НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. ISSN 1994-0408

Влияние равномерного движения границы на температурное поле полупространства, подверженного нагреву внешним тепловым потоком

08, август 2014

DOI: 10.7463/0814.0726072

Власов П. А.[1,a]

УДК 536.2

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[a]pvlx@mail.ru

Для одномерной задачи определения температурного поля полупространства с движущейся по заданному закону границей, подверженного воздействию нестационарно-го теплового потока, получена аналитическая зависимость решения от температуры границы области. Для определения температуры границы составлено интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решение которого проведено численно. С использованием полученного представления решения исследованы характерные особенности процесса формирования изучаемого температурного поля при реализации различных законов движения границы и различных законов изменения во времени внешнего теплового потока.

Ключевые слова: температурное поле; полупространство; подвижная граница

Введение

В теории теплопроводности особое место занимают задачи, решения которых могут быть представлены в аналитически замкнутом виде. Эти представления могут быть использованы не только для проведения параметрического анализа температрного поля изучаемой системы с целью оптимизации ее тепловой защиты, но и для тестирования вновь создаваемых вычислительных комплексов. Сложности, возникающие при поиске таких решений, хорошо описаны в литературе [1].

Следует заметить, что во многих практически важных инженерных задачах процесс формирования температурного поля в изучаемой конструкции сопровождается уносом части вещества с поверхности, что приводит к изменению ее границ во времени. Необходимость учета подвижности границ изучаемой области существенно усложняет получение аналитических решений соответствующих задач даже в простейших случаях, когда закон движения границы известен [1, 2, 3, 4, 5]. Так, в работе [6] задача нахождения температуры подвижной границы полупространства в условиях нестационарного теплообмена с внешней средой сведена к задаче решения уравнения Вольтерра.

Целью настоящей работы является изучение влияния равномерного движения границы твердого тела, моделируемого полупространством, на процесс формирования его температурного поля в условиях воздействия стационарного теплового потока.

1. Математическая модель

Будем предполагать, что рассматриваемое полупространство является однородным, а интенсивность теплового потока не зависит от пространственных координат. Это позволяет выбрать в качестве объекта исследований одномерную математическую модель изучаемого процесса

$$\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}, \quad \xi > V_0\mathrm{Fo}, \ \ \mathrm{Fo} > 0, \tag{1}$$

$$\theta(\xi,0) = 0, \quad \xi > 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=V_0\mathrm{Fo}} = -Q, \quad \mathrm{Fo} \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\theta(\xi,\mathrm{Fo})$ — температурное поле полупространства; $\xi = \dfrac{z}{z_*}$; $\mathrm{Fo} = \dfrac{\varkappa t}{z_*^2}$; $\theta = \dfrac{T-T_0}{T_0}$; $Q = \dfrac{q_0 z_*}{\lambda}$; $V_0 = \dfrac{v_0 z_*^2}{\varkappa}$; z — пространственная переменная; z_* — единица масштаба переменной z; t — текущее время; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; T — температура изучаемой области; $T_0 = \mathrm{const}$ — температура изучаемой области в начальный момент времени $t = 0$; $q_0 = \mathrm{const}$ — мощность внешнего теплового потока; $v_0 = \mathrm{const}$ — скорость движения границы полупространства; λ – коэффициент теплоотдачи на границе $z = 0$ полупространства.

При решении задачи (1)–(3) будем предполагать, что

$$\left.\theta(\xi,\mathrm{Fo})\right|_{\mathrm{Fo}>0} \in L^2[V_0\mathrm{Fo},\, +\infty), \tag{4}$$

т.е. при каждом фиксированном значении $\mathrm{Fo} > 0$ функция $\theta(\xi,\mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом по пространственной переменной $\xi \in [V_0\mathrm{Fo}, +\infty)$. Кроме того, будем предполагать, что для каждого значения ξ функция $\theta(\xi,\cdot)$ является оригиналом преобразования Лапласа [7].

Для решения рассматриваемой задачи удобно сделать замену переменных

$$x = \xi - V_0\mathrm{Fo}, \quad \tau = \mathrm{Fo},$$

перейдя в систему координат, связанную с движущейся границей полупространства. В этом случае модель (1)–(3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta(x,\tau)}{\partial x^2} + V_0\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}, \quad x > 0, \ \ \tau > 0, \tag{5}$$

$$\theta(x,0) = 0, \quad x > 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0} = -Q, \quad \tau \geqslant 0, \tag{7}$$

а условие (4) запишется в виде

$$\theta(x, \tau)\Big|_{\tau>0} \in L^2[0, +\infty). \tag{8}$$

2. Решение поставленной задачи

Для решения задачи (5)–(7) воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа по временно́й переменной τ. Применяя это преобразование к уравнению (5) и условиям (7), (8) с учетом начального условия (6), приходим к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2u(x,s)}{dx^2} + V_0\frac{du(x,s)}{dx} - su(x,s) = 0, \quad x > 0, \tag{9}$$

$$\frac{d\,u(x,s)}{dx}\Big|_{x=0} = -\frac{Q}{s}, \tag{10}$$

где $u(x, s)$ — изображение неизвестного решения $\theta(x, \tau)$; s – параметр преобразования;

$$u(x, s)\Big|_{s\in\mathbb{C}} \in L^2[0, +\infty). \tag{11}$$

С учетом условия (11) решение задачи (9)—(10) можно представить в виде

$$u(x, s) = C(s)e^{-x(V_1+\sqrt{V_1^2+s})},$$

где использовано обозначение

$$V_1 = V_0/2, \tag{12}$$

а функция $C(s)$ полностью определяется граничным условием (10):

$$C(s) = \frac{Q}{s(V_1 + \sqrt{V_1^2 + s})}.$$

Таким образом, решение задачи (9)—(11) можно представить в виде

$$u(x, s) = \frac{Q}{s(V_1 + \sqrt{V_1^2 + s})}e^{-x(V_1+\sqrt{V_1^2+s})}. \tag{13}$$

Непосредственный переход от изображения $u(x, s)$, определяемого равенством (13), к оригиналу $\theta(x, \tau)$ с использованием таблиц «изображение — оригинал» возможен [8], но не очень удобен. Поэтому для нахождения решения задачи (5)—(8) воспользуемся формулой обращения [7]

$$\theta(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\tau}u(x, s)\,ds. \tag{14}$$

Функция $u(x, s)$ имеет две особые точки $s = 0$ и $s = -V_1^2 = -V_0^2/4$, которые являются простым полюсом и точкой ветвления соответственно, поэтому рассмотрим представленный на рис. 1 контур $\mathcal{K}$, где $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_5A_6}$ и $\overset{\frown}{A_3A_4}$, — дуги окружностей радиусов R и ρ соответственно с центрами в точке $-V_1^2 = -V_0^2/4$. Поскольку обход контура совершается против часовой стрелки, то в соответствии с теоремой Коши о вычетах справедливы равенства

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} e^{s\tau} u(x,s)\,ds = 2\pi i\ \mathrm{res}_{s=0}\ e^{s\tau} u(x,s) = 2\pi i \lim_{s\to 0} s e^{s\tau} u(x,s) = 2\pi i \frac{Qe^{-xV_0}}{V_0}. \qquad (15)$$

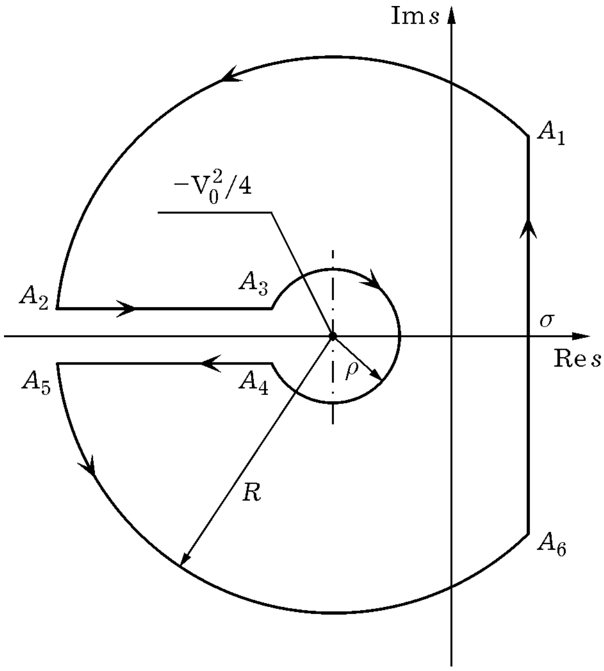

Рис. 1. Контур $\mathcal{K}$ в комплексной плоскости для вычисления обратного преобразования Лапласа

Перейдем к рассмотрению интегралов вдоль отдельных частей контура $\mathcal{K}$. Можно показать, что существуют $M_0 > 0$ и $R_0 > 0$, такие, что для всех $R \geqslant R_0$, $x \geqslant 0$ функция $u(x,s)$ при s, принадлежащем окружности $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z + V_1^2| = R\}$, удовлетворяет неравенству

$$|u(x,s)| \leqslant \frac{M_0}{R^2}.$$

В соответствии с леммой Жордана [11] из этого следует, что

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\overset{\frown}{A_1A_2} \cup \overset{\frown}{A_5A_6}} e^{s\tau} u(x,s)\,ds = 0. \qquad (16)$$

Если $s \in \overset{\frown}{A_3A_4}$, то $s = \rho e^{i\phi} - V_1^2$, $ds = \rho i e^{i\phi}\,d\phi$, и, согласно (13),

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho\to 0+} \int\limits_{\overset{\frown}{A_3A_4}} e^{s\tau} u(x,s)\,ds =$$

$$= \frac{Qe^{-xV_1}}{2\pi i} \int -\pi^{\pi} \left(\lim_{\rho\to 0+} \frac{e^{\rho\tau \exp i\phi} e^{-x\sqrt{\rho}\exp i\phi/2}}{(\rho e^{i\phi} - V_1^2)\sqrt{\rho} e^{i\phi/2}} \rho i e^{i\phi} \right) d\phi = 0. \quad (17)$$

Для вычисления интеграла

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \rho\to 0+}} \int\limits_{\overrightarrow{A_2A_3}\cup\overrightarrow{A_4A_5}} e^{s\tau} u(x,s)\, ds \tag{18}$$

вдоль разреза $\overrightarrow{A_2A_3}\cup\overrightarrow{A_4A_5}$ сделаем предварительную замену переменной интегрирования $v^2 = -s - V_0^2/4$, $v \geqslant 0$, $ds = -2v\,dv$. Поскольку $\sqrt{s+V_0^2/4} = iv$ на верхнем берегу разреза (т.е. $s \in \overrightarrow{A_2A_3}$) и $\sqrt{s+V_0^2/4} = -iv$ на его нижнем берегу (т.е. $s \in \overrightarrow{A_4A_5}$), то, согласно (13),

$$I_3 = \frac{Q}{\pi i} e^{-\tau V_1^2} e^{-V_1 x} \int\limits_0^{+\infty} \frac{v e^{-\tau v^2}}{v^2+V_1^2} \left(\frac{\cos(vx) - i\sin(vx)}{V_1 + iv} - \frac{\cos(vx) + i\sin(vx)}{V_1 - iv} \right) dv.$$

Поскольку в правой части последнего равенства в квадратных скобках под интегралом стоит разность комплексно сопряженных чисел, получаем

$$I_3 = \frac{Q}{\pi i} e^{-\tau V_1^2} e^{-V_1 x} \int\limits_0^{+\infty} \frac{v e^{-\tau v^2}}{v^2+V_1^2} \left(2i\,\mathrm{Im}\,\frac{\cos(vx) - i\sin(vx)}{V_1 + iv} \right) dv =$$

$$= \frac{2Qe^{-\tau V_1^2} e^{-xV_1}}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{v e^{-\tau v^2}}{(v^2+V_1^2)^2} \big(v\cos(vx) + V_1 \sin(vx) \big)\, dv. \tag{19}$$

Согласно (14) из равенств (15)–(19) формально следует, что

$$L^{-1}[u(x,s)] = \frac{Qe^{-xV_0}}{V_0} - I_1 - I_2 - I_3,$$

откуда с учетом (12) получаем представление

$$\theta(x,\tau) = \frac{Qe^{-xV_0}}{V_0} - \frac{2Qe^{-\tau V_0^2/4} e^{-xV_0/2}}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{v e^{-\tau v^2}}{(v^2+V_0^2/4)^2} \left(v\cos vx + \frac{V_0}{2} \sin(vx) \right) dv. \tag{20}$$

3. Результаты и их обсуждение

Непосредственный анализ полученного решения (20) показывает, что при $\tau \to +\infty$

$$\theta(x,\tau) \to \frac{Qe^{-xV_0}}{V_0},$$

т.е. при любой скорости $V_0 > 0$ движения границы температура в каждой точке x рассматриваемого полупространства имеет асимпотическое значение, которое прямо пропорционально величине Q теплового потока и обратно пропорционально скорости V_0. Этот результат имеет наглядное физическое объяснение: поскольку по мере удаления от границы $x = 0$ вглубь полупространства температура падает, то рост V_0 приводит к более быстрому приближению к холодным слоям и, как следствие, к снижению температуры вблизи границы. Стоит также заметить, что принципиальное отличие рассматриваемого случая $V_0 > 0$ от случая $V_0 = 0$ заключается в том, что при неподвижной границе значение температуры в каждой точке x неограниченно возрастает с увеличением времени τ (последнее очевидно следует из физических соображений).

Также из физических соображений следует, что максимальное по координате значение температуры достигается на границе полупространства, поэтому для изучения влияния скорости движения покрытия на температурное состояние области достаточно рассмотреть ее значение $\theta(0,\tau)$ на границе. На рис. 2 представлены результаты расчетов, проведенных с использованием формулы (20). Графическая информация позволяет сделать вывод о том, что рост скорости V_0 приводит не только к снижению асимпотоического значения температуры границы, но и к уменьшению продолжительности переходного процесса от $\theta(0,0) = 0$ до $\theta(0,\tau) \approx Q/V_0$.

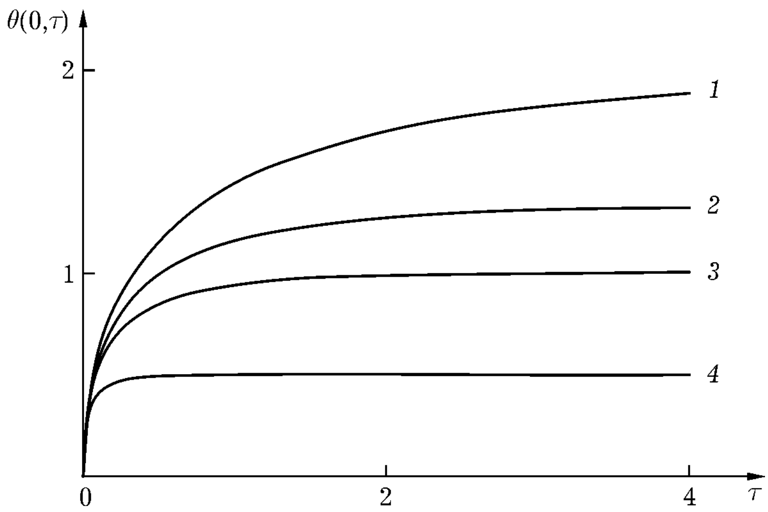

Рис. 2. Зависимость температуры $\theta(0,\tau)$ границы полупространства от скорости V_0 при $Q = 2$: *1* — $V_0 = 1$; *2* — $V_0 = 1.5$; *3* — $V_0 = 2$; *4* — $V_0 = 4$

Заключение

Для задачи нахождения температурного поля полупространства с равномерно движущейся по заданному закону границей, подверженного воздействию стационарного теплового потока, получено представление решения в аналитически замкнутом виде. С использованием этого представления исследованы наиболее характерные особенности процесса формирования изучаемого температурного поля.

Установлено, что в случае ненулевой скорости движения температура в каждой точке изучаемой области (относительно связанной с полупространством подвижной системы координат) имеет асимптотическое значение, которое прямо пропорционально мощности внешнего теплового потока и обратно пропорционально скорости движения границы.

Список литературы

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 553 с.
2. Карташов Э.М., Любов Б.Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83–111.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74, № 2. С. 171–195.
5. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74, № 3. С. 81–86.
6. Аттетков А.В., Власов П.А., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле полупространства в нестацонарных условиях теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. 2002. Т. 75, № 6. С. 172–178.
7. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 288 с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
9. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: учеб. для вузов. М.: Наука, 1999. 320 с.
10. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 520 с.
11. Диткин В.А., Прудников А.В. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 468 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. ISSN 1994-0408

The Influence of the Boundary Motion on Temperature Field in the Half-Space Under External Heat Flux

08, August 2014

DOI: 10.7463/0814.0726072

Vlasov P. A.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
[a]pvlx@mail.ru

Keywords: temperature field, half-space, moving boundary

The tasks that can be solved analytically take a special place among the problems of nonstationarity heat conduction. This species can be used for parametric optimization of thermal protection structures and for testing of computational algorithms.

In this paper we consider the problem of finding the temperature field of a solid, modeled half-space, the outer boundary of which is uniformly moving, and which is under the constant heat flux. The representation of the solution of this problem in the form of an improper integral of the first kind was obtained using the Laplace transform in the time variable.

The obtained representation was used for the research of the most characteristic features of the formation of the temperature field in the area. It was established that in the case of non-zero boundary velocity the temperature at each point of the half-space (with respect to the moving coordinate system associated with a moving boundary) has an asymptotic value as time tends to infinity. This value is directly proportional to the power of the external heat flux and inversely proportional to the velocity of the boundary. By conducting computational experiments using the obtained analytical representation of the solution is established that the growth velocity of the boundary leads not only to a decrease in the asymptotic values of the temperature, but also to reduce the time of transition.

References

1. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytic methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1985. 553 p. (in Russian).

2. Kartashov E.M., Liubov B.Ia. Analytical methods for solving boundary value problems for the heat equation in a region with moving boundaries. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport = Proceedings of the USSR AS. Power engineering and transport*, 1974, no. 6, pp. 83–111. (in Russian).

3. Kartashov E.M. Analytical Methods of Solution of Boundary — Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in Regions with Moving Boundaries. *Izv. RAN. Energetika = Proceedings of the RAS. Power engineering*, 1999, no. 5, pp. 3–34. (in Russian).

4. Kartashov E.M. Analytical Methods of Solution of Boundary — Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in Regions with Moving Boundaries. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2001, vol. 74, no. 2, pp. 171–195. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, iss. 2, pp. 498–536. DOI: 10.1023/A:1016641613982).

5. Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Temperature Field of a Half-Space with a Thermally Thin Coating in Pulse Modes of Heat Exchange with the Environment. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2001, vol. 74, no. 3, pp. 81–86. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, iss. 3, pp. 647–655. DOI: 10.1023/A:1016756227188).

6. Attetkov A.V., Vlasov P.A., Volkov I.K. Influence of the Mobility of a Boundary on the Temperature Field of a Half-Space under Unstable Conditions of Heat Exchange with the Environment. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2001, vol. 75, no. 6, pp. 172–178. (English translation: *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 75, iss. 6, pp. 1454–1462. DOI: 10.1023/A:1022143716313).

7. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. *Integral'nye preobrazovaniia i operatsionnoe ischislenie* [Integral transforms and operational calculus]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1996. 288 p. (in Russian).

8. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).

9. Sveshnikov A.G., Tikhonov A.N. *Teoriia funktsii kompleksnoi peremennoi* [Theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 1999. 320 p. (in Russian).

10. Morozova V.D. *Teoriia funktsii kompleksnogo peremennogo* [Theory of functions of a complex variable]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009. 520 p. (in Russian).

11. Ditkin V.A., Prudnikov A.V. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniiu* [Handbook of Operational Calculus]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1965. 468 p. (in Russian).