

Применение аналитических методов к исследованию парето - оптимальных систем управления

04, апрель 2014

DOI: 10.7463/0414.0704897

Романова И. К.

УДК 531.36, 517.977

Россия, МГТУ им. Баумана

marti2003@yandex.ru

1. Постановка задачи

Задачи многокритериальной оптимизации (далее МКО) или многокритериальные задачи выбора решения [1] относят к задачам исследования операций в том случае, когда критерии независимы и задано направление улучшения значений критериев. Эти задачи успешно решаются в рамках теории многокритериальной оптимизации — математической дисциплины, базирующейся на аксиомах выбора решения и изучающей следствия этих аксиом. Рассматриваются два пространства: пространство решений X (в частном случае, пространство оптимизируемых параметров) и пространство критериев, используемых при выборе решения ЛПР (лицом, принимающим решение) W . Как и в задаче одномерной (скалярной оптимизации), на практике в пространстве решений выделяют области практически реализуемых решений. Например, в силу технических ограничений, невозможно установить бесконечно большие коэффициенты усиления, или значения управляющих напряжений выше допустимых. В этом смысле задача оптимизации на практике — это всегда задача с ограничениями. В технических приложениях говорят о функциональных ограничениях. Пример постановки задачи проектирования регуляторов приводится в [2]. Принципиальное свойство задач многокритериальной оптимизации — это, как правило, взаимная противоречивость отдельных частных критериев. На преодоление этой проблемы и нацелены многочисленные методы [3-12].

Математическая формулировка задачи принятия решений при нескольких критериях такова: пусть набор из m критериев выбора решения представляет собой совокупность функций $(h_1, h_2, \dots, h_m)$, заданных на пространстве X (или, может быть, его некоторой части, включающей, однако, множество допустимых решений $\mathbf{x} \in X$). Совокупность критериальных функций задает некоторое отображение $\mathbf{h}=(h_1, h_2, \dots, h_m)$, действующее

щее из X в H . Множество $Y = h(X) = \{y | y = h(x), x \in X\}$ называют множеством допустимых значений критериев.

Важнейшую роль в проблеме многокритериальной оптимизации играет аксиома Парето [7],[8]. Если оценка одного из двух вариантов не хуже оценки второго варианта по всем компонентам, причем, по крайней мере, по одной из них – строго лучше, то первый вариант предпочтительнее второго, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X, h_i(\mathbf{x}') \leq h_i(\mathbf{x}''), i = 1, \dots, m \\ \exists k \in \{1, 2, \dots, m\} : h_k(\mathbf{x}') < h_k(\mathbf{x}'') = \mathbf{x}' \succ_X \mathbf{x}'' \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь символом $\succ_X$ обозначено бинарное отношение предпочтения ЛПР, определённое на X , а запись $\mathbf{x}' \succ_X \mathbf{x}''$ означает, что из данной пары вариантов ЛПР выберет первый вариант и не выберет второй. К паре исходных объектов задачи многокритериального выбора X, h , добавляется бинарное отношение предпочтения ЛПР $\succ_X$ как обязательная информация для применения ЛПР аксиомы Парето. Только тогда имеется возможность из пары вариантов $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$, подчиняющихся условию (1), исключить второй вариант как «заведомо негодный» [9]. Вторая аксиома - аксиома исключения [7-10] состоит в том, что вариант, не выбираемый в какой-либо паре, не должен оказаться среди выбранных и из исходного множества возможных вариантов, т.е.

$$\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X, \quad \mathbf{x}' \succ_X \mathbf{x}'' = \mathbf{x}'' \notin C(X) \quad (2)$$

Принятие сформулированных выше двух аксиом (1) и (2) даёт возможность установить фундаментальный принцип многокритериального выбора - принцип Эджворта - Парето [9], а именно, при выполнении аксиомы Парето и аксиомы исключения для любого множества выбираемых вариантов $C(X)$ имеет место включение $C(X) \subset P_\varphi(X)$. Здесь через $P_\varphi(X)$ обозначено множество парето - оптимальных вариантов [10], определяемое следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\varphi(X) = \{ \mathbf{x}^* \in X \mid \text{не существует } \mathbf{x} \in X \text{ такого, что} \\ h_i(\mathbf{x}) \leq h_i(\mathbf{x}^*), i = 1, \dots, m, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \}. \end{aligned}$$

В случае принятия аксиомы Парето и аксиомы исключения, выбираемые варианты не могут оказаться за пределами множества Парето, и при этом выбранным может оказаться любой парето - оптимальный вариант.

2. Граница Парето

Получение парето - оптимальных вариантов в силу противоречивости частных критериев не означает достижения окончательного решения. Набор этих вариантов лишь предлагается проектировщику (ЛПР).

Для проектирования технических объектов и, в частности, систем управления используются процедуры анализа и структурного и параметрического синтеза. Получение

парето - оптимальных вариантов позволяет проектировщику оценить возможности системы в рамках принятой структуры, т.е. понять, каковы наилучшие значения критериев качества. Далее в соответствии с принятыми предпочтениями можно выбрать проектный вариант, в котором достигаются требуемые показатели по важнейшим частным критериям, правда, за счет ухудшения других критериев. Несмотря на многовариантность, ценность получения парето – оптимальных вариантов заключается в том, что в данных обстоятельствах это решения, лучше которых невозможно достичь.

Анализ парето – оптимальных вариантов позволяет скорректировать систему предпочтений. Наконец, если парето – оптимальные варианты не удовлетворяют требованиям к системе, принимается принципиальное решение об изменении структуры системы, например, о введении нового типа коррекции.

Для представления парето – оптимальных вариантов вводится в рассмотрение понятие границы Парето, удовлетворяющей условиям

$$P(X) = \{x \in X : \{x' \in X : x' \leq x, x' \neq x\} = \emptyset\}. \quad (3)$$

3. Обзор существующих методов решения МКО и определение задачи актуальных исследований

Нахождению парето - оптимальных вариантов и в частности границы Парето (3), посвящено множество публикаций. Обратим внимание на три направления исследований: это визуализация границы Парето с помощью численных методов аппроксимации [4-6],[11], методы зондирования пространства параметров [3],[12], а также сужение множества Парето [7].

Методы многокритериальной оптимизации практически всегда реализуются с помощью ЛПР (лица принимающего решение). Исключение составляют так называемые *preference methods*, т.е. не учитывающие предпочтения ЛПР. Однако такой подход не всегда гарантирует принятия наилучшего решения. Например, известны проблемы, использования скаляризации (свертки) критериев или выбора решающего критерия, при использовании которых частные критерии могут не удовлетворяться в полной мере.

Поэтому основная часть методов многокритериальной оптимизации ориентирована на вовлечение ЛПР в процесс оптимизации.

Особое значение придается в МКО аппроксимации фронта Парето. Научная школа ВЦ РАН им. А.А. Дородницына вносит значительный вклад в решение задач визуализации фронта Парето [4-6]. Среди зарубежных источников можно упомянуть, например, [20]. Но при этом возникает проблема вычислительной затратности, в связи с чем значительные усилия исследователей направлены на сокращение времени вычислений за счет применения алгоритмов параллельных вычислений.

Потребность в большом объеме вычислений, является далеко не единственной. ЛПР необходимо представить для принятия решения пригодный для практического анализа объем данных. В связи с этим возникает проблема сужения множества Парето, которая многие годы разрабатывается, например, в трудах В.Д. Ногина [7-9].

Идея активного участия ЛПП в МКО привела к разработке многочисленных интерактивных методов, состоящих в чередующихся процедурах выбора и автоматического расчета. В обзорах литературы указываются разные базовые методы. Например, стоит упомянуть методы ARBDS [21], CONTEXT[22], GUESS[23].

Следует заметить, что поскольку наиболее активно методы МКО используются в решении экономических задач, как правило, в работах не прослеживается очевидная связь между интерактивными методами и классическим методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), в котором ЛПП по существу задает такие же условия: назначает весовые коэффициенты частных критериев оптимальности; накладывает ограничения на значения частных критериев оптимальности; выполняет оценку предлагаемых МКО - системой альтернатив. Важным свойством интерактивных методов является то, что предпочтения ЛПП могут изменяться в процессе оптимизации.

Сравнительно новыми являются генетические алгоритмы, принадлежащие к классу эволюционных алгоритмов. Хотя они и обладают рядом характеристик, делающих их более предпочтительными, чем классические методы оптимизации, однако обе главные проблемы остаются: вычислительная затратность и большое количество генерируемых решений, которые вынуждено просматривать ЛПП [24],[25]. Проблема сортировки решается в методе NSGA-II [26]. Преимущество метода в отсутствии требований по виду фронта Парето, однако, найденные решения являются лишь приближениями Парето – решений. Интерактивные методы часто используют информацию об желаемых уровнях критериев. Примером может служить метод NIMBUS (Nondifferentiable Interactive Multiobjective Bundle-based optimization System). Этот метод разработан в Хельсинском университете (г. Хельсинки, Финляндия) под руководством профессора К. Миеттинен и др. [27]. Вообще говоря, значительная библиография финской школы по разработке интерактивного подхода к МКО приведена в монографии [28]. В работе, в частности, приведены подходы HBE (hyperbox Exploration) и IHBE. В процессе оптимизации выстраиваются аппроксимирующие функции.

Итак, основные проблемы, возникающие в процессе МКО - это большой объем вычислений и, часто, слишком широкий набор предлагаемых вариантов.

Прикладные задачи, решаемые в ходе МКО, например, синтез систем управления, вносят свои сложности. Во первых, задача получения Парето – оптимальных решений вообще не ставится в таких фундаментальных трудах по проектированию систем управления, как [16], [29]. Не упомянута проблема оптимума Парето и в сравнительно недавнем обзоре по проектированию систем управления летательными аппаратами, как [30].

Классическим подходом к проектированию систем управления является метод частотных характеристик [16],[17]. Для нахождения Парето – оптимальных решений применительно к системам управления используется метод зондирования пространства параметров [3], [18]. Но, как показывают расчеты [12] он весьма затратен, несмотря на применение равномерно распределенных последовательностей.

Часто расчеты с большим количеством вычислений проводятся для одной структуры исследуемой системы. Переход к другой структуре, очевидно, потребует повторных расчетов. Однако прежде чем переходить к новым исследованиям, целесообразно понять пределы улучшения качества системы данной структуры. Итак, ставится дополнительная задача МКО: определить наилучшие варианты в рамках предлагаемого проектного решения. Такую задачу невозможно решить в рамках метода частотных характеристик, тем более в рамках синтеза ПИД – регуляторов [17] или аналитического конструирования, где структура уже задана априори.

В данной работе предлагается решение задачи МКО, в котором по возможности преодолеваются перечисленные недостатки. Условия применимости показаны при формулировке утверждений метода. Предполагается, что в практических случаях для критериев качества, которые представляются в виде математических зависимостей, целесообразным является применение аналитических и полуаналитических методов. Предлагаемое решение апробируется к важной задаче синтеза двухконтурной системы управления движением летательного аппарата, которая традиционно решалась путем применения метода частотных характеристик [19]. Следует отметить, что применение прямых критериев качества является более наглядным.

Здесь также имеются трудности, заключающиеся в том, что обязательным условием для методов, описанных в отечественной и зарубежной литературе, является требование о касании линий уровня. Необходимо выявить возможность получения Парето - оптимальных решений и в условиях пересекающихся линий уровня.

В практической части предлагается применение аналитических и полуаналитических методов оптимизации в рамках задачи синтеза систем управления летательными аппаратами, причем используются прямые критерии качества. В разнообразных методах синтеза систем, основанных как на прямых, так и на косвенных критериях в случае многокритериальной задачи предлагается заменить подходы скаляризации критериев и зондирования пространства параметров на аналитические методы, полученные в первой части работы.

4. Исходные формулы для аналитического похода

Сформулируем ряд утверждений, которые позволят аналитически определить области Парето - оптимальных решений для монотонных целевых функций, а также определим последовательность исследований.

Первым этапом является определение свойств комонотонности и контрамонотонности исследуемых функций. Используем следующие определения для заданного пространства параметров X , в которой выделена область $X' \in X$ и исследуется векторная целевая функция $h=[h_1, h_2, \dots, h_i, \dots]$, называемая иногда семейством функций h .

Известно, что если для всех точек из $X' \in X$ производные $\partial h_i(\mathbf{x}) / \partial x_j \big|_{X'}$, всех частных критериев h_j для компоненты x_j имеют одинаковый знак, то семейство функций $\mathbf{h}$ комонотонно в $X' \in X$. Если все x_j предполагают выполнение условий комонотонности, то это означает, что семейство функций $\mathbf{h}$ строго комонотонно в X' . Если для некоторого x_j не все $\partial h_i(\mathbf{x}) / \partial x_j \big|_{X'}$ имеют одинаковый знак, то семейство функций $\mathbf{h}$ контрамонотонно по x_j в X' . Для взаимно противоречивых критериев, в рамках нахождения оптимума по Парето, используется следующее определение: если в X' для всех x_j $\mathbf{h}$ являются контрамонотонными, то они полностью (строго) контрамонотонны в X' .

С учетом приведенных понятий конкретизируем задачу определения областей Парето: найти область X^p , состоящую из всех точек X' , где функции $\mathbf{h}$ строго контрамонотонны, т.е. точек, оптимальных (или равновесных) по Парето. Изменив любую переменную в X^p , мы улучшим положение части элементов, но ухудшим — у другой их части.

Выявление области компромиссов или слабого оптимума Парето является вторым этапом исследований. К сожалению, количество возможных проектных решений из этой области слишком велико и не дает ориентира ЛППР (проектировщику). Поэтому для практической деятельности важно отыскание согласованного оптимума (сильного оптимума Парето). Его определение является третьим и окончательным этапом исследований.

Для отыскания сильного оптимума обычно используется применение условия касания поверхностей уровня $h_1(\mathbf{x})=b_1$, $h_2(\mathbf{x})=b_2$, что порождает соответствующую систему линейных уравнений относительно переменных λ . Градиенты в точках соприкосновения задаются формулами

$$\text{grad} h_1(\mathbf{x}) = -\lambda \text{grad} h_2(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Векторное уравнение (4) равносильно n скалярным алгебраическим уравнениям

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\lambda \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_j}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Уравнения (5), вообще говоря, определяют кривую в пространстве параметров:

$$x_1 = \varphi_1(\lambda), \dots, x_n = \varphi_n(\lambda).$$

Если участок этой кривой, на котором $\lambda \geq 0$, принадлежит множеству допустимых параметров X , то он принадлежит и парето - множеству E .

Эти же соотношения получаются при использовании свертки критериев по формуле $h_0(\mathbf{x}) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$, и нахождении минимума функции свертки h_0 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_0}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial h_0}{\partial x_2} = 0; \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = 0; \\ \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Система (6) включает в себя линейные по отношению к λ_1, λ_2 уравнения с параметрами (x_1, x_2) (функции $\partial h_i(x)/\partial x_j$) и может решаться нестандартным образом в том случае, если определитель системы нулевой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = 0. \quad (7)$$

Совокупность точек, на которой существует нулевой определитель (7), и будет областью сильного оптимума Парето. Аналогичная идея свертки и ее геометрическая интерпретация показана, например, в [13]. Очевидно, что приведенные определения эквивалентны и все они требуют решения систем уравнений.

5. Разработка методики аналитического подхода к построению Парето - оптимальных решений

Отметим, что необходимость решения систем уравнений (6) является далеко не единственной трудностью. Несмотря на различия в формулировке задачи, фактически обязательным условием применения всех подходов является касание линий уровня. Так, например, в [14] рассматривается ящик Эджворта и утверждается, что распределение оптимально по Парето тогда и только тогда, когда кривые безразличия (линии уровня) касаются друг друга.

Проблема заключается в том, что кривые безразличия могут не иметь точек касания. Покажем, что и в этих условиях можно построить компромиссную кривую, т.е. предложить проектировщику набор эффективных решений. Плодотворным оказывается применение угла между градиентами. Хотя утверждение об угле τ [15] для трех критериев и формулируется, но оно ограничивается тривиальным случаем строго оптимального решения, т.е. равенства $\tau=\pi$.

Распространим угловое определение сильного оптимума Парето на общий случай взаимного положения кривых безразличия (линий равного уровня). Будем рассматривать задачу минимизации, т.е. чем меньше значение критерия h_i , тем качество системы лучше.

Сначала рассмотрим известное из дифференциальной геометрии условие наличия точек касания двух функций. Говорят, что кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют в точке $P_1(x_1, y_1)$ касание n -ого порядка, если

$$f(x_1) = g(x_1); f'(x_1) = g'(x_1), \dots, f^{(n)}(x_1) = g^{(n)}(x_1), f^{(n+1)}(x_1) \neq g^{(n+1)}(x_1).$$

Это определение предполагает, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_1 производные до $(n+1)$ -ого порядка включительно. В точке касания касательные к кривым совпадают. Одна из кривых лежит по разные стороны от другой в достаточной близости от точки касания в том и только в том случае, если n четно.

Под углом между двумя кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в их общей точке $M(x_0, y_0)$ понимается угол φ между касательными к этим кривым в точке M .

Справедлива формула

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + g'(x_0) f'(x_0)}. \quad (8)$$

Если угол, определяемый по (8) равен 0, то касание внутреннее. При этом $g'(x_0) = f'(x_0)$. Тогда градиенты направлены в одну сторону, изменения критериев происходят в одну сторону и критерии непротиворечивы, т.е. нет необходимости находить парето - решения, ибо с улучшением одного критерия улучшается и второй критерий. Т.о., чтобы задача относилась к поиску границы Парето, необходимо, чтобы касание было внешним, т.е. $\varphi = \pi$. Из формулы для tg знак не ясен, поэтому находят вторые производные. При этом знаки $g''(x_0)$ и $f''(x_0)$ должны быть противоположными и коэффициент $\lambda > 0$. С учетом возможности сингулярности выражения (8), далее угол, определяющий взаимное положение двух касательных, заменим на равный ему с точностью до знака угол между антиградиентами.

Отметим, что отображение линий равного уровня на плоскости параметров в виде кругов, линий и т.п. на плоскость критериев переходит в прямые, параллельные осям координат.

Если критерии вообще не имеют точек касания, то проанализируем свойство монотонности изменения каждого из критериев. Предложим следующее утверждение: если критерии монотонны, т.е. знак производной критериев по оптимизируемым параметрам не меняется, то линия парето в пространстве параметров – это границы области параметров, проведенные в соответствии со знаком производной. Сначала рассмотрим частные случаи.

Пусть $\frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} > 0$ на всем интервале изменения параметров x_2 . Тогда при решении задачи минимизации наилучший результат дает $x_{1\min}$ (это вертикальная линия на плоскости параметров). Для парето - задачи тогда должно выполняться $\frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} < 0$. Если

$\frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} < 0$ на всем интервале изменения параметров x_1 , то при решении задачи минимизации наилучший результат дает $x_{2\min}$ (это горизонтальная линия на плоскости параметров).

Теперь введем несколько утверждений, позволяющих охватить все возможные случаи топологии двухкритериальной задачи.

Для двух частных критериев h_1 и h_2 используем понятие угла между соответствующими векторами антиградиентов на плоскости (x_1, x_2) $\varphi(-\operatorname{grad} h_1, -\operatorname{grad} h_2)|_{X'}$, взятого по наименьшему расстоянию.

Утверждение 1. Пусть антиградиенты частных критериев h_1 и h_2 в точке линий равного уровня расположены в соседних квадратах, т.е. их проекции на одну из осей координат параметров x_1, x_2 сонаправлены, а на другую противоположно направлены. При этом, очевидно, угол между антиградиентами $\varphi(-\text{grad}h_1, -\text{grad}h_2)$ не равен π . Тогда оптимальное по Парето решение располагается на границе области параметров, на которую направлены сонаправленные части антиградиентов.

Утверждение 2. Пусть антиградиенты частных критериев h_1 и h_2 в точке линий равного уровня расположены в одном квадранте, т.е. обе их проекции на оси координат параметров x_1, x_2 сонаправлены. Тогда семейство функций комонотонно, оптимальное решение единственно и располагается на пересечении границ области параметров, на которые направлены сонаправленные части антиградиентов.

Утверждение 3. Пусть антиградиенты частных критериев h_1 и h_2 в точке линий равного уровня расположены в противоположных квадрантах, т.е. обе их проекции на оси координат параметров x_1, x_2 противоположно направлены. При этом угол между антиградиентами $\varphi(-\text{grad}h_1, -\text{grad}h_2)$ не равен π . Тогда семейство функций контрамонотонно и оптимальное по Парето решение располагается на двух пересекающихся границах области параметров, на которые направлены антиградиенты. Иными словами, если угол между антиградиентами $\varphi(-\text{grad}h_1, -\text{grad}h_2)$ не равен π , то для строго контрамонотонных функций оптимальное по Парето решение располагается на границе области параметров X' , образованной двумя прямыми, в сторону которых направлены антиградиенты с углом $\varphi < \pi$.

Условия 2 и 3 можно объединить в одно:

Утверждение 3'. Для контрамонотонных (частично контрамонотонных) функций линия компромиссов пересечение границ области (граница), на которую смотрит угол $\varphi < \pi$.

Утверждение 4. Если для контрамонотонных функций угол $\varphi(-\text{grad}h_1, -\text{grad}h_2)$ равен π и линия Парето рассчитывается по уравнениям (6).

Докажем утверждение 1.

Для этого рассмотрим точку пересечения линий уровня, касательные в ней и антиградиенты.

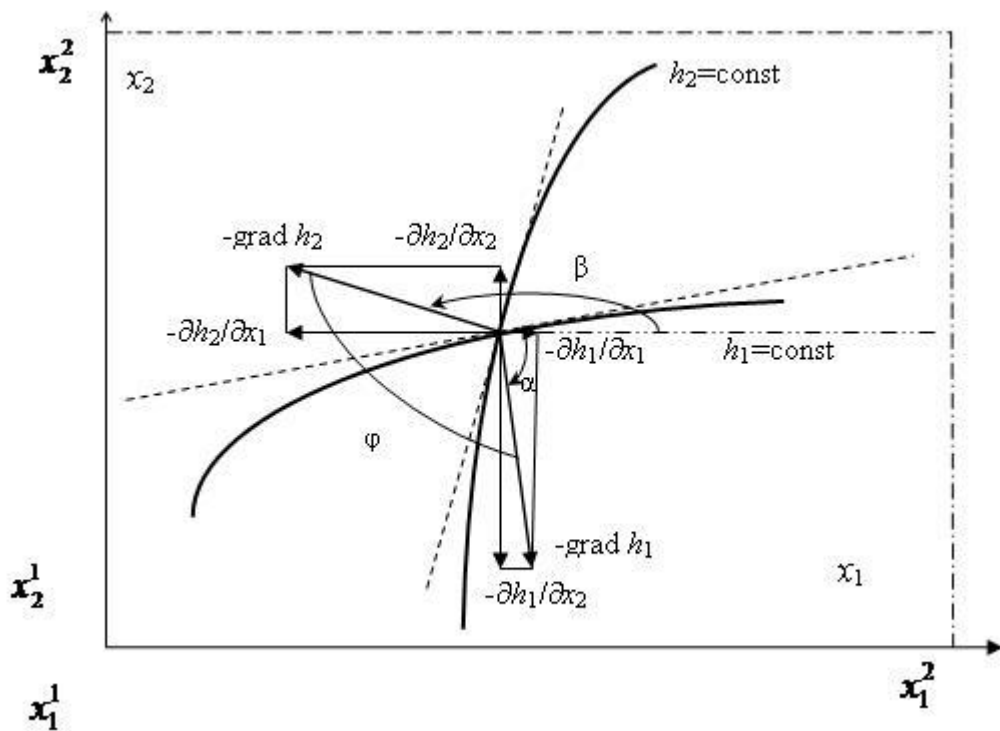


Рис.1. Положение линий уровня и градиентов для строго контрамонотонных функций

На рис. 1 линии уровня пересекаются под углом φ , который соединяет направления антиградиентов по наименьшей дуге.

Определим углы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial h_1}{\partial x_2} / \frac{\partial h_1}{\partial x_1}; \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial h_2}{\partial x_2} / \frac{\partial h_2}{\partial x_1}. \quad (9)$$

Угол между антиградиентами рассчитывается по формуле

$$\varphi = \pi - |\alpha| + (\pi - \beta) = 2\pi + \alpha - \beta. \quad (10)$$

где углы α и β определяются по (9). Заметим, что для $\alpha=\beta$ согласно (10) имеем известное решение $\varphi=\pi$.

Проанализируем направленность антиградиентов на вертикальную или горизонтальную ось. Если

$$\left(-\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right) < 0; \left(-\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right) > 0; -\pi/2 < \alpha < 0,$$

и антиградиент $-\mathbf{grad} h_1$ направлен на горизонтальную ось вниз и правую вертикальную границу.

Если

$$\left(-\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right) < 0; \left(-\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right) > 0; \pi/2 < \beta < \pi,$$

и антиградиент $-\mathbf{grad}h_2$ направлен на верхнюю горизонтальную границу вверх и вертикальную ось влево.

Уточним положение углов α и β относительно направления $\pi/4$.

$$\text{Если } \left|\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right| > \left|\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right|, \text{ то } \operatorname{tg}|\alpha| > 1, |\alpha| > \pi/4, \quad (11)$$

и антиградиент $-\mathbf{grad}h_1$ направлен преимущественно на горизонтальную ось вниз.

$$\text{Если } \left|\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right| < \left|\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right|, \text{ то } \beta > 3\pi/4, \quad (12)$$

и антиградиент $-\mathbf{grad}h_2$ направлен преимущественно на вертикальную ось влево.

Обратимся к соотношению (12) и рассмотрим линию равного уровня для функции h_2 . В точке пересечения, т.е. одинаковых параметров для функций h_1 и h_2 направление наискорейшего уменьшения функции ориентировано преимущественно на вертикальную границу с параметрами $x_1 = x_1^1 = \text{const}$. Это возможно при выполнении условия (12).

Аналогично, используя (11), можно показать, что для функции h_1 направление наискорейшего уменьшения ориентировано на горизонтальную границу $x_2 = x_2^1 = \text{const}$.

Если выполняется альтернативное условие

$$\left|\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right| > \left|\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right|, \text{ то } \pi/2 < \beta < 3\pi/4,$$

и направление наискорейшего изменения функции h_2 ориентировано преимущественно на горизонтальную границу с параметрами $x_2 = x_2^2 = \text{const}$.

По условиям строгой монотонности градиенты должны располагаться в противоположных квадрантах. Определив угол φ как наименьший из углов, соединяющих два антиградиента, получим указанное утверждение.

Утверждение 2 для комонотонных функций проиллюстрируем на следующем рис.

2.

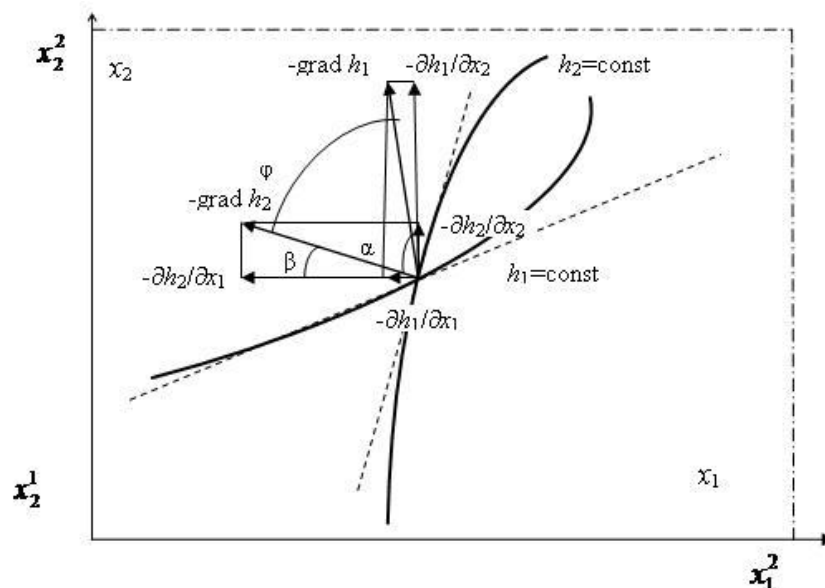


Рис.2. Положение линий уровня и градиентов для комонотонных функций

x_1^1

Очевидно, что угол для комонотонных функций $\varphi < \pi/2$. Уменьшение функций h_1 по параметру x_1 приводит к вертикальной линии $x_1 = x_1^1 = \text{const}$. Аналогично происходит уменьшение h_2 . На линии $x_1 = x_1^1 = \text{const}$ в силу направления второй из производных наилучший результат будет на вертикальной линии $x_2 = x_2^2 = \text{const}$. Пересечение дает искомую точку оптимума, причем такую, что на нее смотрит угол φ .

Утверждение 3. Если функции частично контрамонотонны, то линией оптимума будет та из границ (или пересечение границ), на которую смотрит угол φ .

Это следует из рис.3 и анализов, аналогичных пп. 1,2.

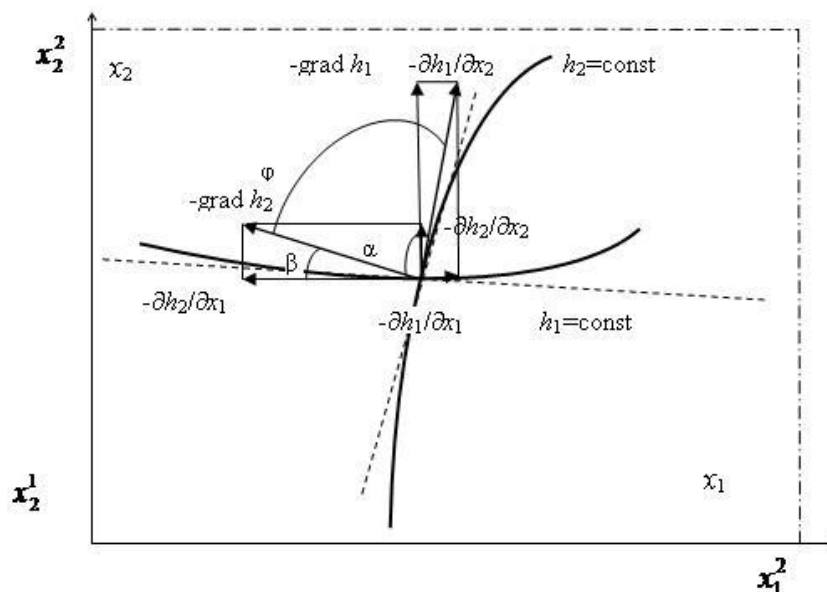


Рис.3. Положение линий уровня и градиентов для частично контрамонотонных функций

Утверждение 4.

Для случая φ строго равного π угловое условие, как показано выше, эквивалентно системе линейных уравнений (6), которые решаются обычным образом.

Общим условием применимости данных утверждений является сохранение положения антиградиентов в данном квадранте.

Все случаи взаимного положения антиградиентов показаны на рис.4.

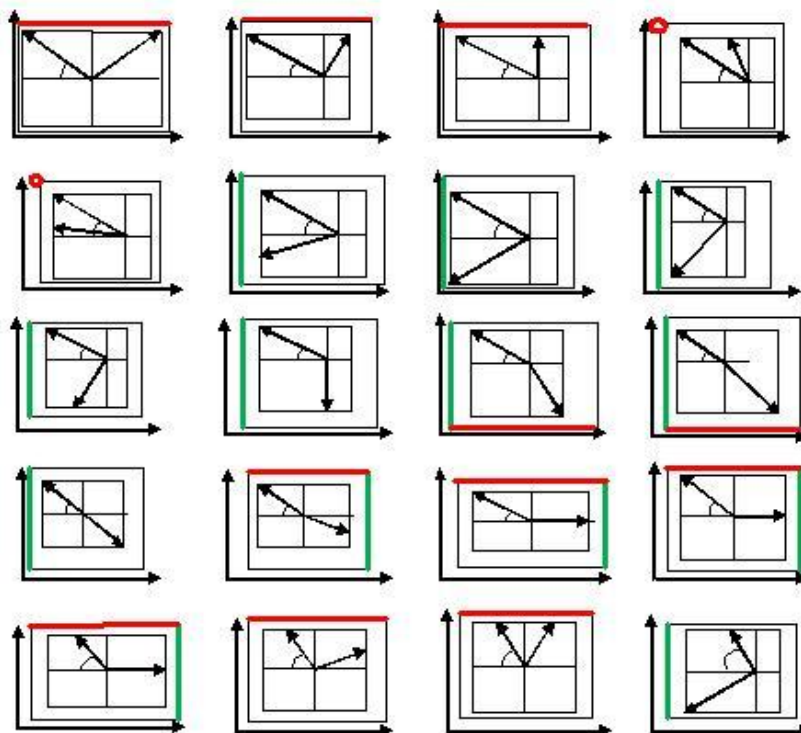


Рис.4. Взаимное расположение антиградиентов и линии Парето

Таким образом, для монотонных функций показаны утверждения, позволяющие избежать непосредственного решения систем уравнений и тем более, численного моделирования путем зондирования пространства параметров, создающего большие трудности.

Алгоритм расчетов выглядит следующим образом:

1. Определяется область допустимых значений параметров.
2. Исследуются свойства комонотонности и контрамонотонности.
3. Строятся линии равного уровня.
4. Определяется тип касания: одностороннее (задача не является строго многокритериальной) или двустороннее (задача относится к парето).
5. Для парето - задачи при наличии касания формируется система алгебраических уравнений, решение которых дает уравнение линии парето в пространстве параметров. Отображение на пространство критериев дает искомую парето - границу.
6. При отсутствии касания анализируется свойство монотонности. Анализ производных позволяет определить две границы в пространстве параметров (по оси абсцисс и оси ординат или по границам, их параллельным).

6. Исследование парето - границы двухконтурной системы стабилизации.

Общие положения применим к практической задаче параметрического синтеза двухконтурной системы управления автоматом стабилизации [2].

Система показана на рис.5

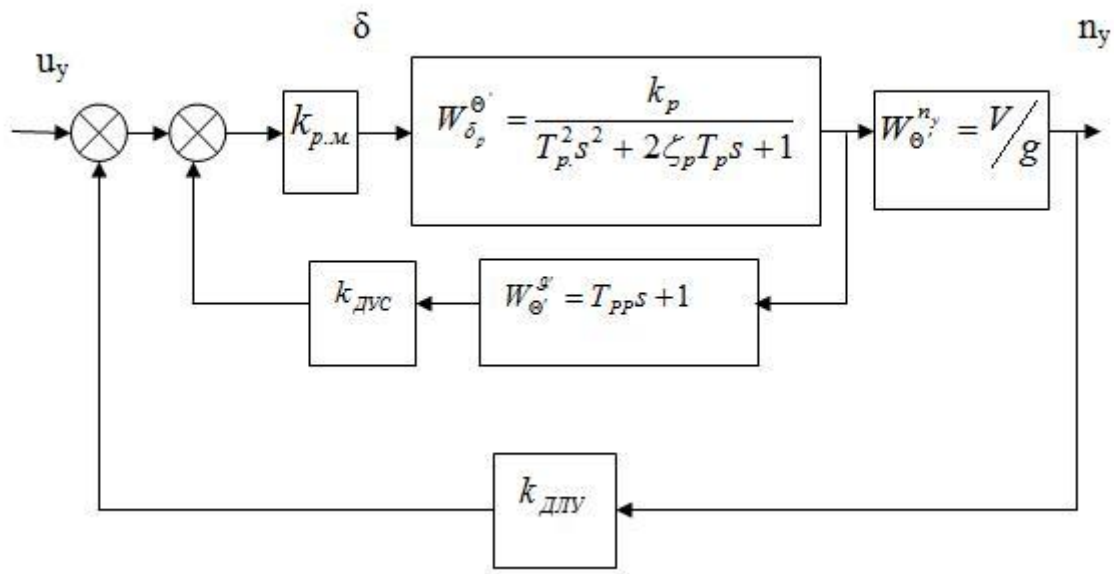


Рис.5. Двухконтурная система стабилизации.

Для задачи параметрического синтеза более физичным представляется использование исходных дифференциальных уравнений.

В этом случае структуре рис.5 соответствует система:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_z}{dt} + a_{11}\omega_z + a_{12}\alpha + a_{13}k_{p.m}(u - k_{двс}\omega_z - k_1\alpha) &= 0; \\ \frac{d\omega_z}{dt} + a_{11}^*\omega_z + a_{12}^*\alpha &= -a_{13}k_{p.m}u; \\ a_{11}^* &= a_{11} - k_{двс}k_{p.m}a_{13}; \\ a_{12}^* &= a_{12} - k_1k_{p.m}a_{13}; \\ a_{13}^* &= k_{p.m}a_{13}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для замкнутой системы (13) передаточная функция от входа (задающего воздействия) к выходу (линейному ускорению) записывается так:

$$W_{\delta_{зам}}^{w_y} = g W_{\delta_{зам}}^{n_y} = a_{42}V \frac{K^* \alpha}{T^{*2}s^2 + 2\zeta^* T^* s + 1} \quad (14)$$

В выражении (16) используются коэффициент усиления K_a^* , постоянная времени T^* и коэффициент демпфирования ζ^* для замкнутой системы:

$$K_a^* = \frac{-a_{13}^*}{(a_{11}^* a_{42}^* + a_{12}^*)},$$

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{(a_{11}^* a_{42}^* + a_{12}^*)}}. \quad (15)$$

$$\zeta^* = \frac{(a_{11}^* + a_{42}^*)}{(a_{11}^* a_{42}^* + a_{12}^*)} \cdot \frac{1}{2T^*} = \frac{(a_{11}^* + a_{42}^*)}{2} T^*. \quad (16)$$

Применение прямых критериев качества, рассчитанных по переходному процессу, является наиболее наглядным и эффективным.

Известны следующие формулы для прямых критериев качества

Перерегулирование:

$$\sigma = 100 e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (17)$$

Время переходного процесса;

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4T}{\zeta}. \quad (18)$$

Время нарастания:

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \arcsin \sqrt{1-\zeta^2}). \quad (19)$$

Область допустимых параметров определим по условиям устойчивости ЛА: летательный аппарат устойчив, если

$$a_{12}^* + a_{11}^* a_{42}^* > 0 \quad (20)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$T^{*2} s^2 + 2\zeta^* T^* s + 1 = 0,$$

где T^* постоянная времени летательного аппарата с замкнутым контуром управления; ζ^* - относительный коэффициент демпфирования летательного аппарата с замкнутым контуром управления.

Особый интерес представляет случая колебательного переходного процесса, т.е. когда корни характеристического уравнения являются комплексными сопряженными. Условие колебательности записывается как $\zeta^* < 1$, тогда корни запишутся так:

$$s_{1,2} = \frac{1}{T} (-\zeta^* \pm i\sqrt{1-\zeta^{*2}}).$$

В качестве параметров рассмотрим коэффициенты в обратной связи (коэффициенты усиления датчиков угловых скоростей и линейных ускорений) $k_{дус}$ и $k_{длу}$.

По условиям устойчивости и колебательности рассчитаны границы параметров $k_{дус}$ и $k_{длу}$ (рис.6):

$$K_{дл\gamma} (Va_{42}/g)k_{pm}a_{13} < a_{12} + a_{11}a_{42} - k_{дус}k_{pm}a_{13}a_{42};$$

$$-K_{дл\gamma} > ((a_{11} - k_{дус}k_{pm}a_{13} - a_{42})^2 - 4a_{12}) / ((Va_{42}/g)k_{pm}a_{13}).$$

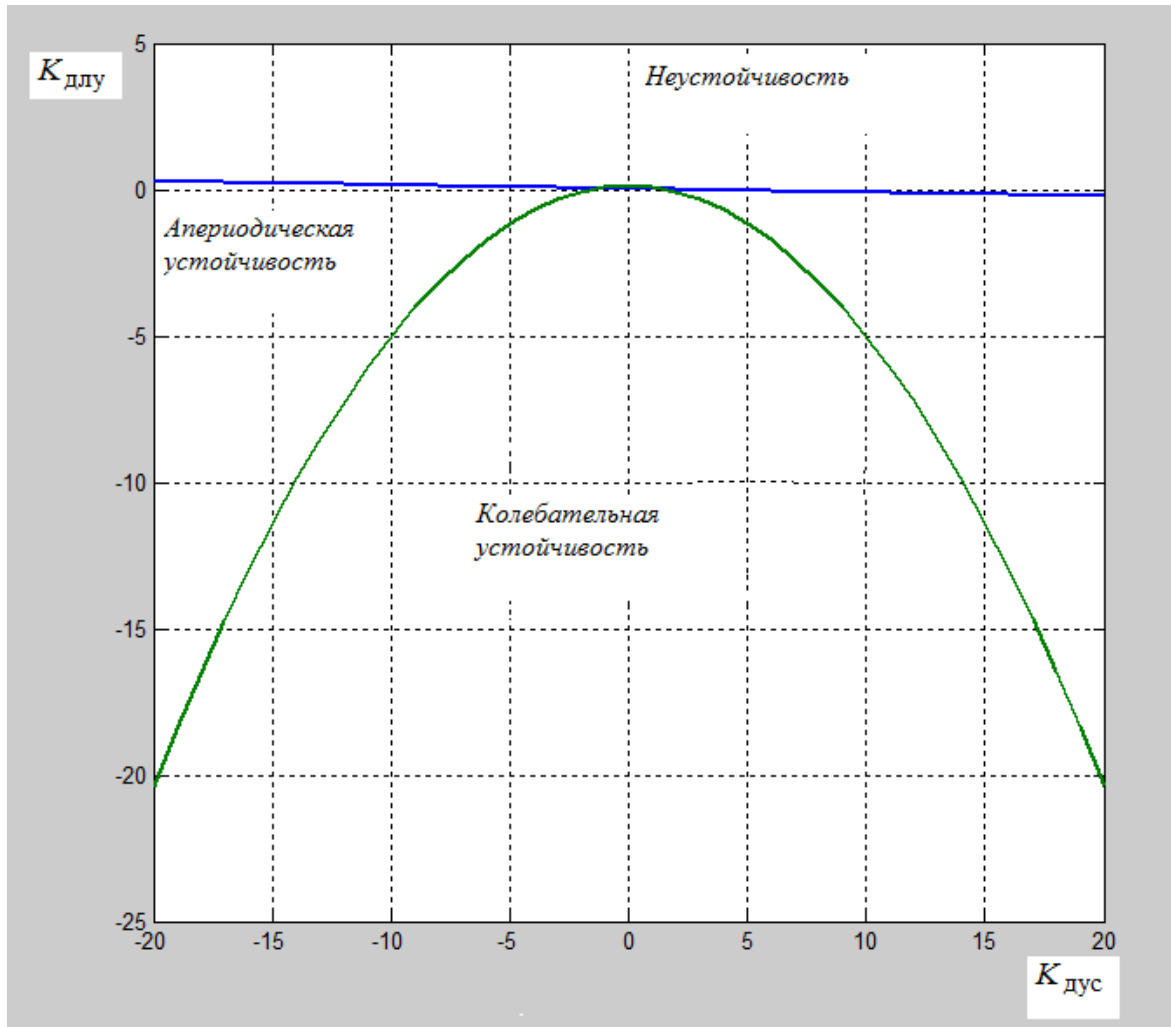


Рис.6.Области устойчивости двухконтурной системы

Аналитические формулы для производных получаются при дифференцировании выражений (19) и (21), в которых вместо исходных постоянной времени T и коэффициента демпфирования используются постоянная времени T^* и относительный коэффициент демпфирования ζ^* летательного аппарата с замкнутым контуром управления. С учетом формул (13), связывающих динамические коэффициенты и коэффициенты датчиков угловых скоростей и нормальных ускорений, определяются производные в следующей форме:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_{дус}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta^*} \frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{дус}}. \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_{дл\gamma}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta^*} \frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{дл\gamma}}. \quad (22)$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial k_{\text{дyc}}} = \frac{\partial t_r}{\partial \zeta^*} \frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{\text{дyc}}} + \frac{\partial t_r}{\partial T^*} \frac{\partial T^*}{\partial k_{\text{дyc}}}. \quad (23)$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial k_{\text{длу}}} = \frac{\partial t_r}{\partial \zeta^*} \frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{\text{длу}}} + \frac{\partial t_r}{\partial T^*} \frac{\partial T^*}{\partial k_{\text{длу}}}. \quad (24)$$

Правые части производных рассчитываются с учетом зависимостей (13), (17), (19):

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{\text{длу}}} = \frac{(a_{11}^* + a_{42})Va_{42}/gk_{\text{pm}}a_{13}}{4(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)^{3/2}}. \quad (25)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{\text{дyc}}} = \frac{-(a_{11}^*a_{42} + 2a_{12}^* - a_{42}^2)k_{\text{pm}}a_{13}}{4(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)^{3/2}}. \quad (26)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial k_{\text{дyc}}} = \frac{a_{42}k_{\text{pm}}a_{13}}{2(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)^{3/2}} \quad (27)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial k_{\text{длу}}} = \frac{Va_{42}/gk_{\text{pm}}a_{13}}{2(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)^{3/2}} \quad (28)$$

Окончательное выражение для производных по исследуемым критериям перерегулирования σ и времени нарастания t_r при использовании соотношений имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_{\text{дyc}}} = \frac{2\pi(a_{11}^*a_{42} + 2a_{12}^* - a_{42}^2)k_{\text{pm}}a_{13}}{(4a_{12}^* - (a_{11}^* - a_{42})^2)^{3/2}} e^{-\zeta^*\pi/\sqrt{1-\zeta^{*2}}}, \quad (29)$$

$$\text{где } \zeta^* = \frac{(a_{11}^* + a_{42})}{2\sqrt{(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)}}.$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_{\text{длу}}} = \frac{-2\pi(a_{11}^* + a_{42})Va_{42}/gk_{\text{pm}}a_{13}}{(4a_{12}^* - (a_{11}^* - a_{42})^2)^{3/2}} e^{-\zeta^*\pi/\sqrt{1-\zeta^{*2}}}. \quad (30)$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial k_{\text{дyc}}} = \frac{k_{\text{pm}}a_{13}}{2(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)^{3/2}} \left[\frac{-(a_{11}^*a_{42} + 2a_{12}^* - a_{42}^2)}{2\sqrt{(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)}v^2} \left[1 + \left(\frac{\zeta^*}{v} \right) (\pi - \arcsin v) \right] + \frac{a_{42}}{v} (\pi - \arcsin v) \right], \quad (31)$$

$$v = \sqrt{1 - \zeta^{*2}}.$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial k_{\text{длу}}} = \frac{Va_{42}/gk_{\text{pm}}a_{13}}{2(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)^{3/2}} \left[\frac{T^*(a_{11}^* + a_{42})}{2v^2} \left(1 + \left(\frac{\zeta^*}{v} \right) (\pi - \arcsin v) \right) + \frac{1}{v} (\pi - \arcsin v) \right] \quad (32)$$

Построение линий равного уровня с градиентами представлено на рис. 7. Следует заметить, что при решении задач минимизации нас интересуют антиградиенты. На рис. 8 показан укрупненный фрагмент рис.7., позволяющий сопоставить его с рис.5.

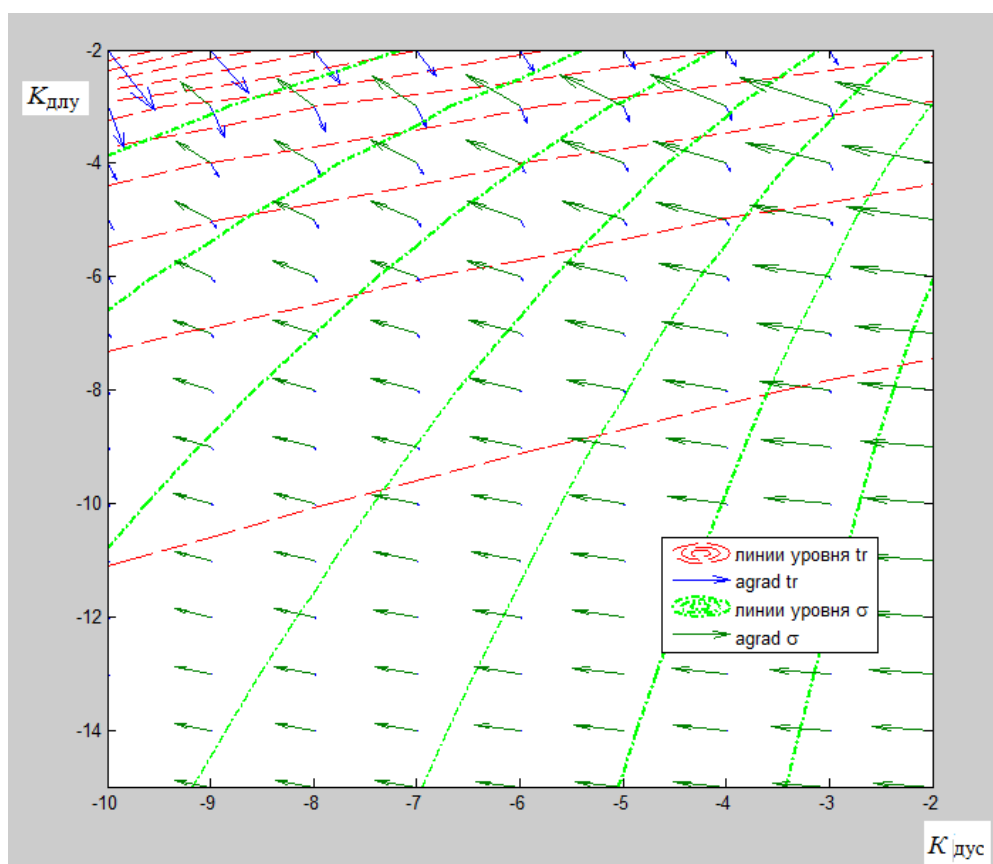


Рис.7. Линии равного уровня и направления антиградиентов двухконтурной системы

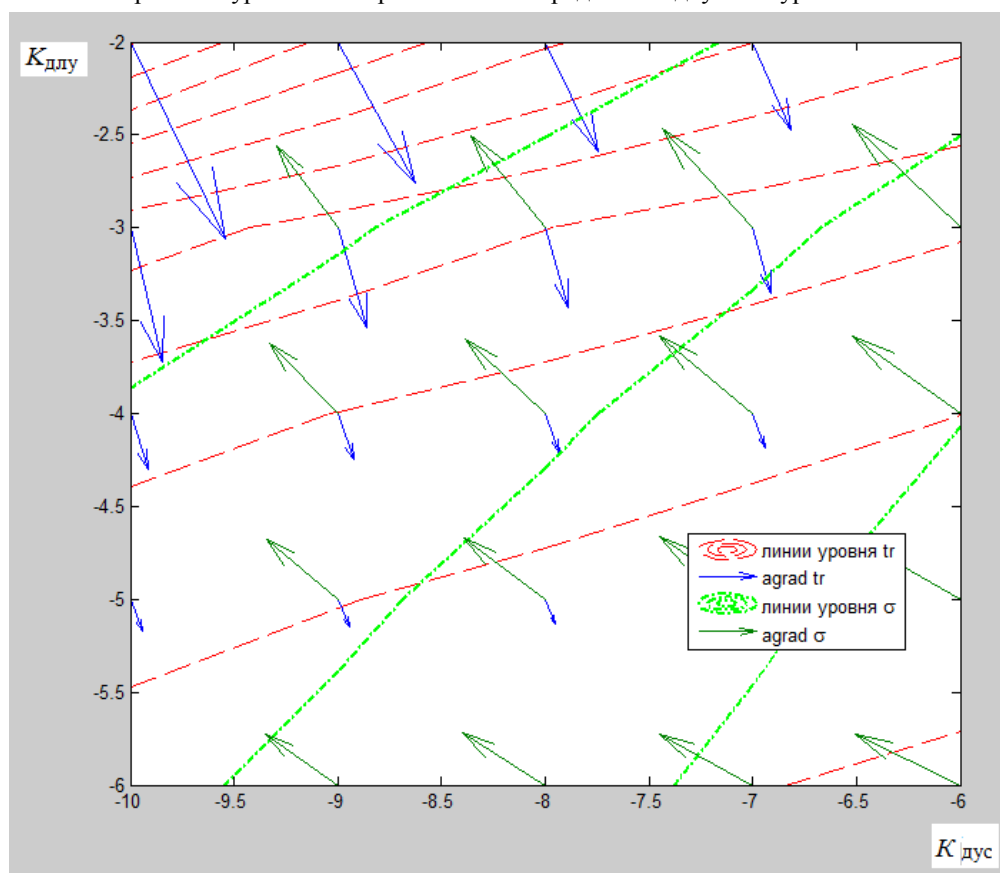


Рис.8. Линии равного уровня и направления антиградиентов двухконтурной системы (фрагмент рис.7)

Из анализа рис. 7 и 8 следует, что линии равного уровня не касаются друг друга. Рассматриваем тогда свойства монотонности.

Для критерия «время нарастания» t_r получили путем преобразований (31) модифицированные формулы

$$\frac{\partial t_r}{\partial k_{дл\ y}} = \frac{(Va_{42}/gk_{p\ m}a_{13})T^3}{2} \frac{1}{1-\zeta^2} \left[\zeta + \frac{(\pi - \arcsin \sqrt{1-\zeta^2})}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right]. \quad (33)$$

Анализ формулы (37) показывает, что производная имеет знак, совпадающий с выражением в квадратных скобках, причем по условию колебательности $1-\zeta^2 > 0$.

Выражение $\left[\zeta + \frac{(\pi - \arcsin \sqrt{1-\zeta^2})}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right] > 0$ в диапазоне $1-\zeta^2 > 0$ всегда положительно, т.е. во всем диапазоне с ростом $k_{дл\ y}$ время нарастания t_r увеличивается. Значит, первой возможной границей будет прямая $(k_{дл\ y})_{\min}$

Влияние $k_{д\ y\ c}$ на время нарастания t_r проанализируем с помощью формул (30). С учетом исследованного влияния $k_{дл\ y}$ достаточно подставить граничные значения $k_{дл\ y}$. Расчет показывает, что с ростом $k_{д\ y\ c}$ производная t_r по $k_{д\ y\ c}$ уменьшается.

Проанализируем влияние $k_{д\ y\ c}$ на перерегулирование, для чего воспользуемся формулой (21), где

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta^*} = \frac{-\pi}{(1-\zeta^{*2})^{3/2}} e^{-\zeta^* \pi / \sqrt{1-\zeta^{*2}}}. \quad (34)$$

Поэтому первый сомножитель (34) в (21) всегда отрицателен. Для уточнения монотонности достаточно проанализировать выражение

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial k_{д\ y\ c}} = \frac{\partial \zeta^*}{\partial a_{11}^*} \frac{\partial a_{11}^*}{\partial k_{д\ y\ c}}.$$

Поскольку $\frac{\partial a_{11}^*}{\partial k_{д\ y\ c}} = -k_{p\ m}a_{13}$, определяем знак выражения

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial a_{11}^*} = \frac{a_{11}^*a_{42} + 2a_{12}^* - a_{42}^2}{4(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)\sqrt{(a_{11}^*a_{42} + a_{12}^*)}}.$$

Границей монотонности будет линия

$$a_{11}^*a_{42} + 2a_{12}^* - a_{42}^2 > 0,$$

или

$$K_{дл\ y} < [a_{12} - a_{42}(a_{42} - a_{11} + k_{д\ y\ c}k_{p\ m}a_{13})/2] / [(Va_{42}/g)k_{p\ m}a_{13}]. \quad (35)$$

На рис. 9 показана граница монотонности, построенная по формуле (35), а также границы колебательности и устойчивости

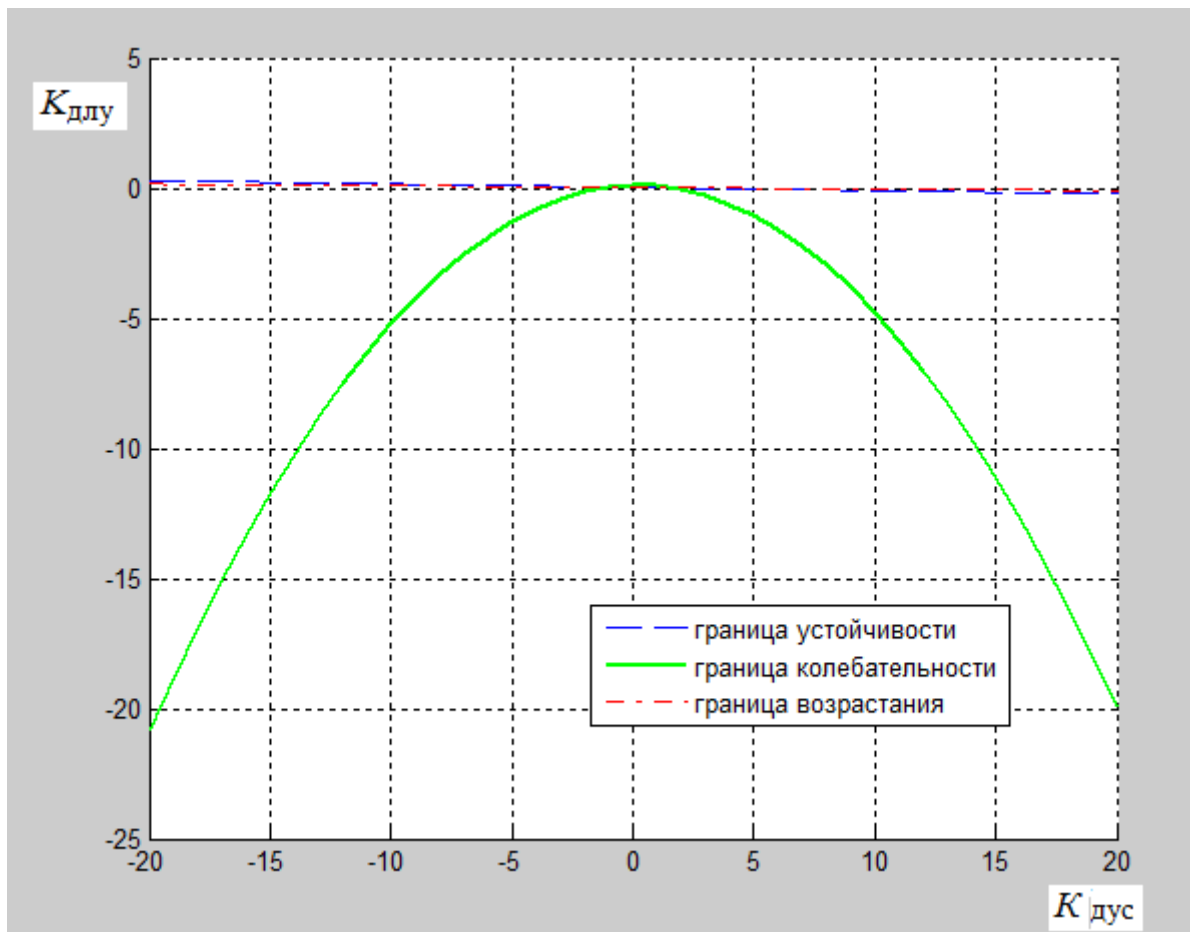


Рис. 9. Границы монотонности, устойчивости и колебательности.

Итак, т.е. в области допустимых параметров функция σ монотонно возрастает, т.е. нижнее значение $k_{\text{дус}}$ дает наилучший результат.

Проведенный анализ позволяет построить области контрамонотонности для рассматриваемой задачи. Получили, что во всем диапазоне изменения параметров в соответствии с формулами (29)- (32) справедливы соотношения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_{\text{дус}}} > 0, \frac{\partial \sigma}{\partial k_{\text{длу}}} < 0, \frac{\partial t_r}{\partial k_{\text{дус}}} < 0, \frac{\partial t_r}{\partial k_{\text{длу}}} > 0.$$

Т.о., функции строго контрамонотонны во всем диапазоне допустимых значений параметров. Тогда область компромиссов – вся область, она же область оптимальных решений по Парето.

Определяем угловое положение градиентов по зависимостям для производных. Анализ углов в поле градиентов (рис. 7,8) показывает, что угол ϕ развернут в нижний левый угол, поэтому граница – это вертикальная прямая с координатой $(k_{\text{дус}})_{\text{min}}$ и горизонтальная прямая $(k_{\text{длу}})_{\text{min}}$.

Отображение парето - линий в пространстве параметров дает парето - границу в пространстве критериев (рис.10)

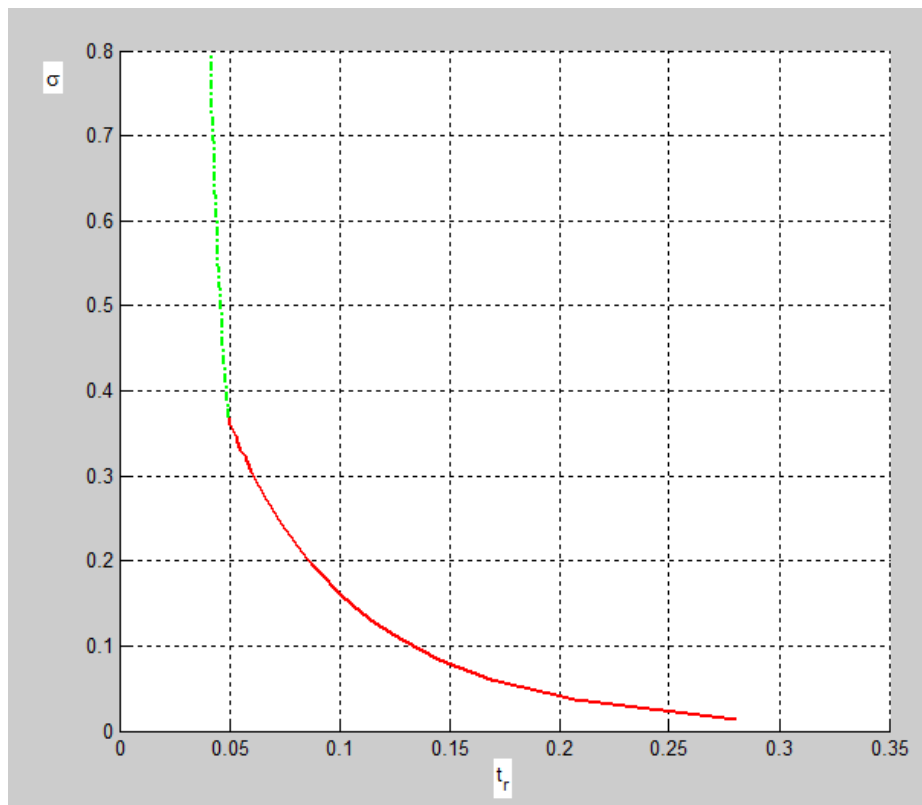


Рис.10. Компромиссная кривая (парето - граница) в пространстве критериев: красная линия (сплошная) – вариации $k_{длy}$ при $k_{дyс} = -15$ зеленая (пунктир) – вариации $k_{дyс}$ при $k_{длy} = -10$

Полный расчет при сеточном моделировании приведен на рис. 11.

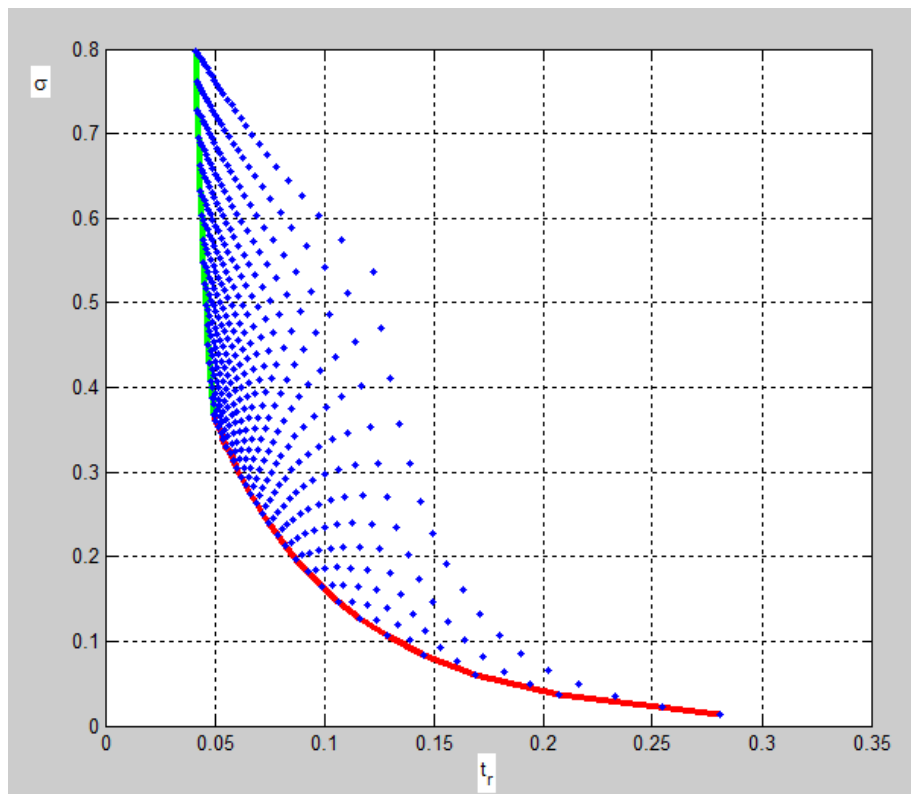


Рис.11. Результаты зондирования пространства параметров.

Сравнение рис. 10 и 11 показывает правильность полученной границы.

Итак, наилучшие результаты дает применение $k_{\text{дус}} = -15$ при вариациях $k_{\text{длу}}$ и $k_{\text{длу}} = -10$ при вариациях $k_{\text{дус}}$. Использование графиков парето – границы (компромиссной кривой) рис. 10 позволяет проектировщику выбрать оптимальное решение, дополнительно уточнив предпочтения (1) из соображений, лежащих вне парето – исследований. Например, назначив время нарастания, определить минимально возможное перерегулирование и наоборот.

Таким образом, получена парето - граница, которая не только указывает возможные оптимальные значения коэффициентов, но и показывает предел возможностей корректировки с помощью настройки коэффициентов.

Выводы

Рассмотрены возможности построения парето - границы при аналитическом задании критериев качества, введены утверждения для разных случаев взаимного углового положения антиградиентов. Применение прямых критериев качества, рассчитанных по переходному процессу, позволило сделать решение задачи наиболее наглядным и эффективным.

Выведены конкретные соотношения критериев качества и их производных для двухконтурной системы стабилизации летательного аппарата. Определена парето – граница в пространстве параметров, показывающая возможные направления улучшения противоречивых критериев времени нарастания и перерегулирования и показаны пределы параметрической коррекции.

Список литературы

1. Лотов А.В., Пospelова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. 197 с.
2. Романова И.К. Управление сложными техническими объектами. Ч. 3. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 80 с.
3. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006. 175 с.
4. Каменев Г.К., Лотов А.В., Рябиков А.И. Использование параллельных вычислений при аппроксимации многомерной границы Парето в задачах многокритериальной оптимизации // 5-я международная конференция «Параллельные вычисления и задачи управления»: тр. М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 241-264.
5. Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 11. С. 2009-2023.

6. Березкин В.Е., Каменев Г.К. Аппроксимация границы Парето двухфазным адаптивным методом с глобальной оптимизацией // VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2010) (Москва, 19-23 октября 2010 г.): труды. М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 176-178.
7. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1. С. 98-112.
8. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях. СПб: Изд-во Ютас, 2007. 104 с.
9. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42, № 7. С. 950-956.
10. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Физматлит, 2007. 64 с.
11. Каменев Г.К. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2007. 226 с.
12. Романова И.К. Программный комплекс «Многокритериальная оптимизация систем управления»: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610400 РФ. 2012г.
13. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2005. 416 с.
14. Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия: пер. с англ. / под ред. В.И. Аркина и А.В. Бухвалова. М.: Мир, 1995. 384 с. [Aliprantis C.D., Brown D.J., Burkinshaw O. Existence and Optimality of Competitive Equilibria. Springer Berlin Heidelberg, 1990. 284 p. DOI: [10.1007/978-3-642-61521-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61521-4)]
15. Ногин В.Д., Прасолов А.В. Многокритериальная оценка оптимальной величины импортной пошлины // Труды Института Системного Анализа РАН. 2013. Т. 63, вып. 2. С. 34-44.
16. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. 752 с.
17. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления: пер. с англ. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. 832 с. [Dorf R.C., Bishop R.H. Modern control systems. 8th ed. Addison-Wesley, 2002. 832 p.]
18. Тягунов О.А. Выбор показателей качества при многокритериальной настройке параметров систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 4. С. 12-16.
19. Проектирование зенитных управляемых ракет / И.И. Ангельский, П.П. Афанасьев, Е.Г. Болотов, И.С. Голубев, А.М. Матвеев, В.Я. Мизрохи, В.Н. Новиков, В.Г. Светлов; под ред. И.С. Голубева, В.Г. Светлова. 2-е изд. М.: Изд-во МАИ, 2001. 732 с.

20. Kurasova O., Petkus T., Filatovas E. Visualization of Pareto Front Points when Solving Multi-objective Optimization Problems // Information Technology and Control. 2013. Vol.42, no. 4. P. 353-361.
21. Ogryczak W., Lahoda S. Aspiration/Reservation-based decision support - a step beyond goal programming // Journal of the Multi-Criteria Decision Analysis. 1992. Vol. 1. P. 101-117.
22. Ringuest J.L. and Downing, C.E. Multiobjective linear programming with context-dependent preferences // Journal of the Operational Research Society. 1997. Vol. 48, no. 7. P. 714-725.
23. Bouchanan J.T. A naive approach for solving MCDM problems: the GUESS Method // Journal of the Operational Research Society. 1997. Vol. 48, no. 2. P. 202-206.
24. Branke J., Deb K., Miettinen K., Slowiński R. Multiobjective optimization. Interactive and Evolutionary Approaches. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 490 p. (Ser. Lecture Notes in Computer Science; vol. 5252.). DOI: [10.1007/978-3-540-88908-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88908-3)
25. Pardalos P.M., Steponavičė I., Žilinskas A. Pareto set approximation by the method of adjustable weights and successive lexicographic goal programming // Optimization Letters. 2012. Vol. 6, no. 4. P. 665-678.
26. Deb K., Agrawal S., Pratap A., Meyarivan T. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimisation: NSGA-II // In: Parallel Problem Solving from Nature PPSN VI: Proceedings of the 6th International Conference. London, UK: Springer-Verlag, 2000. P. 849-858. DOI: [10.1007/3-540-45356-3_83](https://doi.org/10.1007/3-540-45356-3_83)
27. Miettinen K., Makela M.M. Interactive Bundle-based Method for Nondifferentiable Multiobjective Optimization: NIMBUS // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 1995. Vol. 34, no. 3. P. 231-246.
28. Haanpaa T. Approximation Method for Computationally Expensive Nonconvex Multiobjective Optimization Problems. Jyvaskyla University Printing House, Jyvaskyla, 2012. 188 p.
29. Siouris G.M. Missile Guidance and Control Systems. Springer, New York, 2004. 681 p. DOI: [10.1007/b97614](https://doi.org/10.1007/b97614)
30. Paul B. Jackson P.B. Overview of Missile Flight Control Systems // Johns Hopkins Apl. Technical Digest. 2010. Vol. 29, no. 1. P. 9-24.

The application of analytical methods to the study of Pareto - optimal control systems

04, April 2014

DOI: 10.7463/0414.0704897

I.K. Romanova

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

marti2003@yandex.ru

The subject of research articles - - methods of multicriteria optimization and their application for parametric synthesis of double-circuit control systems in conditions of inconsistency of individual criteria. The basis for solving multicriteria problems is a fundamental principle of a multi-criteria choice - the principle of the Edgeworth - Pareto. Getting Pareto - optimal variants due to inconsistency of individual criteria does not mean reaching a final decision. Set these options only offers the designer (DM).

An important issue when using traditional numerical methods is their computational cost. An example is the use of methods of sounding the parameter space, including with use of uniform grids and uniformly distributed sequences. Very complex computational task is the application of computer methods of approximation bounds of Pareto.

The purpose of this work is the development of a fairly simple search methods of Pareto - optimal solutions for the case of the criteria set out in the analytical form.

The proposed solution is based on the study of the properties of the analytical dependences of criteria. The case is not covered so far in the literature, namely, the topology of the task, in which no touch of indifference curves (lines) level. It is shown that for such tasks may be earmarked for compromise solutions. Prepositional use of the angular position of antigradient to the indifference curves in the parameter space relative to the coordinate axes. Formulated propositions on the characteristics of comonotonicity and contramonotonicity and angular characteristics of antigradient to determine Pareto optimal solutions. Considers the General algorithm of calculation: determine the scope of permissible values of parameters; investigates properties comonotonicity and contraventanas; to build an equal level (indifference curves); determined touch type: single sided (task is not strictly multicriteria) or bilateral (objective relates to the Pareto); for Pareto - tasks in the presence touch formed the system of algebraic equations whose solution yields the equation of the line Pareto in the parameter space. Display space criteria provides the required Pareto - border; in the absence touch analyzes the property of

monotonicity. Analysis of derivatives enables you to define two borders in the parameter space (abscissa and the ordinate axis or at the borders, their parallel).

The obtained analytical results are applied to the problem of parametric synthesis of control systems. In the framework of the given structure of double-circuit system suitable made use of a system of differential equations instead of the traditional structural schemes. The formula that shows the change dynamic coefficients of unmanaged system after applying the correction. The choice of direct quality criteria, calculated according to the transition process, made the decision problem is most visible and effective. As quality criteria selected rise time and overshoot. As parameters used the gains of the sensors of angular velocity and linear accelerations. Isolated in the space of parameters of stability and oscillatory. Given the author's conclusion formulas for gradients of direct quality criteria - and rise time overshoot. Built fields antigradient and the level lines of the criteria. The analysis of the properties of contramonotonicity all of the criteria specified parameters. In accordance with the claims put forward by tradeoff line in the space of parameters and displaying them in the form of lines of Pareto on space criteria. The use of traditional means of sensing space parameters showed the reliability of the obtained analytical manner. The calculation results for the synthesis of double-circuit motion control systems of flying devices can be used for selection of possible directions of improvement of conflicting criteria. The proposed method is able to replace traditional methods of synthesis of the systems under consideration on the basis of methods of frequency characteristics. The results allow to assess the limits of parametric correction within the existing structure.

Publications with keywords: [multiobjective optimization](#), [Pareto - optimal solutions](#), [comonotonicity and contramonotonicity](#), [synthesis of control systems](#), [missiles](#)
Publications with words: [multiobjective optimization](#), [Pareto - optimal solutions](#), [comonotonicity and contramonotonicity](#), [synthesis of control systems](#), [missiles](#)

References

1. Lotov A.V., Pospelova I.I. *Mnogokriterial'nye zadachi prinyatiya resheniy* [Multicriteria decision making problems]. Moscow, MSU Publ., 2008. 197 p. (in Russian).
2. Romanova I.K. *Upravlenie slozhnymi tekhnicheskimi ob'ektami. Ch. 3* [Management of complex technical objects. Pt 3.]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2010. 80 p. (in Russian).
3. Sobol' I.M., Statnikov R.B. *Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami* [Choice of optimal parameters in problems with many criteria]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 175 p. (in Russian).
4. Kamenev G.K., Lotov A.V., Ryabikov A.I. [Use of parallel computing in the approximation of multidimensional Pareto frontier in multicriteria optimization problems]. 5-ya mezhdunarodnaya konferentsiya "Parallel'nye vychisleniya i zadachi upravleniya": tr. [Proc.

- of the 5th International Conference “Parallel Computations and Control Problems”]. Moscow, MSU Publ., 2010, pp. 241-264. (in Russian).
5. Berezkin V.E., Kamenev G.K., Lotov A.V. [Hybrid adaptive methods for approximating a nonconvex multidimensional Pareto frontier]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2006, vol. 46, no. 11, pp. 2009-2023. (English translation: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, iss. 11, pp. 1918-1931. DOI: [10.1134/S096554250611008X](https://doi.org/10.1134/S096554250611008X)).
 6. Berezkin V.E., Kamenev G.K. [Biphasic adaptive method with global optimization for approximating Pareto frontier]. *Trudy 6 Moskovskoy mezhdunarodnoy konferentsii po issledovaniyu operatsiy (ORM2010)* [Proc. of the 6th Moscow International Conference on Operations Research (ORM2010)], Moscow, 19-23 October, 2010. Moscow, MSU Publ., 2010, pp. 176-178. (in Russian).
 7. Nogin V.D. [The problem of narrowing a set of Pareto: approaches to solution]. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy*, 2008, no. 1, pp. 98-112. (in Russian).
 8. Nogin V.D. *Prinyatie resheniy pri mnogikh kriteriyakh* [Multiple-criteria decision-making]. St. Petersburg, Yutas Publ., 2007. 104 p. (in Russian).
 9. Nogin V.D. [A logical justification of the Edgeworth–Pareto principle]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2002, vol. 42, no. 7, pp. 950-956. (English translation: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, iss. 7, pp. 915-950.).
 10. Podinovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu vazhnosti kriteriev v mnogokriterial'nykh zadachakh prinyatiya resheniy* [Introduction to the criteria importance theory in multicriteria decision-making problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 64 p. (in Russian).
 11. Kamenev G.K. *Optimal'nye adaptivnye metody poliedral'noy approksimatsii vypuklykh tel* [Optimal adaptive methods of polyhedral approximation of convex bodies]. Moscow, VTs RAN Publ., 2007. 226 p. (in Russian).
 12. Romanova I.K. *Programmnyy kompleks “Mnogokriterial'naya optimizatsiya sistem upravleniya”* [Software package “Multi-criteria optimization of controlled systems”]. Certificate RF of state registration of computer program, no. 2012610400, 2012. (in Russian).
 13. Chernorutskiy I.G. *Metody prinyatiya resheniy* [Decision-making methods]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2005. 416 p. (in Russian).
 14. Aliprantis C.D., Brown D.J., Burkinshaw O. *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*. Springer Berlin Heidelberg, 1990. 284 p. DOI: [10.1007/978-3-642-61521-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61521-4) (Russ.

- ed.: Aliprantis C.D., Brown D.J., Burkinshaw O. *Sushchestvovanie i optimal'nost' konkurentnogo ravnovesiya*. Moscow, Mir Publ., 1995. 384 p.).
15. Nogin V.D., Prasolov A.V. [Multicriteria Evaluation of the Optimal Amount of the Import Duty]. *Trudy Instituta Sistemnogo Analiza RAN*, 2013, T. 63, no. 2, pp. 34-44. (in Russian).
 16. Besekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control systems]. St. Petersburg, Professiya Publ., 2003. 752 p. (in Russian).
 17. Dorf R.C., Bishop R.H. *Modern control systems*. 8th ed. Addison-Wesley, 2002. 832 p. (Russ. ed.: Dorf R., Bishop R. *Sovremennye sistemy upravleniya*. Moscow, Laboratoriya Bazovykh Znaniy Publ., 2004. 832 p.).
 18. Tyagunov O.A. [Choice of Cost Functions at Multiobjective Tuning Adjustment Parameters of Control Systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2008, no. 4, pp. 12-16. (in Russian).
 19. Arkhangel'skiy I.I., Afanas'ev P.P., Bolotov E.G., Golubev I.S., Matveenko A.M., Mizrokhi V.Ya., Novikov V.N., Svetlov V.G. *Proektirovanie zenitnykh upravlyaemykh raket* [Design of anti-aircraft guided missiles]. Moscow, MAI Publ., 2001. 732 p. (in Russian).
 20. Kurasova O., Petkus T., Filatovas E. Visualization of Pareto Front Points when Solving Multi-objective Optimization Problems. *Information Technology and Control*, 2013, vol.42, no. 4, pp. 353-361.
 21. Ogryczak W., Lahoda S. Aspiration/Reservation-based decision support - a step beyond goal programming. *Journal of the Multi-Criteria Decision Analysis*, 1992, vol. 1, pp. 101-117.
 22. Ringuest J.L. and Downing, C.E. Multiobjective linear programming with context-dependent preferences. *Journal of the Operational Research Society*, 1997, vol. 48, no. 7, pp. 714-725.
 23. Bouchanan J.T. A naive approach for solving MCDM problems: the GUESS Method. *Journal of the Operational Research Society*, 1997, vol. 48, no. 2, pp. 202-206.
 24. Branke J., Deb K., Miettinen K., Slowiński R. *Multiobjective optimization. Interactive and Evolutionary Approaches*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 490 p. (Ser. *Lecture Notes in Computer Science*; vol. 5252.). DOI: [10.1007/978-3-540-88908-3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88908-3)
 25. Pardalos P.M., Steponavičė I., Žilinskas A. Pareto set approximation by the method of adjustable weights and successive lexicographic goal programming. *Optimization Letters*, 2012. Vol. 6, no. 4. P. 665-678.
 26. Deb K., Agrawal S., Pratap A., Meyarivan T. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimisation: NSGA-II. In: *Parallel Problem Solving from Nature PPSN VI: Proceedings of the 6th International Conference*. London, UK, Springer-Verlag, 2000, pp. 849-858. DOI: [10.1007/3-540-45356-3_83](https://doi.org/10.1007/3-540-45356-3_83)

27. Miettinen K., Makela M.M. Interactive Bundle-based Method for Nondifferentiable Multiobjective Optimization: NIMBUS. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 1995, vol. 34, no. 3, pp. 231-246.
28. Haanpaa T. *Approximation Method for Computationally Expensive Nonconvex Multiobjective Optimization Problems*. Jyvaskyla University Printing House, Jyvaskyla, 2012. 188 p.
29. Siouris G.M. *Missile Guidance and Control Systems*. Springer, New York, 2004. 681 p. DOI: [10.1007/b97614](https://doi.org/10.1007/b97614)
30. Paul B. Jackson P.B. Overview of Missile Flight Control Systems. Johns Hopkins Apl. Technical Digest, 2010, vol. 29, no. 1, pp. 9-24.