

НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. ISSN 1994-0408

Оценки упругих свойств композита с анизотропными шаровыми включениями

08, август 2014

DOI: [10.7463/0814.0720691](https://doi.org/10.7463/0814.0720691)

Зарубин В.С.¹, Кувыркин Г.Н.^{1,а}

УДК 536.2

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

fn2@bmstu.ru

Для композита с анизотропными шаровыми включениями построены двусторонние оценки упругих характеристик, включающих эффективные значения объемного модуля и модуля сдвига, через которые при необходимости можно выразить значения продольного модуля упругости (модуля Юнга) и коэффициента Пуассона. Для построения двусторонних оценок использована двойственная вариационная формулировка линейной задачи теории упругости, содержащая альтернативные функционалы (Лагранжа и Кастилиано), достигающие на истинном напряженно-деформированном состоянии композита совпадающих по значению экстремумов (минимума и максимума). Методом самосогласования получены расчетные зависимости для эффективных значений объемного модуля и модуля сдвига композита. Представленные результаты количественного параметрического анализа этих зависимостей во всем диапазоне изменения объемной концентрации включений лежат в пределах установленных двусторонних оценок.

Ключевые слова: композит; анизотропные шаровые включения; упругие характеристики.

Введение

Известно несколько подходов к оценке упругих характеристик композита по известным свойствам его матрицы и армирующих включений при заданной объемной концентрации включений [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Эти подходы в последнее время получили развитие в работах отечественных и зарубежных исследователей [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] и были распространены на методы прогнозирования теплофизических и электромагнитных свойств материалов [19, 20, 21, 22, 23, 24], а также использованы при описании поведения материалов при комбинированных воздействиях (например, при построении математических моделей термоупругости, электро- и магнитоупругости композитов [25, 26, 27]).

Наряду с композитами, армированными волокнистыми включениями, широко используют дисперсно упрочненные композиты, в которых в качестве включений применяют частицы из высокопрочных и высокомодульных материалов, в том числе наноструктурные элементы [28, 29, 30, 31]. В большинстве случаев дисперсные частицы имеют близкие размеры во всех направлениях. Поэтому форму таких частиц в первом приближении обычно

принимают шаровой [32, 33, 34]. Широко распространены композиты, называемые сферопластиками [35], которые содержат дисперсные частицы строго шаровой формы. В качестве таких частиц находят применение полые стеклосфераы [36, 37, 38].

Значительное число публикуемых работ по оценке упругих характеристик дисперсно упрочненных композитов свидетельствует об актуальности исследований в данном направлении. К этому направлению примыкают и работы, посвященные оценке упругих свойств пористых металлов, металлокерамики, полимеров и строительных материалов [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46], поскольку отдельно взятую пору допустимо рассматривать как абсолютно податливое включение.

В большинстве опубликованных работ, посвященных исследованию упругих свойств дисперсно упрочненных композитов, матрица композита и включения считают изотропными. В данной работе оценки упругих характеристик композита построены для случая шаровых анизотропных включений в изотропную матрицу.

Если все включения одинакового размера, то при их наиболее плотной упаковке, когда в каждом слое центры контактирующих между собой шаров находятся в вершинах правильных треугольников, объемная концентрация C_V шаровых включений принимает наибольшее значение $C_V^o = \pi/(3\sqrt{2}) \approx 0,7405$ [47]. Если не учитывать конкретный размер включений и считать, что их диаметр может принимать значения от некоторого конечного до бесконечно малого, т.е. возможно заполнение всех пустот между крупными включениями, то допустимо рассматривать значения $C_V \in [0, 1]$.

Примем известными объемный модуль K^o и модуль сдвига G^o изотропной матрицы и компоненты тензора $\widehat{\mathbf{C}}^\bullet$ коэффициентов упругости анизотропных включений. Расположение включений положим случайнym, что позволяет считать композит макроскопически изотропным, оцениваемые упругие свойства которого определим объемным модулем K и модулем сдвига G . Через эти модули можно выразить продольный модуль упругости (модуль Юнга) $E = \frac{9KG}{3K+G}$ и коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{2} - \frac{3G}{6K+2G}$ композита [48].

1. Основные соотношения

Упругие характеристики изотропных композита в целом и его матрицы можно представить в одинаковой тензорной форме [6] (на примере характеристик композита)

$$\widehat{\mathbf{C}} = 3K\widehat{\mathbf{V}} + 2G\widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{3K}\widehat{\mathbf{V}} + \frac{1}{2G}\widehat{\mathbf{D}}, \quad (1)$$

где $\widehat{\mathbf{C}}$ и $\widehat{\mathbf{S}}$ — тензоры четвертого ранга коэффициентов упругости и податливости соответственно, а $\widehat{\mathbf{V}}$ и $\widehat{\mathbf{D}}$ — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{D}}$. Если использовать единичный тензор второго ранга с компонентами δ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то компоненты этих составляющих примут вид

$$V_{ijmn} = \frac{\delta_{ij}\delta_{mn}}{3}, \quad D_{ijmn} = I_{ijmn} - V_{ijmn}, \quad m, n = 1, 2, 3,$$

где $I_{klmn} = (\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})/2$ — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{I}}$. С учетом этих формул, правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинских индексах и равенства $\delta_{ii} = 3$ можно установить, что [6] $V_{ijmn}V_{mnkl} = V_{ijkl}$, $D_{ijmn}D_{mnkl} = D_{ijkl}$ и $V_{ijmn}D_{mnkl} = 0$, $k, l = 1, 2, 3$, т.е.

$$\widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} = \widehat{\mathbf{V}}, \quad \widehat{\mathbf{D}} \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{O}}_4, \quad (2)$$

где $\widehat{\mathbf{O}}_4$ — тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях [49].

Тензор четвертого ранга имеет два линейных относительно своих компонент инварианта, получаемых свертыванием по двум парам индексов. Для тензора, определяемого первым равенством (1), эти инварианты можно представить в виде

$$\widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} = C_{iimm} = 9K, \quad \widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{D}} = C_{imim} - \frac{C_{iimm}}{3} = 10G, \quad (3)$$

а для тензора, определяемого вторым равенством (1) —

$$\widehat{\mathbf{S}} \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{V}} = S_{iimm} = \frac{1}{K}, \quad \widehat{\mathbf{S}} \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{D}} = S_{imim} - \frac{S_{iimm}}{3} = \frac{5}{2G}. \quad (4)$$

Выделим в рассматриваемом композите некоторый представительный объем V_0 , осредненные параметры которого отражают свойства этого композита в целом. Осредненные по объему V_0 локальные значения $\hat{\mathbf{s}}(M)$ и $\hat{\mathbf{e}}(M)$ тензоров соответственно напряжений и деформации в окрестности точки $M \in V_0$ имеют вид

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{\mathbf{s}}(M) dV(M) \quad \text{или} \quad \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{\mathbf{e}}(M) dV(M),$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения.

Модули упругости композита, связывающие эти осредненные тензоры, называют эффективными [49]. Введем эти модули из условия равенства объемной плотности потенциальной энергии деформации в изотропной среде и в реальном композите:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \cdot \langle \hat{\mathbf{e}} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle \cdot \cdot \cdot \widehat{\mathbf{S}} \cdot \cdot \cdot \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \frac{1}{2V_0} \int_{V_0} \hat{\mathbf{s}}^*(M) \cdot \cdot \cdot \hat{\mathbf{e}}^*(M) dV(M) = \\ &= \frac{1}{2V_0} \int_{V_0} C_{ijmn}^*(M) \varepsilon_{mn}^*(M) \varepsilon_{ij}^*(M) dV(M) = \frac{1}{2V_0} \int_{V_0} S_{ijmn}^*(M) \sigma_{mn}^*(M) \sigma_{ij}^*(M) dV(M), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\hat{\mathbf{s}}^*$ и $\hat{\mathbf{e}}^*$ — тензоры напряжений и деформации с компонентами соответственно σ_{ij}^* и ε_{ij}^* , определенными в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ и описывающими истинное напряженно-деформированное состояние в представительном элементе композита, удовлетворяющее условиям равновесия и совместности деформаций, а C_{ijmn}^* и S_{ijmn}^* — локальные значения компонент тензоров коэффициентов упругости и податливости соответственно.

2. Построение двусторонних оценок

Пусть на поверхности S_0 , ограничивающей представительный элемент, заданы кинематические граничные условия, приводящие к непрерывному распределению перемещений, которому соответствуют компоненты $\varepsilon_{ij}(M) = \text{const}$ ($M \in V_0$) тензора деформации, совпадающие с компонентами $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Такое распределение является допустимым для функционала Лагранжа [49], достигающего минимума на истинном распределении перемещений, что позволяет с учетом равенств (5) записать, опустив обозначение точки $M \in V_0$,

$$\frac{1}{2} \int_{V_0} C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn} \varepsilon_{ij} dV \geq \frac{1}{2} \int_{V_0} C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn}^* \varepsilon_{ij}^* dV = \frac{V_0}{2} C_{ijmn} \langle \varepsilon_{mn} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle dV,$$

где C_{ijmn} — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{C}}$. Отсюда следует

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} (C_{ijmn}^* - C_{ijmn}) dV \geq 0. \quad (6)$$

Неравенства (6) эквивалентны двум неравенствам, содержащим линейные инварианты тензора четвертого ранга с компонентами $C_{ijmn}^* - C_{ijmn}$ [49, 50]:

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} (C_{iimm}^* - C_{iimm}) dV \geq 0, \quad \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \left(C_{imim}^* - \frac{C_{iimm}^*}{3} - C_{imim} + \frac{C_{iimm}}{3} \right) dV \geq 0,$$

или, учитывая изотропность тензоров $\widehat{\mathbf{C}}^\circ$ и $\widehat{\mathbf{C}}$ коэффициентов упругости матрицы и композита соответственно и равенства (3), получаем

$$\frac{C_{iimm}^* C_V}{9} + K^\circ (1 - C_V) \geq K, \quad \left(C_{imim}^* - \frac{C_{iimm}^*}{3} \right) C_V + 10G^\circ (1 - C_V) \geq 10G, \quad (7)$$

где C_{ijmn}^* — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{C}}^\bullet$.

Пусть теперь на поверхности S_0 заданы силовые граничные условия, вызывающие в представительном элементе напряженное состояние с компонентами $\sigma_{ij}(M) = \text{const}$ ($M \in V_0$), совпадающими с компонентами $\langle \sigma_{ij} \rangle$. Такое распределение напряжений является допустимым для функционала Кастилиано [49], достигающего максимума истинном распределении напряжений. Это дает возможность с учетом равенств (4) записать, опустив обозначение точки $M \in V_0$,

$$-\frac{1}{2} \int_{V_0} S_{ijmn}^* \sigma_{mn} \sigma_{ij} dV \leq -\frac{1}{2} \int_{V_0} S_{ijmn}^* \sigma_{mn}^* \sigma_{ij}^* dV = -\frac{V_0}{2} S_{ijmn} \langle \sigma_{mn} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle dV,$$

где S_{ijmn} — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{S}}$. Отсюда следуют неравенства

$$\int_{V_0} (S_{ijmn}^* - S_{ijmn}) dV \geq 0,$$

которые также эквивалентны двум неравенствам, но содержащим линейные инварианты тензора с компонентами $S_{ijmn}^* - S_{ijmn}$:

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} (S_{iimm}^* - S_{iimm}) dV \geq 0, \quad \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \left(S_{imim}^* - \frac{S_{iimm}^*}{3} - S_{imim} + \frac{S_{iimm}}{3} \right) dV \geq 0.$$

Отсюда с учетом изотропности тензоров $\widehat{\mathbf{S}}^\circ$ и $\widehat{\mathbf{S}}$ коэффициентов податливости матрицы и композита соответственно и равенств (4) следует

$$S_{iimm}^* C_V + \frac{1 - C_V}{K^\circ} \geq \frac{1}{K}, \quad S_{imim}^* C_V + \left(\frac{1}{3K^\circ} + \frac{5}{2G^\circ} \right) (1 - C_V) \geq \frac{1}{3K} + \frac{5}{2G}, \quad (8)$$

где S_{ijmn}^* — компоненты тензора $\widehat{\mathbf{S}}^\bullet$.

Из первых неравенств (7) и (8) получим двусторонние оценки объемного модуля K композита в виде

$$K_+ = \frac{C_{iimm}^* C_V}{9} + K^\circ (1 - C_V) \geq K \geq \frac{1}{S_{iimm}^* C_V + (1 - C_V)/K^\circ} = K_-, \quad (9)$$

из второго неравенства (7) найдем верхнюю оценку

$$G_+ = \left(C_{imim}^* - \frac{C_{iimm}^*}{3} \right) \frac{C_V}{10} + G^\circ (1 - C_V) \geq G \quad (10)$$

модуля сдвига G композита, а из второго неравенства (8) — нижнюю оценку этого модуля

$$G_- = \frac{1}{2 \left(S_{imim}^* - \frac{S_{iimm}^*}{3} \right) \frac{C_V}{5} + \frac{1 - C_V}{G^\circ}} \leq G. \quad (11)$$

Следует отметить, что при значительном различии упругих свойств матрицы и включений полученные двусторонние оценки могут оказаться довольно грубыми. Один из подходов, позволяющий уточнить упругие характеристики рассматриваемого композита, основан на методе самосогласования [1, 3, 6].

3. Метод самосогласования

Особенность построения оценки упругих характеристик композита с шаровыми включениями методом самосогласования состоит в учете взаимодействия отдельно взятого элемента неоднородности (включения или частицы матрицы) с однородной изотропной средой, имеющей оцениваемые модули упругости [1]. Последующее осреднение по объему композита возмущений распределения параметров в этих элементах позволяет получить расчетные зависимости для искомых упругих характеристик композита.

Сначала рассмотрим упругое взаимодействие изотропного шарового включения с занимающей неограниченную область окружающей средой из того же линейно упругого материала с тензором $\widehat{\mathbf{C}}$ коэффициентов упругости. Пусть исходные однородные деформированное

и напряженное состояния окружающей среды вместе с этим включением определяют тензоры деформации \hat{e}_0 и напряжений $\hat{s}_0 = \hat{C} \cdot \hat{e}_0$.

Если мысленно извлечь включение из окружающей среды и без изменения его напряженного состояния создать в нем дополнительную деформацию, определяемую тензором \hat{e}'' , то после возвращения включения на прежнее место его деформированное состояние будет определять сумма тензоров $\hat{e}_0 + \hat{e}'$, причем $\hat{e}'' = \hat{W} \cdot \hat{e}'$, где [6]

$$\hat{W} = 3 \frac{(1-\nu)}{1+\nu} \hat{V} + \frac{15}{2} \frac{1-\nu}{4-5\nu} \hat{D}. \quad (12)$$

При этом напряженное состояние включения будет характеризовать тензор

$$\hat{s}' = \hat{C} \cdot (\hat{e}_0 + \hat{e}^\circ - \hat{e}'') = \hat{C} \cdot (\hat{e}_0 + \hat{e}^\circ) - \hat{C} \cdot \hat{W} \cdot \hat{e}'. \quad (13)$$

Теперь заменим шаровое включение таким же включением, но свойства которого определяет тензор \hat{C}^\bullet коэффициентов упругости реального включения в рассматриваемом композите. При одинаковой деформации в прежнем и новом включениях в последнем возникнет напряженное состояние, определяемое тензором

$$\hat{s}^\bullet = \hat{C}^\bullet \cdot (\hat{e}_0 + \hat{e}'). \quad (14)$$

Такая замена будет эквивалентна, если напряжения в прежнем и новом включениях совпадут. Тогда, приравняв правые части равенств (13) и (14), найдем тензор $\hat{e}' = \hat{u}^\bullet \cdot \hat{e}_0$, характеризующий возмущение деформации реального включения относительно однородного деформированного состояния композита, где

$$\hat{u}^\bullet = (\hat{C}^\bullet - \hat{C} + \hat{C} \cdot \hat{W})^{-1} \cdot \hat{C} \cdot \hat{W} - \hat{I}, \quad (15)$$

и тензор избыточных напряжений $\Delta\hat{s}^\bullet = \hat{s}' - \hat{s}_0 = \hat{v}^\bullet \cdot \hat{e}_0$, где с учетом формул (13) и (15)

$$\hat{v}^\bullet = (\hat{C} - \hat{C} \cdot \hat{W}) \cdot \hat{u}^\bullet, \quad (16)$$

характеризующий возмущение напряжений в этом включении относительно однородного напряженного состояния композита.

Форма частиц матрицы, связывающей в композите шаровые включения, при хаотическом расположении включений является неопределенной. Примем в качестве средней статической форму этих частиц шаровой. Взаимодействие шаровой частицы матрицы с изотропной окружающей средой будут определять соотношения, аналогичные полученным выше для шарового включения, а именно возмущение деформации в такой частице будет определять тензор $\hat{e}^\circ = \hat{u}^\circ \cdot \hat{e}_0$, где

$$\hat{u}^\circ = (\hat{C}^\circ - \hat{C} + \hat{C} \cdot \hat{W})^{-1} \cdot \hat{C} \cdot \hat{W} - \hat{I}, \quad (17)$$

а избыточные напряжения в этой частице — тензор $\Delta\hat{s}^\circ = \hat{s}^\circ - \hat{s}_0 = \hat{v}^\circ \cdot \hat{e}_0$, где

$$\hat{v}^\circ = (\hat{C} - \hat{C} \cdot \hat{W}) \cdot \hat{u}^\circ. \quad (18)$$

Осреднение по объему композита возмущений деформации и напряжений по всем включениям и частицам матрицы должно, согласно методу самосогласования, привести к нулевому результату, т.е.

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^\bullet \rangle C_V + \langle \hat{\mathbf{e}}^\circ \rangle (1 - C_V) = \hat{\mathbf{O}}_2, \quad \langle \Delta \hat{\mathbf{s}}^\bullet \rangle C_V + \langle \Delta \hat{\mathbf{s}}^\circ \rangle (1 - C_V) = \hat{\mathbf{O}}_2,$$

где $\hat{\mathbf{O}}_2$ — тензор второго ранга с нулевыми компонентами. Все тензоры второго ранга, входящие в левые части этих равенств, включают один и тот же множитель $\hat{\mathbf{e}}_0$, определяющий макроскопически однородное деформированное состояние композита. Поэтому при осреднении этот множитель можно опустить и перейти к осреднению тензоров четвертого ранга, определенных формулами (15)–(18):

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^\bullet \rangle C_V + \langle \hat{\mathbf{u}}^\circ \rangle (1 - C_V) = \hat{\mathbf{O}}_4, \quad \langle \hat{\mathbf{v}}^\bullet \rangle C_V + \langle \hat{\mathbf{v}}^\circ \rangle (1 - C_V) = \hat{\mathbf{O}}_4. \quad (19)$$

Тензоры $\hat{\mathbf{v}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{v}}^\bullet$ по сравнению соответственно с тензорами $\hat{\mathbf{u}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{u}}^\bullet$ имеют одинаковый дополнительный множитель $\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}$, являющийся изотропным тензором, компоненты которого не зависят от ориентации координатных осей. Поэтому осреднение левых частей обоих равенств (19) даст одинаковый результат, т.е. достаточно осреднить более простые по структуре тензоры $\hat{\mathbf{u}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{u}}^\bullet$. С учетом формул (15) и (17) первое равенство (19) можно представить в виде

$$\langle (\hat{\mathbf{C}}^\bullet - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \rangle C_V = (\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} - (\hat{\mathbf{C}}^\circ - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} (1 - C_V). \quad (20)$$

Операция осреднения изотропных тензоров в правой части этого равенства опущена.

С учетом формул (1), (2) и (12) и зависимости ν от K и G найдем

$$\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^* = (3K + 4G)\hat{\mathbf{V}} + 5G \frac{3K + 4G}{3K + 6G} \hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^* - \hat{\mathbf{C}} = 4G\hat{\mathbf{V}} + G \frac{9K + 8G}{3K + 6G} \hat{\mathbf{D}}.$$

Операция осреднения тензоров четвертого ранга равносильна вычислению их двух линейных инвариантов путем полной свертки с тензорами $\hat{\mathbf{V}}$ и $\hat{\mathbf{D}}$ [6, 49]. Тогда с учетом формулы (1) применительно к изотропной матрице равенство (20) будет эквивалентно системе двух алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_V}{C_{iimm}^\bullet / 3 + 4G} = \frac{1}{3K + 4G} - \frac{1 - C_V}{3K^\circ + 4G}, \\ \frac{C_V}{6(C_{imim}^\bullet - C_{iimm}^\bullet / 3) \frac{K + 2G}{5} + G(9K + 8G)} = \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{5G(3K + 4G)} - \frac{1 - C_V}{6G^\circ(K + 2G) + G(9K + 8G)}, \end{array} \right. \quad (21)$$

достаточных для нахождения эффективных значений объемного модуля K и модуля сдвига G композита.

4. Результаты расчетов

Сначала целесообразно провести тестирование полученных расчетных зависимостей (9)–(11) и (21) применительно к частному случаю изотропных включений, для которых по аналогии с формулами (1) примем $\widehat{\mathbf{C}}^\bullet = 3K^\bullet\widehat{\mathbf{V}} + 2G^\bullet\widehat{\mathbf{D}}$, $\widehat{\mathbf{S}}^\bullet = \frac{1}{3K^\bullet}\widehat{\mathbf{V}} + \frac{1}{2G^\bullet}\widehat{\mathbf{D}}$, где K^\bullet и G^\bullet — соответственно объемный модуль и модуль сдвига включений. В этом случае с учетом равенств (3) в соотношения (9)–(11) и (21) подставим

$$\frac{C_{iimm}^\bullet}{9} = \frac{1}{S_{iimm}^\bullet} = K^\bullet, \quad C_{imim}^\bullet - \frac{C_{iimm}^\bullet}{3} = 10G^\bullet, \quad S_{imim}^\bullet - \frac{S_{iimm}^\bullet}{3} = \frac{5}{2G^\bullet}.$$

На рис. 1 приведены рассчитанные по этим соотношениям графики зависимостей от объемной концентрации C_V включений отношений $\tilde{K}_+ = K_+/K^\circ$ и $\widehat{K}_+ = K_+/K^\bullet$ (штрих-пунктирные линии), $\tilde{K}_- = K_-/K^\circ$ и $\widehat{K}_- = K_-/K^\bullet$ (пунктирные линии) и $\tilde{K} = K/K^\circ$ и $\widehat{K} = K/K^\bullet$ (сплошные кривые) при различных значениях отношения $\bar{K} = K^\bullet/K^\circ$ и значении $G^\circ/K^\circ = 0,4$ (кривые, отмеченные позициями 1–4, построены при значениях $\bar{G} = G^\bullet/G^\circ$ соответственно 0,1; 0,5; 2 и 10). Следует отметить, что по мере приближения значения \bar{K} к единице влияние параметра \bar{G} на зависимости \tilde{K} и \widehat{K} от C_V ослабевает (при $\bar{K} = 0,5$ и $\bar{K} = 2$ изменение этого параметра на два порядка приводит лишь к небольшому отличию соответствующих кривых).

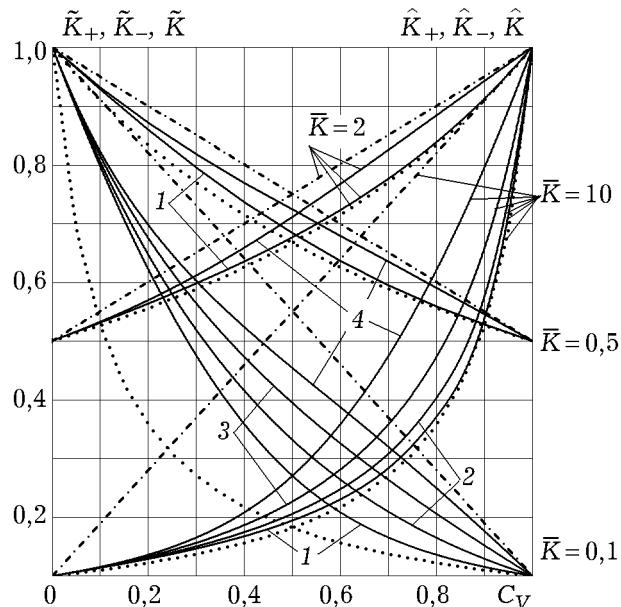


Рис. 1. Зависимости безразмерных оценок объемного модуля композита от объемной концентрации изотропных включений

Штрихпунктирными и пунктирными линиями на рис. 2 представлены графики зависимостей от C_V отношений соответственно $\tilde{G}_+ = G_+/G^\circ$, $\widehat{G}_+ = G_+/G^\bullet$ и $\tilde{G}_- = G_-/G^\circ$, $\widehat{G}_- = G_-/G^\bullet$ при различных значениях параметра \bar{G} . На этом же рисунке по результатам решения системы уравнений (21) при $G^\circ/K^\circ = 0,4$ и тех же значениях этого параметра

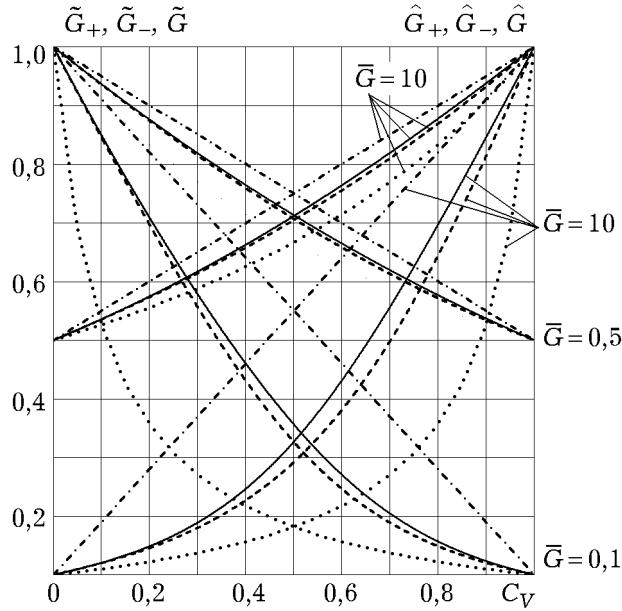


Рис. 2. Зависимости безразмерных оценок модуля сдвига композита от объемной концентрации изотропных включений

построены графики зависимостей от C_V отношений $\tilde{G} = G/G^\circ$ и $\hat{G} = G/G^\bullet$ при $\bar{K} = 10$ (сплошные кривые) и $\bar{K} = 0,1$ (штриховые линии). Видно, что изменение значения \bar{K} на два порядка оказывает слабое влияние на зависимости \tilde{G} и \hat{G} от C_V .

Для анизотропных включений с кубической симметрией компоненты тензора \hat{C}^\bullet можно представить через три элемента C_{11}^\bullet , C_{12}^\bullet и C_{44}^\bullet соответствующей этому тензору матрицы шестого порядка [51]. В этом случае [48, 49] $C_{iimm}^\bullet/3 = 3/S_{iimm}^\bullet = C_{11}^\bullet + 2C_{12}^\bullet = 3K^\bullet$, $C_{imim}^\bullet - C_{iimm}^\bullet/3 = (2G_1^\bullet - 3G_2^\bullet)$ и $S_{imim}^\bullet - S_{iimm}^\bullet/3 = 2/G_1^\bullet + 3/(2G_2^\bullet)$, где $G_1^\bullet = (C_{11}^\bullet - C_{12}^\bullet)/2$ и $G_2^\bullet = C_{44}^\bullet$. Эти равенства использованы в соотношениях (9)–(11) при расчете зависимостей \tilde{K}_+ , \hat{K}_+ и \tilde{K}_- , \hat{K}_- (соответственно штрихпунктирные и пунктирные линии на рис. 3) при $\bar{K} = 0,1$ и $\bar{K} = 10$. Зависимости \tilde{K} и \hat{K} от C_V при значениях $\bar{G}_1 = G_1^\bullet/G^\circ = 10$, $\bar{G}_2 = G_2^\bullet/G^\circ = 0,1$ и $\bar{G}_1 = 0,1$, $\bar{G}_2 = 10$, полученные в результате решения системы уравнений (21), представлены на этом рисунке сплошными кривыми с ромбами и треугольниками соответственно. Видно, что одновременное изменение значений параметров \bar{G}_1 и \bar{G}_2 на два порядка (как и в случае изотропных включений) мало влияет на зависимости \tilde{K} и \hat{K} от C_V .

На рис. 4 приведены графики зависимостей от C_V верхней оценки \tilde{G}_+ (штрихпунктирные линии) и нижней оценки \tilde{G}_- (пунктирные линии) отношения $\tilde{G} = G/G^\circ$ при $G^\circ/K^\circ = 0,4$ и различных сочетаниях значений \bar{G}_1 и \bar{G}_2 (пунктирные линии, отмеченные позициями 1–4, построены при сочетании значений соответственно $\bar{G}_1 = 0,1$ и $\bar{G}_2 = 1,5$, $\bar{G}_1 = 1,5$ и $\bar{G}_2 = 0,1$, $\bar{G}_1 = 0,1$ и $\bar{G}_2 = 0,5$, $\bar{G}_1 = 0,5$ и $\bar{G}_2 = 0,1$). Графики зависимостей \tilde{G} от C_V при $\bar{K} = 10$ представлены сплошными кривыми, а при $\bar{K} = 0,1$ — штриховыми линиями. При значениях $\bar{G}_1 = 1,5$ и $\bar{G}_2 = 0,1$ штриховая линия практически совпадает со сплошной кривой, а при $\bar{G}_1 = 0,1$ и $\bar{G}_2 = 1,5$ сплошная кривая и штриховая линия совпадают со штрихпунктирной

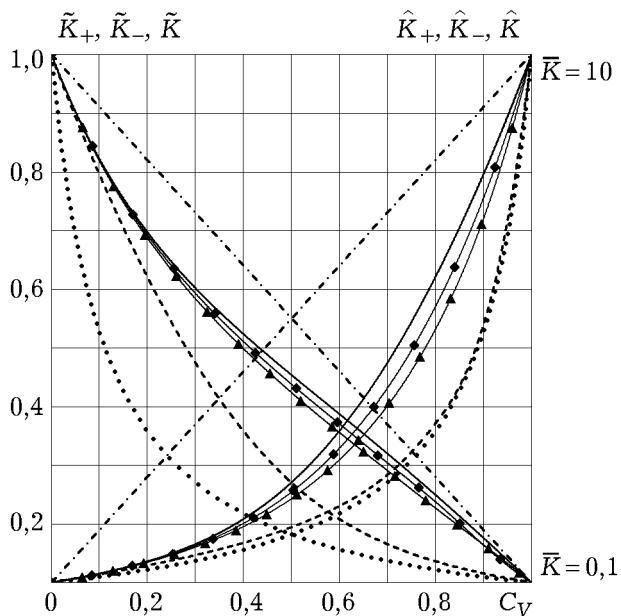


Рис. 3. Зависимости безразмерных оценок объемного модуля композита от объемной концентрации анизотропных включений

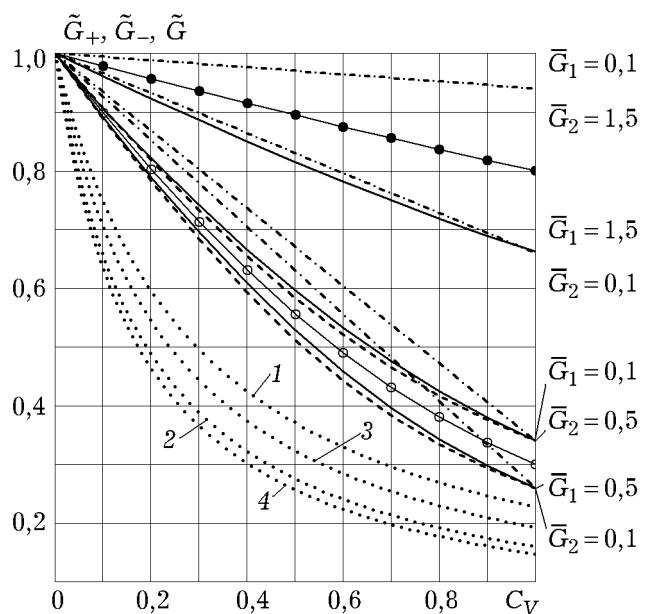


Рис. 4. Зависимости безразмерных оценок модуля сдвига композита от объемной концентрации анизотропных включений

линией. Для сравнения сплошными кривыми с темными и светлыми кружками представлены зависимости \tilde{G} от C_V в случае изотропных включений при среднеарифметических значениях соответственно $\bar{G} = (0,1 + 1,5)/2 = 0,8$ и $\bar{G} = (0,1 + 0,5)/2 = 0,3$.

Следует отметить, что значение $\Delta\bar{G} = |\bar{G}_1 - \bar{G}_2|$ характеризует степень анизотропии включений. Из рис. 4 видно, что с увеличением этого значения ширина полосы между верхней и нижней оценками величины \tilde{G} возрастает, приводя к росту возможной погрешности при оценке эффективного значения модуля сдвига рассматриваемого композита.

Заключение

Представленные оценки упругих свойств композита с анизотропными шаровыми включениями позволяют установить количественную зависимость этих свойств от объемной концентрации и упругих характеристик включений, а также выявить влияние свойств материала матрицы. Использование альтернативных функционалов (Лагранжа и Кастилиано), входящих в двойственную вариационную формулировку линейной задачи теории упругости и достигающих на истинном напряженно-деформированном состоянии композита совпадающих по значению экстремумов (минимума и максимума), дает возможность построить двусторонние границы изменения искомых упругих характеристик композита и тем самым оценить возможную погрешность полученных результатов.

Список литературы

1. Эшлеби Дж. Континуальная теория дислокаций: пер. с англ. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 248 с.
2. Hashin Z. Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media // Appl. Mech. Rev. 1964. Vol. 17, no. 1. P. 1–10.
3. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13, no. 4. P. 213–222.
4. Хорошун Л.П. О методе определения упругих модулей армированных тел // Механика полимеров. 1968. № 1. С. 78–87.
5. Yeh R.H.T. Variational principles of the elastic moduli of composite materials // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41, no. 8. P. 3353–3356. DOI: [10.1063/1.1659424](https://doi.org/10.1063/1.1659424)
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. Композиционные материалы. В 8 т. Т. 2. Механика композиционных материалов: пер. с англ. / под ред. Дж. Сендецки. М.: Мир, 1978. 564 с.
8. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
9. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
10. Алешин В.И. Эффективные упругие свойства двухфазных композитов // Журнал технической физики. 2007. Т. 77, вып. 9. С. 54–60.
11. Ustinov K.B., Goldstein R.V. On application of classical Eshelby approach to calculating effective elastic moduli of dispersed composites // Int. J. Fract. 2007. Vol. 147, no. 1–4. P. 55–66.
12. Zheng Q.-S., Du D.-X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution // J. Mech. Phys. Solids. 2001. Vol. 49, no. 11. P. 2765–2788.

13. Паньков А.А. Методы самосогласования механики композитов. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. 253 с.
14. Больщаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: Пороги. 2008. 247 с.
15. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Об упругих свойствах композиционных материалов // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 4. С. 96–110.
16. Рогачев Е.А., Зверев М.А., Суриков В.И. Прогнозирование упругих свойств полимерных композиционных материалов // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2010. № 3 (93). С. 28–31.
17. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 5. С. 3–20.
18. Abedini A., Chen Z.T. A micromechanical model of particle-reinforced metal matrix composites considering particle size and damage // Computational Materials Science. 2014. Vol. 85. P. 200–205. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.01.012](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.01.012)
A micromechanical model of particle-reinforced metal matrix composites considering particle size and damage // Computational Materials Science. 2014. Vol. 85, 1 April, pp. 200-205. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.01.012
19. Барановский В.М., Темникова С.В., Черенков А.В., Зеленева Т.П., Зеленев Ю.В. Прогнозирование теплофизических свойств полимерных композиционных материалов с учетом модельных представлений // Пластические массы. 2004. № 3. С. 13–18.
20. Калинин Ю.Е., Ремизов А.Н., Ситников А.В. Электрические свойства аморфных нанокомпозитов $(\text{Co}_{45}\text{Fe}_{45}\text{Zr}_{10})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{1-x}$ // Физика твердого тела. 2004. Т. 46. № 11. С. 2076–2082.
21. Keith J.M., King J.A., Barton R.L. Electrical conductivity modeling of carbon-filled liquid-crystalline polymer // J. Appl. Polym. Sci. 2006. Vol. 102, no. 4. P. 3293–3300.
22. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 208 с.
23. Dominguez-Rodriguez G., Tapia A., Aviles F. An assessment of finite element analysis to predict the elastic modulus and Poisson's ratio of singlewall carbon nanotubes // Computational Materials Science. 2014. Vol. 82. P. 257–263. DOI: [10.1016/j.commatsci.2013.10.003](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.10.003)
24. Pandey G., Biswas A. Estimating electrical conductivity of multi-scale composites with conductive nanoparticles using bidirectional time marching percolation network mapping // Computational Materials Science. 2014. Vol. 89. P. 80–88. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.03.032](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.032)
25. Соколкин Ю.В., Паньков А.А. Электроупругость пьезокомпозитов с нерегулярными структурами. М.: Наука, 2003. 180 с.

26. Anglin B.S., Lebensohn R.A., Rollett A.D. Validation of a numerical method based on fast Fourier transforms for heterogeneous thermoelastic materials by comparison with analytical solutions // Computational Materials Science. 2014. Vol. 87. P. 209-217. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.02.027](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.02.027)
27. Lv J., Yang K., Zhang H., Yang D., Huang Y. A hierarchical multiscale approach for predicting thermo-electro-mechanical behavior of heterogeneous piezoelectric smart materials // Computational Materials Science. 2014. Vol. 87. P. 88–99. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.01.059](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.01.059)
28. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Оценка эффективных упругих характеристик материалов, модифицированных фуллереном // Композиты и наноструктуры. 2011. № 4. С. 21–31.
29. Лурье С.А., Миронов Ю.М., Нелюб В.А., Бородулин А.С., Чуднов И.В., Буянов И.А., Соляев Ю.О. Моделирование зависимостей физико-механических характеристик от параметров микро- и наноструктуры полимерных композиционных материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 6. С. 38–60. DOI: [10.7463/0612.0431339](https://doi.org/10.7463/0612.0431339)
30. Lehmann B., Schlarb A.K., Friedrich K., Zhang M.Q., Rong M.Z. Modelling of mechanical properties of nanoparticle-filled polyethylene // Int. J. Polym. Mater. 2008. Vol. 57, no. 1. P. 81–100.
31. Ivanisenko Y., Darbandi A., Dasgupta S., Kruk R., Hahn H. Bulk Nanostructured Materials: Non-Mechanical Synthesis // Advanced Engineering Materials. 2010. Vol. 12, no. 8. P. 666–676. DOI: [10.1002/adem.201000131](https://doi.org/10.1002/adem.201000131)
32. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 1. С. 80–90.
33. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Эффективные модули объемного сжатия дисперсно-упрочненных композитов со сплошными и полыми анизотропными сферическими включениями // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 4. С. 46–54.
34. Prüger S., Mehlhorn L., Mühllich U., Kuna M. Study of Reinforcing Mechanisms in TRIP-Matrix Composites under Compressive Loading by Means of Micromechanical Simulations // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15. no. 7. P. 542–549. DOI: [10.1002/adem.201200323](https://doi.org/10.1002/adem.201200323)
35. Соколов И.И., Долматовский М.Г. Сферопластики // Полимерные материалы. 2005. № 9. С. 20–21.
36. Соколов И.И., Долматовский М.Г., Деев И.С., Стеценко В.Я. Влияние физико-механических характеристик полых стеклянных микросфер на свойства сферопластиков // Пластические массы. 2005. № 7. С. 16–18.

37. Weise1 J., Salk N., Jehring U., Baumeister J., Lehmhus D., Bayoumi M.A. Influence of Powder Size on Production Parameters and Properties of Syntactic Invar Foams Produced by Means of Metal Powder Injection Moulding // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 118–122. DOI: [10.1002/adem.201200129](https://doi.org/10.1002/adem.201200129)
38. Cunha S., Aguiar J.B., Ferreira V.M., Tadeu A. Influence of the Type of Phase Change Materials Microcapsules on the Properties of Lime-Gypsum Thermal Mortars // Advanced Engineering Materials. 2014. Vol. 16, no. 4. P. 433–441. DOI: [10.1002/adem.201300278](https://doi.org/10.1002/adem.201300278)
39. Jin H.-J., Weissmüller J. Bulk Nanoporous Metal for Actuation // Advanced Engineering Materials. 2010. Vol. 12, no. 8. P. 714–723. DOI: [10.1002/adem.200900329](https://doi.org/10.1002/adem.200900329)
40. Schmidt K., Becker J. Generating Validated 3D Models of Microporous Ceramics // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15, no. 1–2. P. 40–45. DOI: [10.1002/adem.201200097](https://doi.org/10.1002/adem.201200097)
41. Giraud A., Sevostianov I. Micromechanical modeling of the effective elastic properties of oolitic limestone // Int. J. Rock Mech. Min. 2013. Vol. 62. P. 23–27.
42. Cho Y. J., Wook Jin Lee W.J., Park S.K., Park Y.H. Effect of Pore Morphology on Deformation Behaviors in Porous Al by FEM Simulations // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 166–169. DOI: [10.1002/adem.201200145](https://doi.org/10.1002/adem.201200145)
43. Deqing W. Relation of Cell Uniformity and Mechanical Property of a Close Cell Aluminum Foam // Advanced Engineering Materials. 2013. Vol. 15, no. 3. P. 175–179. DOI: [10.1002/adem.201200135](https://doi.org/10.1002/adem.201200135)
44. Montero-Chacón F., Marin-Montin J., Medina F. Mesomechanical characterization of porosity in cementitious composites by means of a voxel-based finite element model // Computational Materials Science. 2014. Vol. 90. P. 157–170. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.03.066](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.066)
45. Goehler H., Jehring U., Meinert J., Hauser R., Quadbeck P., Kuemmel K., Stephani G., Kieback B. Functionalized Metallic Hollow Sphere Structures // Advanced Engineering Materials. 2014. Vol. 16, no. 3. P. 335–339. DOI: [10.1002/adem.201300057](https://doi.org/10.1002/adem.201300057)
46. Schumacher Th.C., Klein T.Y., Treccani L., Rezwan K. Rapid Sintering of Porous Monoliths Assembled from Microbeads with High Specific Surface Area and Multimodal Porosity // Advanced Engineering Materials. 2014. Vol. 16, no. 2. P. 151–155. DOI: [10.1002/adem.201300220](https://doi.org/10.1002/adem.201300220)
47. Шаскольская М.С. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1976. 392 с.
48. Зарубин В.С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
49. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
50. Введение в микромеханику: пер. с япон. / под ред. М. Онами. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
51. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц: Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 384 с.

Estimating of the Elastic Properties of the Composite with Anisotropic Ball Inclusions

08, August 2014

DOI: [10.7463/0814.0720691](https://doi.org/10.7463/0814.0720691)

Zarubin V. S.¹, Kuvyrkin G. N.^{1,a}

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

fn2@bmstu.ru

Keywords: [composite](#), [anisotropic ball inclusions](#), [elastic characteristics](#)

Scope composites as structural materials sensing mechanical stresses are largely determined by a complex of their elastic properties. Described in the article of review papers devoted to the elastic properties of the composite, it follows that the problem of theoretical evaluation of these characteristics, remains relevant. When considering composites reinforced with spherical inclusions, most famous works of the composite matrix and the inclusion is considered to be isotropic. However, for use as inclusions of metal particles and nanostructured elements often need to consider the anisotropy of the elastic characteristics.

In the article for a composite with anisotropic spherical inclusions built two types of estimates of values of the bulk modulus and shear modulus . As background information used elastic properties of the matrix and the inclusions and their content by volume in the composite.

The first type is classified as two-sided estimates of desired values that are based on the dual variational formulation of the linear elasticity problem of an inhomogeneous solid body containing alternative functionals (Lagrange and Castigliano). These functionals on the true distribution of strains and stresses in an inhomogeneous body reach the same meaning extremes (minimum and maximum respectively). On the convergence of the distribution of the Lagrange functional application allows you to get an upper bound of desired values, and the use of functional Castigliano — their lower bound.

The second type of assessment is built by self-consistency, this method allows for the interaction of a single particle or matrix composite with a homogeneous isotropic medium having measured the elastic moduli. Averaging over the volume of the composite disturbances arising strains and stresses in the inclusions and matrix particles makes it possible to obtain the calculated dependences for the bulk modulus and shear modulus of the composite. Comparison of these calculations for these dependences with relevant bilateral estimates not only allows you to set the degree of reliability of the results, but also to quantify their possible error.

References

1. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. In: Seitz F., Turnbull D., eds. *Progress in Solid State Physics*. Vol. 3. New York, Academic Press, 1956, pp. 79–144. (Russ. ed.: Eshelby J.D. *Kontinual'naya teoriia dislokatsii*. Moscow, Inostrannaia literatura Publ., 1963. 248 p.).
2. Hashin Z. Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media. *Appl. Mech. Rev.*, 1964, vol. 17, no. 1, pp. 1-10.
3. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
4. Khoroshun L.P. On the method of determining the elastic modulus of reinforced bodies. *Mekhanika polimerov*, 1968, no. 1, pp. 78–87. (in Russian)
5. Yeh R.H.T. Variational principles of the elastic moduli of composite materials. *J. Appl. Phys.*, 1970, vol. 41, no. 8, pp. 3353-3356. DOI: [10.1063/1.1659424](https://doi.org/10.1063/1.1659424)
6. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p. (in Russian).
7. Sendetski G., ed. *Kompozitsionnye materialy. V 8 t. T. 2. Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Composite Materials. In 8 vols. Vol. 2. Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Mir Publ., 1978. 564 p. (Russian translation).
8. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov*. Moscow, Mir Publ., 1982. 336 p.).
9. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 304 p. (in Russian).
10. Aleshin V.I. Effective elastic properties of two-phase composites. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2007, vol. 77, iss. 9, pp. 54–60. (English translation: *Technical Physics*, 2007, vol. 52, iss. 9, pp. 1155–1162).
11. Ustinov K.B., Goldstein R.V. On application of classical Eshelby approach to calculating effective elastic moduli of dispersed composites. *Int. J. Fract.*, 2007, vol. 147, no. 1–4, pp. 55–66.
12. Zheng Q.-S., Du D.-X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 49, no. 11, pp. 2765–2788.
13. Pan'kov A.A. *Metody samosoglasovaniia mekhaniki kompozitov* [Self-Consistent Methods for Composites]. Perm', PSTU Publ., 2008. 253 p. (in Russian).
14. Bol'shakov V.I., Andrianov I.V., Danishevskii V.V. *Asimptoticheskie metody rascheta kompozitnykh materialov s uchetom vnutrennei struktury* [Asymptotic methods for calculating the composite materials taking into account the internal structure]. Dnepropetrovsk, Porogi Publ., 2008. 247 p. (in Russian).

15. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. On elasticity properties of composite materials. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2009, vol. 21, no. 4, pp. 96–110. (English translation: *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010, vol. 2, iss. 1, pp. 116–130.).
16. Rogachev E.A., Zverev M.A., Surikov V.I. Forecasting of elastic properties of polymeric composite materials. *Omskii nauchnyi vestnik. Ser. Pribory, mashiny i tekhnologii = Omsk Scientific Bulletin. Ser. Equipment, Machines and Technologies*, 2010, no. 3 (93), pp. 28–31. (in Russian).
17. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Multiscale modeling of elastic composite materials. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20. (in Russian).
18. Abedini A., Chen Z.T. A micromechanical model of particle-reinforced metal matrix composites considering particle size and damage. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 85, pp. 200-205. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.01.012](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.01.012)
19. Baranovskii V.M., Temnikova S.V., Cherenkov A.V., Zelenava T.P., Zelenev Y.V. Predicting the thermophysical properties of polymer composites using model representations. *Plasticheskie Massy*, 2004, no. 3, pp. 13–18. (English translation: *International Polymer Science and Technology*, 2004, vol. 31, no. 11, pp. 5–12.).
20. Kalinin Yu.E., Remizov A.N., Sitnikov A.V. Electrical properties of amorphous $(\text{Co}_{45}\text{Fe}_{45}\text{Zr}_{10})_x(\text{Al}_2\text{O}_3)_{1-x}$ nanocomposites. *Fizika tverdogo tela*, 2004, vol. 46, no. 11, pp. 2076–2082. (English translation: *Physics of the Solid State*, 2004, vol. 46, no. 11, pp. 2146–2152. DOI: [10.1134/1.1825563](https://doi.org/10.1134/1.1825563)).
21. Keith J.M., King J.A., Barton R.L. Electrical conductivity modeling of carbon-filled liquid-crystalline polymer. *J. Appl. Polym. Sci.*, 2006, vol. 102, no. 4, pp. 3293–3300.
22. Vinogradov A.P. *Elektrodinamika kompozitnykh materialov* [Electrodynamics of composite materials]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001. 208 p. (in Russian).
23. Dominguez-Rodriguez G., Tapia A., Aviles F. An assessment of finite element analysis to predict the elastic modulus and Poisson's ratio of singlewall carbon nanotubes. *Computational Materials Science*, 2014, Vol. 82, pp. 257–263. DOI: [10.1016/j.commatsci.2013.10.003](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.10.003)
24. Pandey G., Biswas A. Estimating electrical conductivity of multi-scale composites with conductive nanoparticles using bidirectional time marching percolation network mapping. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 89, pp. 80–88. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.03.032](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.032)
25. Sokolkin Iu.V., Pan'kov A.A. *Elektroprugost' p'ezokompozitov s nereguliarnymi strukturami* [Electroelasticity of piezocomposites with irregular structures]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 180 p. (in Russian).
26. Anglin B.S., Lebensohn R.A., Rollett A.D. Validation of a numerical method based on fast Fourier transforms for heterogeneous thermoelastic materials by comparison with analytical solutions. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 209–217. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.02.027](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.02.027)

27. Lv J., Yang K., Zhang H., Yang D., Huang Y. A hierarchical multiscale approach for predicting thermo-electro-mechanical behavior of heterogeneous piezoelectric smart materials. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 87, pp. 88–99. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.01.059](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.01.059)
28. Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Estimation of effective moduli of materials modified by fullerene. *Kompozity i nanostruktury = Composites and Nanostructures*, 2011, no. 4, pp. 21–31. (in Russian).
29. Lur'e S.A., Mironov Yu.M., Nelyub V.A., Borodulin A.S., Chudnov I.V., Buyanov I.A., Solyaev Yu.O. Modeling of dependences of physical-mechanical properties on parameters of micro- and nanostructure polymer composite materials. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 6, pp. 38–60. DOI: [10.7463/0612.0431339](https://doi.org/10.7463/0612.0431339) (in Russian).
30. Lehmann B., Schlarb A.K., Friedrich K., Zhang M.Q., Rong M.Z. Modelling of mechanical properties of nanoparticle-filled polyethylene. *Int. J. Polym. Mater.*, 2008, vol. 57, no. 1, pp. 81–100.
31. Ivanisenko Y., Darbandi A., Dasgupta S., Kruk R., Hahn H. Bulk Nanostructured Materials: Non-Mechanical Synthesis. *Advanced Engineering Materials*, 2010, vol. 12, no. 8, pp. 666–676. DOI: [10.1002/adem.201000131](https://doi.org/10.1002/adem.201000131)
32. Lur'e S.A., Soliaev Iu.O. Modified Eshelby method in the problem of definition of effective properties with spherical micro- and nanoincludes. *Vestnik PGTU. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 1, pp. 80–90. (in Russian).
33. Zaitsev A.V., Fukalov A.A. Effective Bulk Modules of 3D Matrix-Inclusion Composites with Continuous and Hollow Anisotropic Spherical Particles. *Vestnik PGTU. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 4, pp. 46–54. (in Russian).
34. Prüger S., Mehlhorn L., Mühlich U., Kuna M. Study of Reinforcing Mechanisms in TRIP-Matrix Composites under Compressive Loading by Means of Micromechanical Simulations. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 7, pp. 542–549. DOI: [10.1002/adem.201200323](https://doi.org/10.1002/adem.201200323)
35. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G. Spheroplasts. *Polimernye materialy*, 2005, no. 9, pp. 20–21. (in Russian).
36. Sokolov I.I., Dolmatovskii M.G., Deev I.S., Stetsenko V.Ia. Influence of the physicomechanical characteristics of hollow glass microspheres on the properties of sphere-filled plastics. *Plasticheskie massy*, 2005, no. 7, pp. 16–18. (English translation: *International Polymer Science and Technology*, 2006, vol. 33, no. 3, pp. 31–35.).
37. Weisel J., Salk N., Jehring U., Baumeister J., Lehmhus D., Bayoumi M.A. Influence of Powder Size on Production Parameters and Properties of Syntactic Invar Foams Produced by Means of Metal Powder Injection Moulding. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 118–122. DOI: [10.1002/adem.201200129](https://doi.org/10.1002/adem.201200129)

38. Cunha S., Aguiar J.B., Ferreira V.M., Tadeu A. Influence of the Type of Phase Change Materials Microcapsules on the Properties of Lime-Gypsum Thermal Mortars. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 433–441. DOI: [10.1002/adem.201300278](https://doi.org/10.1002/adem.201300278)
39. Jin H.-J., Weissmüller J. Bulk Nanoporous Metal for Actuation. *Advanced Engineering Materials*, 2010, vol. 12, no. 8, pp. 714–723. DOI: [10.1002/adem.200900329](https://doi.org/10.1002/adem.200900329)
40. Schmidt K., Becker J. Generating Validated 3D Models of Microporous Ceramics. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 1–2, pp. 40–45. DOI: [10.1002/adem.201200097](https://doi.org/10.1002/adem.201200097)
41. Giraud A., Sevostianov I. Micromechanical modeling of the effective elastic properties of oolitic limestone. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 2013, vol. 62, pp. 23–27.
42. Cho Y. J., Wook Jin Lee W.J., Park S.K., Park Y.H. Effect of Pore Morphology on Deformation Behaviors in Porous Al by FEM Simulations. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 166–169. DOI: [10.1002/adem.201200145](https://doi.org/10.1002/adem.201200145)
43. Deqing W. Relation of Cell Uniformity and Mechanical Property of a Close Cell Aluminum Foam. *Advanced Engineering Materials*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 175–179. DOI: [10.1002/adem.201200135](https://doi.org/10.1002/adem.201200135)
44. Montero-Chacón F., Marin-Montin J., Medina F. Mesomechanical characterization of porosity in cementitious composites by means of a voxel-based finite element model. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 90. pp. 157–170. DOI: [10.1016/j.commatsci.2014.03.066](https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2014.03.066)
45. Goehler H., Jehring U., Meinert J., Hauser R., Quadbeck P., Kuemmel K., Stephani G., Kieback B. Functionalized Metallic Hollow Sphere Structures. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 335–339. DOI: [10.1002/adem.201300057](https://doi.org/10.1002/adem.201300057)
46. Schumacher Th.C., Klein T.Y., Treccani L., Rezwan K. Rapid Sintering of Porous Monoliths Assembled from Microbeads with High Specific Surface Area and Multi-modal Porosity. *Advanced Engineering Materials*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 151–155. DOI: [10.1002/adem.201300220](https://doi.org/10.1002/adem.201300220)
47. Shaskol'skaia M.S. *Kristallografiia* [Crystallography]. Moscow, Vysshiaia shkola Publ., 1976. 392 p. (in Russian).
48. Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktsii* [Applied problems in thermal strength of structural elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 296 p. (in Russian).
49. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mehaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008. 512 p. (in Russian).
50. Onami M., ed. *Vvedenie v mikromekhaniku* [Introduction to micro-mechanics]. Trans. from Japanese. Moscow, Metallurgiia Publ., 1987. 280 p.
51. Nye J.F. *Physical Properties of Crystals*. London, Oxford University Press, 1957. (Russ. ed.: Nye J.F. *Fizicheskie svoistva kristallov*. Moscow, Mir Publ., 1967. 385 p.).