Belonosov S.M. Pulsating axisymmetric perturbation of a Newtonian fluid in a long cylindrical elastic tube. *Dinamika sploshnoi sredy: sb. nauch. trudov* [Dynamics of Continuous Media: Collected papers]. Iss. 122. Novosibirsk, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2004, pp. 3-39. (in Russian).
2. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows. *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaiia fizika*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 313-322. (English translation: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, iss. 2, pp. 313-322. DOI: [10.1007/s10808-008-0043-1](https://doi.org/10.1007/s10808-008-0043-1) ).
3. Vol'mir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: Zadacha gidrouprugosti* [Shells in the flow of liquid and gas. Problems of hydroelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian).
4. Gorshkov A.G., Pozhuev V.I. *Statsionarnye zadachi dinamiki mnogosloinykh konstruktssii* [Stationary problems of dynamics of multilayer structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 224 p. (in Russian).
5. Grigoliuk E.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii kolebanii sterzhnei, plastin i obolochek* [Non-classical theory of vibrations of rods, plates and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p. (Ser. *Mekhanika tverdogo deformiruemogo tela* [Mechanics of deformable solids]; vol. 5). (in Russian).
6. Grigor'ev V.G. *Metodologiiia issledovaniia dinamiceskikh svoistv slozhnykh uprugikh i gidrouprugikh system. Dokt. Diss.* [Methodology of study of dynamic properties of complex elastic and hydroelastic systems. Dr. diss.]. Moscow, 2000. 328 p. (in Russian).
7. Kaledin V.O., Sedova E.A. Non-stationary wave processes in shells of revolution. *Nauka i tekhnologii: trudy 28 Rossiiskoi shkoly* [Science and technology: proceedings of the 28<sup>th</sup> Russian school]. Vol. 1. Moscow, RAS Publ., 2008, pp. 161-169. (in Russian).
8. Kaledin V.O., Sedova E.A., Shpakova Iu.V. The phase velocity of traveling waves in a cylindrical shell with finite and infinite stiffness transverse shear. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 9. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/958.html> , accessed 01.07.2014. (in Russian).
9. Guz' A.N., Grigorenko Ia.M., Babich I.Iu., et al. *Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruktssii. V 3 t. T. 2. Mekhanika elementov konstruktssii* [Mechanics of compo-

- site materials and structural elements. In 3 vols. Vol. 2. Mechanics of structural elements]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983. 464 p. (in Russian).
10. Sedova E.A. Solution of coupled problem of hydroelasticity. *9 Mezhhregional'naia nauchno-prakticheskaia konferentsiia studentov i aspirantov: sb. trudov* [Proc. of the 9<sup>th</sup> Interregional Scientific and Practical Conference of Students and Postgraduates]. 10 April, 2009. In 3 vols. Vol. 1. Novokuznetsk, 2009, pp. 8-11. (in Russian).
  11. Shpakova Iu.V. *Sticheskaia prochnost' i kolebaniia podkreplennykh obolochek vrashcheniia iz sloistykh kompozitsionnykh materialov. Avtoref. kand. diss.* [Static strength and fluctuations of reinforced shells of revolution made of laminated composite materials. Abstract of cand. diss.]. Tomsk, 2007. 16 p. (in Russian).
  12. Ghosh J. Longitudinal vibrations of a hollow cylinder. *Bull. Calc. Math. Soc.*, 1923-1924, vol. 14, pp. 31-40.
  13. Lord Rayleigh. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1889, vol. 20, pp. 225-234.