

Учет жесткого защемления на границе в смешанных моделях метода конечных элементов в задачах разрушения ледяного покрова

03, март 2014

DOI: 10.7463/0314.0700516

Князьков В. В.

УДК 629.12.539.4

Россия, НГТУ им. Р.Е. Алексеева

vl.knyazkov@yandex.ru

Введение

Лед принадлежит к числу давно известных материалов, но, тем не менее, свойства его изучены далеко не достаточно. Это объясняется большим разнообразием структуры, составов, физико-механических состояний. Механика льда и ледяного покрова является одной из наименее разработанных областей механики сплошных сред. С точки зрения разрушения лед проявляет многие свойства, аналоги которых весьма трудно, если вообще возможно, наблюдать на других материалах [1].

В свое время И.С. Песчанский [2] справедливо отметил, что ледяной покров представляет собой своеобразную ледяную конструкцию. Поэтому работу под нагрузкой и свойства ледяного покрова нельзя отождествлять со свойствами слагающего его льда.

В общем случае реальный ледяной покров имеет бесконечно много особенностей геометрических характеристик, физико-механических свойств, характера внешнего нагружения и т.п. В практических расчетах учесть все особенности ледяного покрова, влияющие на его поведение, например, при взаимодействии с ледокольными судами (ледоколы, ледокольные буксиры, ледокольные суда на воздушной подушке) невозможно, а самое главное, и ненужно. Поэтому ледяной покров целесообразно заменять некоторой физической моделью, обладающей конечным числом особенностей из числа тех, которые ему присущи. При переносе на модель некоторые свойства ледяного покрова подвергаются изменениям, которые, незначительно влияя на интересующие нас стороны его поведения, существенно упрощают модельное представление ледяного покрова, а значит, упрощают и исследование.\

Лед не обладает идеальной структурой: в его решетках имеются дефекты, наличие которых и вызывает, в основном, изменчивость его свойств. Кроме того, даже наиболее чистые формы природного льда содержат примеси. Это могут быть твердые частицы, растворимые вещества и газы [3, 4].

Так, например, принимая модель сплошного тела, мы осредняем дискретное взаимодействие между отдельными молекулами ледяного покрова. Это приводит, как известно, к резкому упрощению математического описания исследуемых нами явлений напряженно-деформированного состояния (НДС) ледяного покрова.

Ледяной покров можно считать изотропным в горизонтальной плоскости, если размеры неоднородностей много меньше чаши прогиба льда. Если же для плотности и жесткости льда использовать приведенные значения, то такую пластину можно рассматривать как изотропную, несмотря на анизотропию по вертикали, возникновение которой объясняется как температурными градиентами, так условиями образования льда и его роста [5, 6].

Очевидными являются и местные различия в толщине ледяного покрова. На водохранилище они несколько меньше, чем обычно наблюдаемые на реках [3]. Распределение вероятных толщин льда может быть аппроксимировано нормальным законом распределения [7].

Задача об изгибе пластин, лежащих на упругом основании, долгое время представляла в технике интерес преимущественно с точки зрения расчета фундаментных плит под колонны. Начало изучению данного вопроса положил еще Герц. Затем над этой проблемой работали А. Феппл, Шлейхер, С.Н. Бернштейн, интересовавшийся этим вопросом с точки зрения теории прочности ледовых переправ. В своих работах реакции упругого основания они вычисляли с использованием гипотезы Циммермана-Винклера, предполагающей, что приходящаяся на единицу площади реакция упругого основания пропорциональна в каждой точке прогибу пластины в этой точке и не зависит от прогибов пластины в смежных точках основания. Винклеровское основание точно реализуется в случае пластин, плавающих на поверхности жидкости (т.е. ледяной покров).

В многочисленных работах последних лет теоретические расчеты прочности ледяного покрова при действии поперечных нагрузок и экспериментальные исследования выполняются при решении задач ледопроеходимости судов (ледоколов, ледокольных судов на воздушной подушке и т.п.). Ледяной покров в задачах ледопроеходимости рассматривается как тонкая однородная изотропная упругая пластина постоянной толщины, лежащая на упругом основании гидравлического типа [8].

Известно, что дифференциальное уравнение, используемое для описания поведения ледяного покрова при действии поперечной нагрузки, основано на гипотезе недеформированных нормалей, которая равносильна предположению об отсутствии сдвигов в вертикальной плоскости изгиба [9].

Некоторые же авторы, например Н.Н. Зубов [10], считали, что в силу специфической структуры льда в деформации плавающего ледяного покрова большое, а может быть, преимущественное значение имеет сдвиг его элементов в направлении действия силы. Д.Ф. Панфиловым, например в работе [11], рассматривалась задача об изгибе ледяного покрова под действием кратковременной статической нагрузки с учетом поперечных деформаций сдвига и анизотропии льда. Из этой работы можно сделать вывод, что роль поперечных сдвигов в деформации льда пренебрежимо мала.

Таким образом, в соответствии с классификацией П.Ф. Папковича [12] ледяной покров можно отнести к жестким пластинам, именуемым также тонкими упругими плитами.

Об упругом поведении ледяного покрова под нагрузкой свидетельствуют результаты многочисленных лабораторных и натурных опытов по пролому ледяного покрова. В качестве примера работы [1, 3, 13-19].

Таким образом, для решения поставленной задачи ледяной покров можно рассматривать как однородную пластину на упругом основании гидравлического типа.

Постановка задачи

Поведение ледяного покрова при действии заданных внешних нагрузок описывается сравнительно простым по форме дифференциальным уравнением

$$D\nabla^2\nabla^2w + kw = q(x, y), \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость; $k = \rho_{\text{в}}g$ – коэффициент жесткости упругого основания (или коэффициент постели, или модуль основания); $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды; g – ускорение свободного падения; $q(x, y)$ – внешняя поперечная нагрузка; $w(x, y)$ – прогибы ледяного покрова.

Подстановкой $\frac{k}{D} = \alpha^4$ уравнение (1) приводится к виду, более удобному для выкладок

$$\nabla^2\nabla^2w + \alpha^4w = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (2)$$

Величину α называют характеристикой льда. Для случая сосредоточенной силы уравнение (2) становится однородным.

Однако точное решение данного уравнения удастся получить лишь при достаточно простых граничных условиях. При сложных очертаниях ледяного покрова и областей приложения нагрузки в плане, наличия в нем вырезов, трещин и т.п. можно получить лишь приближенное решение с помощью численных методов. Выбор того или иного метода во многом определяется характером задачи. В настоящее время наиболее популярным является подход к решению дифференциальных уравнений, заключающийся в представлении рассматриваемой области элементами среды, не являющимися бесконечно малыми (т.е. конечными элементами), которые в совокупности аппроксимируют реальную систему. Методы конечных элементов (МКЭ) воплощают этот подход и в последние годы достигли очень высокого уровня развития. Диапазон применимости МКЭ, их эффективность и сравнительная легкость, с которой могут быть учтены реальные граничные условия, сделали их весьма серьезными соперниками для любого конкурирующего метода. В МКЭ обеспечение сложной геометрии границ или улучшение элементов в наиболее интересных областях более просто выполнимо благодаря свободе выбора сетки, формы и размера элемента и порядка аппроксимации.

Самая слабая сторона МКЭ состоит в том, что он, во-первых, по идее представляет собой схему дискретизации всего тела, а это неизбежно ведет к очень большому количеству конечных элементов, особенно в трехмерных задачах с удаленными границами, в пределах каждой из которых не все неизвестные переменные изменяются непрерывно. Во-вторых, метод часто приводит к нереальным разрывам значений физических величин между смежными элементами [20].

Разновидности МКЭ (*методы перемещений и сил*), взаимно дополняющие друг друга, приводят к тому, что МКЭ в варианте метода перемещений более точно определяет конфигурацию деформируемого тела, а МКЭ в варианте метода сил точнее характеризует его напряженно-деформированное состояние (НДС). Стремление к точному расчету изменений геометрии конструкции, исходя из перемещений ее узлов и параметров ее НДС, привело к тому, что вместо "чистокровных" моделей МКЭ в вариантах методов перемещений и сил были получены смешанные конечные элементы. Смешанные модели МКЭ в широком смысле слова характеризуются использованием независимой аппроксимации искомых функций и их производных. Вариационной основой при разработке смешанных моделей МКЭ стал функционал Хеллингера-Рейсснера $\Pi_{HR}^{(e)}$ [21].

В работе выполнено распространение смешанных моделей МКЭ на задачи изгиба пластины на упругом основании винклеровского типа (ледяной покров). Поставленная задача решена с помощью смешанного треугольного элемента, который был получен Германном для анализа изгиба пластин [22]. Предложен способ учета жесткого защемления пластины на границе.

Основные соотношения смешанного треугольного элемента

Для расчета пластин по МКЭ обычно применяются треугольные и прямоугольные элементы. Треугольные элементы удобны для аппроксимации областей с криволинейной границей, а прямоугольные элементы применяются для прямоугольных областей или для внутренних подобластей в сочетании с треугольными элементами по внешней подобласти со сложной границей.

Вектор обобщенных координат смешанного треугольного элемента (рис. 1) содержит прогибы w_i вершин треугольника и нормальные изгибающие моменты M_{ni} на серединах его сторон

$$\{q\}^{(e)} = \{w_1, w_2, w_3, M_{n1}, M_{n2}, M_{n3}\}. \quad (3)$$

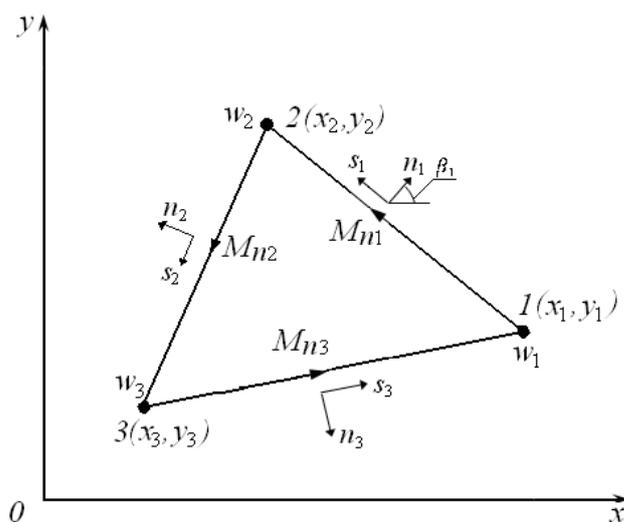


Рис. 1. Треугольный элемент смешанного типа

Функционал Хеллингера-Рейсснера с учетом упругого основания имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \{ & (M_{x,x} + M_{xy,y})w_{,x} + (M_{y,y} + M_{xy,x})w_{,y} - \frac{12}{Eh^3} [(1 + \mu)M_{xy}^2 + \frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2) - \\ & \mu M_x M_y] + \frac{1}{2}kw^2 - qw\} dx dy - \oint_{s_1^{(e)}} w_{,s} M_{ns} dS - \oint_{s_2^{(e)}} w \bar{V}_n dS - \oint_{s_3^{(e)}} \bar{w}_{,n} M_n dS \end{aligned} \quad (4)$$

где $A^{(e)}$ – площадь элемента; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины; q – нормальное давление; нижние индексы после запятой означают производные.

В функционале (4) первый контурный интеграл подсчитывается для элемента с обходом против часовой стрелки, а второй и третий контурные интегралы вычисляются для участков границы, вдоль которой заданы значения эффективной перерезывающей силы \bar{V}_n и угла поворота нормали $\bar{w}_{,n}$ [21].

Для обеспечения совместности элемента по прогибам и нормальным изгибающим моментам вдоль его границ принимается простейшая аппроксимация, основанная на линейном законе изменения прогибов и постоянстве изгибающих моментов в пределах элемента.

$$w = [1 \ x \ y] [T] \{w\}, \quad (5)$$

$$\text{где } \{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}; \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\text{или } [T] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix},$$

где $A^{(e)} = \frac{1}{2}(b_1 c_2 - b_2 c_1)$ – площадь треугольного элемента, $b_1 = y_2 - y_3$, $b_2 = y_3 - y_1$,

$b_3 = y_1 - y_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, $c_3 = x_2 - x_1$.

Изгибающий и крутящий момент, перерезывающая сила относительно естественных осей n, S (см. рис. 1) связаны с соответствующими величинами относительно осей x, y зависимостями

$$M_n = M_x \cos^2 \beta + M_y \sin^2 \beta + M_{xy} \sin 2\beta;$$

$$M_{ns} = \frac{1}{2}(M_y - M_x) \sin 2\beta + M_{xy} \cos 2\beta; \quad (6)$$

$$Q_n = Q_x \cos \beta + Q_y \sin \beta.$$

Таким образом

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{M_n\}, \quad (7)$$

$$\text{где } \{M_n\} = \begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \\ M_{n3} \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_1 & \sin^2 \beta_1 & \sin 2\beta_1 \\ \cos^2 \beta_2 & \sin^2 \beta_2 & \sin 2\beta_2 \\ \cos^2 \beta_3 & \sin^2 \beta_3 & \sin 2\beta_3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Для угла β_i между нормалью n_i и осью x $\sin \beta_i = (x_i - x_j)/l_i$; $\cos \beta_i = (y_j - y_i)/l_i$,

где $l_i = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ – длина стороны элемента; $j = i+1$ при $i = 1, 2$ и $j = 1$ при $i = 3$.

В силу постоянства величин M_x, M_y и M_{xy} в пределах элемента первые четыре слагаемые в (4) обращаются в нуль.

Отрицательная энергия изгибных напряжений в пределах элемента

$$\Pi_b^{(e)} = -\frac{1}{2} \frac{12A^{(e)}}{Eh^3} [2(1+\mu)M_{xy}^2 + M_x^2 + M_y^2 - 2\mu M_x M_y] = -\frac{1}{2} \frac{12A^{(e)}}{Eh^3} \{M\}^T \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \{M\} \text{ или}$$

$$\Pi_b^{(e)} = -\frac{1}{2} \frac{12A^{(e)}}{Eh^3} \{M\}^T [D] \{M\} = -\frac{1}{2} \frac{12A^{(e)}}{Eh^3} \{M_n\}^T [B]^T [D] [B] \{M_n\}. \quad (8)$$

Потенциал упругого основания в пределах элемента

$$\Pi_p^{(e)} = \frac{1}{2} \iint_{A^{(e)}} kw^2 dx dy = \frac{1}{2} \{w\}^T [k_p] \{w\}, \quad (9)$$

$$\text{где } [k_p] = \frac{kA^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ матрица постели.}$$

Потенциал поперечной равномерно распределенной нагрузки элемента

$$\Pi_q^{(e)} = -\iint_{A^{(e)}} qw dx dy = -\frac{qA^{(e)}}{3} [1, 1, 1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Потенциал крутящих моментов по сторонам треугольника на углах поворота этих сторон элемента

$$\Pi_r^{(e)} = \oint_S w_{,S} M_{ns} dS = \oint_S \{w_{,S}\}^T \{M_{ns}\} dS = \{w_{,S}\}^T [l] \{M_{ns}\}, \quad (11)$$

$$\text{где } \{w_{,s}\} = \begin{Bmatrix} \partial w / \partial S_1 \\ \partial w / \partial S_2 \\ \partial w / \partial S_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 \\ 0 & -\sin\beta_2 & \cos\beta_2 \\ 0 & -\sin\beta_3 & \cos\beta_3 \end{bmatrix} [T] \{w\} = [C][T] \{w\} = [P] \{w\};$$

$$[l] = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix};$$

$$\{M_{ns}\} = \begin{Bmatrix} M_{ns_1} \\ M_{ns_2} \\ M_{ns_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin 2\beta_1 & \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 & \cos 2\beta_1 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\beta_2 & \frac{1}{2} \sin 2\beta_2 & \cos 2\beta_2 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\beta_3 & \frac{1}{2} \sin 2\beta_3 & \cos 2\beta_3 \end{bmatrix} [B] \{M_n\} = [F][B] \{M_n\} = [Q] \{M_n\}.$$

Таким образом

$$\Pi_r^{(e)} = \{w\}^T [P]^T [l] [Q] \{M_n\}. \quad (12)$$

Для минимизации функционала (4) следует приравнять нулю его вариацию по вектору (3)

$$\delta \Pi_{HR}^{(e)} = \delta \Pi_b^{(e)} + \delta \Pi_p^{(e)} + \delta \Pi_q^{(e)} + \Pi_r^{(e)} = 0.$$

Получаемые после варьирования два матричных уравнения объединяются в одну систему

$$[k]^{(e)} \{q\}^{(e)} = \{f\}^{(e)},$$

где $[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} k_p & k_{wM} \\ k_{wM}^T & k_{MM} \end{bmatrix}$ – матрица жесткости-податливости элемента;

$\{f\}^{(e)}$ – вектор нагрузки элемента;

$$[k_{wM}] = [P]^T [l] [Q]; \quad [k_{MM}] = -\frac{12A^{(e)}}{Eh^3} [B]^T [D] [B].$$

Варьирование полного функционала исследуемой пластины как системы конечных элементов по неизвестным параметрам w_i и M_{ni} позволяет получить разрешающую алгебраическую систему

$$[K]\{q\} = \{F\}. \quad (13)$$

Формирование матрицы жесткости-податливости системы $[K]$ и вектора внешней нагрузки $\{F\}$ производится с учетом топологии конструкции и граничных условий.

Способ учета жесткого защемления на границе в смешанных моделях

метода конечных элементов

Рассмотрим случай жесткого защемления по контуру пластины. В узлах на контуре (рис. 2)

$$w_{i1} = w_{i2} = \dots = w_{in} = 0.$$

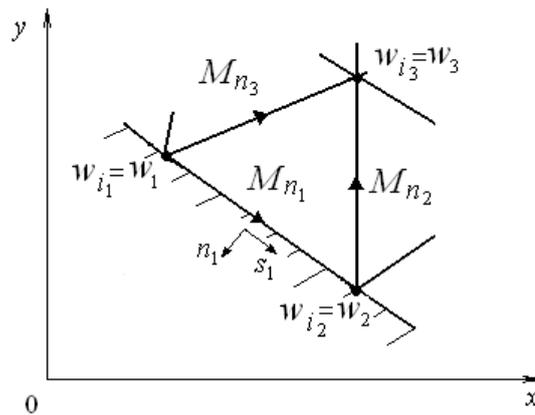


Рис. 2. Схема жесткого защемления элемента

На защемленной кромке элемента кривизна в направлении s_1 [23]

$$\chi_{s1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} = 0. \quad (14)$$

Изгибающий момент на защемленной кромке

$$M_{n1} = D(\chi_{n1} + \mu\chi_{s1}) = D\chi_{n1}.$$

По известному свойству кривизны [24]

$$\chi_x + \chi_y = \chi_n + \chi_s.$$

При $\chi_{s1} = 0$ имеем, что $\chi_{n1} = \chi_x + \chi_y$, т.е.

$$M_{n1} = D(\chi_x + \chi_y). \quad (15)$$

Выполним ряд преобразований

$$D(\chi_x + \chi_y) = D(\chi_x + \mu\chi_y + \chi_y + \mu\chi_x - \mu\chi_x - \mu\chi_y) = D(\chi_x + \mu\chi_y) + D(\chi_y + \mu\chi_x) - D\mu(\chi_x + \chi_y) =$$

$$= M_x + M_y - \mu M_{n1} \text{ или } (1 + \mu)M_{n1} = M_x + M_y.$$

Окончательно имеем

$$M_{n1} = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}. \quad (16)$$

Распишем матричное уравнение (7):

$$M_x = B_{11}M_{n1} + B_{12}M_{n2} + B_{13}M_{n3};$$

$$M_y = B_{21}M_{n1} + B_{22}M_{n2} + B_{23}M_{n3};$$

$$M_{xy} = B_{31}M_{n1} + B_{32}M_{n2} + B_{33}M_{n3};$$

После сложения первых двух уравнений полученной системы и замены $M_x + M_y$ с учетом (16) получим

$$(1 + \mu)M_{n1} = (B_{11} + B_{21})M_{n1} + (B_{12} + B_{22})M_{n2} + (B_{13} + B_{23})M_{n3}.$$

Искомое выражение для момента M_{n1} на защемленной кромке

$$M_{n1} = \frac{(B_{12} + B_{22})M_{n2} + (B_{13} + B_{23})M_{n3}}{1 + \mu - B_{11} - B_{21}},$$

или

$$M_{n1} = \frac{B_{12} + B_{22}}{1 + \mu - B_{11} - B_{21}}M_{n2} + \frac{B_{13} + B_{23}}{1 + \mu - B_{11} - B_{21}}M_{n3}. \quad (17)$$

Зависимость (17) существенно упрощается при решении задач изгиба прямоугольных пластин. Так, например, для элемента, приведенного на рис. 3

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\pi; \beta_2 = \frac{\pi}{4}; \beta_3 = \pi.$$

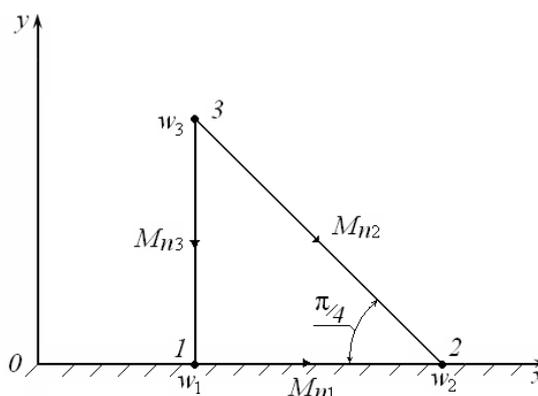


Рис. 3. Элемент на контуре прямоугольной пластины

По зависимости (17) помощью B_{ij} находим значение M_{n1}

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta_1 & \sin^2 \beta_1 & \sin 2\beta_1 \\ \cos^2 \beta_2 & \sin^2 \beta_2 & \sin 2\beta_2 \\ \cos^2 \beta_3 & \sin^2 \beta_3 & \sin 2\beta_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix};$$

$$M_{n1} = \frac{(0+0)M_{n2} + (1+0)M_{n3}}{1 + \mu - 0 - 1}; \quad M_{n1} = \frac{M_{n3}}{\mu}.$$

Для того чтобы получить матрицу жесткости-податливости элемента, достаточно располагать выражением для потенциальной энергии конечного элемента в форме [25], полученным согласно теореме Клайперона

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r k_{ik} q_i q_k, \quad (18)$$

где k_{ik} – элементы матрицы жесткости-податливости, а q_i и q_k – обобщенные координаты.

Исключая из (18) с помощью (17) момент на защемленной кромке M_{n1} , можно получить формулы, позволяющие учесть "увеличение жесткости" защемленной по контуру пластины в задачах изгиба пластины под действием поперечной нагрузки. При этом в матрице индексов, которая используется для формирования общей матрицы жесткости-податливости $[K]$, момент M_{n1} также не учитывается. Заметим, что в этом случае мы уменьшаем число уравнений разрешающей системы (13) на число элементов на контуре пластины.

В способе формирования общей матрицы жесткости-податливости $[K]$, основанном на использовании матрицы индексов [25], без матричных перемножений с помощью матрицы индексов непосредственно указываются "адреса", куда следует заслать и там просуммировать коэффициенты, выбранные из соответствующих матриц жесткости-податливости для элементов.

Матрица индексов имеет размеры $m \times r$, где m – количество элементов конструкции (количество строк); r – количество обобщенных координат для одного элемента (прогибы вершин треугольника и нормальные изгибающие моменты на серединах его сторон, т. е. равно 6). Построение матрицы индексов в работе производится с учетом нумерации узловых перемещений и изгибающих моментов для отдельного элемента в общей и в местной системе координат. Нумерация неизвестных принята такой, чтобы получаемая система уравнений имела ленточную структуру. Это условие является обязательным, а при правильной нумерации неизвестных всегда оказывается выполнимой. Для получения ленточной структуры все неизвестные нумеруются последовательно, независимо от их физического смысла. А для получения ленты минимальной

ширины все узлы и стороны треугольников обходились последовательно вдоль меньшего размера пластин. Ряд неизвестных, которые определяются граничными условиями, из числа неизвестных исключаются (нули в матрице индексов). Таким образом, матрица индексов представляет собой построчную последовательность неизвестных, характеризующих каждый элемент пластины. Процедура ее формирования является достаточно простой и легко поддается автоматизации.

Проблема формирования правой части $\{F\}$ системы уравнений (13) значительно проще задачи формирования общей матрицы жесткости-податливости для всей системы. Распределенная нагрузка в работе заменяется эквивалентной системой – совокупностью сосредоточенных сил.

Для решения (13) применяется программа решения системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей коэффициентов методом исключения Гаусса с ведущим элементом по главной диагонали (вариант удвоенной точности).

Коэффициенты уравнений (13) (матрицу жесткости-податливости) и свободные члены (вектор нагрузки) удобно представить в безразмерной форме, к которой они приводятся делением соответствующих величин на характерный линейный размер l_0 и подстановкой в правую часть интенсивности нагрузки q_0

$$l_0 = \frac{1}{\alpha} = 4 \sqrt{\frac{D}{\rho_e g}}, \quad q_0 = \rho_e g l_0.$$

В результате решения (13) в этом случае получаются поля безразмерных прогибов $\overline{w}_i = w(x_i, y_i)$ и безразмерных моментов $\overline{M}_{ni} = M(x_i, y_i)$. Связь между безразмерными и размерными значениями результатов расчета устанавливается следующими соотношениями

$$w_i = \overline{w}_i \frac{q}{\rho_e g}, \quad M_{ni} = \overline{M}_{ni} \frac{q}{\alpha^2}, \quad (19)$$

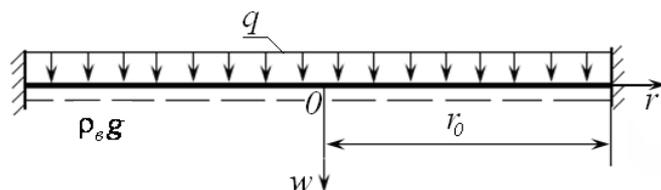
где q – интенсивность действующей нагрузки.

Значения моментов используются в дальнейшем для нахождения полей напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ по известным формулам.

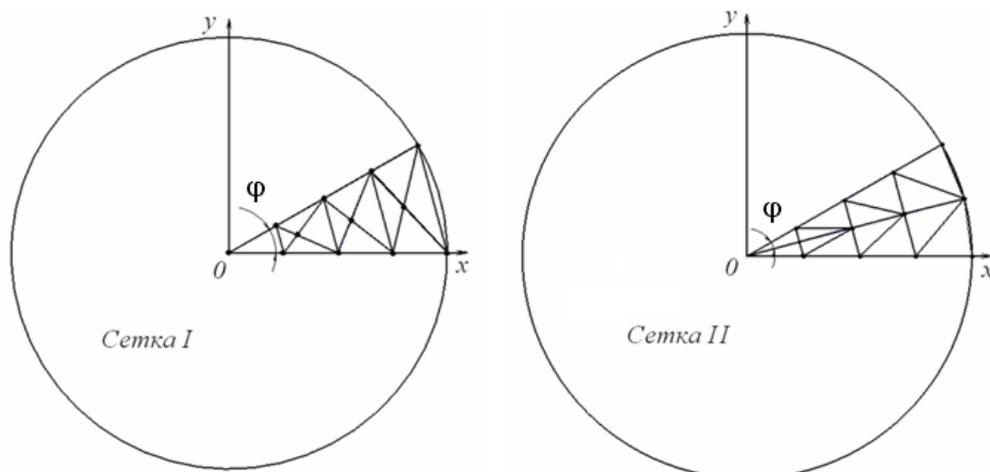
Изложенный алгоритм был реализован в виде комплекса прикладных программ: автоматическое построение различных вариантов сетки, определение координат узлов, формирование матрицы индексов, формирование матрицы номеров нагруженных элементов, формирование матрицы жесткости-податливости, формирование вектора нагрузки.

Сравнение результатов численного и аналитического решений

Для последующей оценки результатов численной реализации задач НДС ледяного покрова становится корректной проверка сходимости результатов расчета к точному решению. С этой целью рассмотрим задачу изгиба круглой пластины на упругом основании гидравлического типа, имеющей жесткое защемление по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки, для которой такое решение несложно получить. Расчетная схема и варианты сеток показаны на рис. 4.



а)



б)

в)

Рис. 4. Расчетная схема (а) и варианты расчетных сеток (б, в)

Аналитическое решение уравнения (1) для данной пластины будем искать в следующем виде

$$w = \frac{q}{\rho_s g} [1 + C_1 T_1(x) + C_2 T_2(x) + C_3 T_3(x) + C_4 T_4(x)],$$

где $x = \alpha r$;

функции $T_i(x)$ – вещественные и мнимые части цилиндрических функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка

$$T_1(x) = R_e I_0(\sqrt{i}x); T_2(x) = I_m I_0(\sqrt{i}x);$$

$$T_3(x) = R_e H_0^{(1)}(\sqrt{i}x); T_4(x) = I_m H_0^{(1)}(\sqrt{i}x).$$

В случае жесткого защемления по контуру

$$\text{при } r = 0: \frac{dw}{dr} = 0, w \neq \infty,$$

$$r = r_0: w = 0, \frac{dw}{dr} = 0.$$

После ряда преобразований выражение для стрелки прогибов будут иметь следующий вид

$$w = \frac{q}{\rho_s g} \left[1 + \frac{T_1'(x_0)T_2(x) - T_2'(x)T_1(x)}{T_1(x_0)T_2'(x_0) - T_1'(x_0)T_2(x_0)} \right],$$

где $x_0 = \alpha r_0$.

Изгибающие моменты в полярной системе координат при симметричной деформации

$$M_r = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \text{ и } M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \text{ достигают своего максимума в центре зоны}$$

нагружения и равны друг другу.

Результаты расчетов, приведенные в таблице 1, дают приемлемую точность и сходятся к аналитическим решениям сверху при увеличении числа элементов.

Таблица 1 – Прогибы и изгибающие моменты в центре круглой жестко защемленной по контуру пластины на упругом основании ($x_0 = 1,0$; $\mu = 0,33$)

Сетка I $\varphi = 15^\circ$			Сетка II $\varphi = 5^\circ$		
Число элементов	$\bar{w}(0)$	$\bar{M}(0)$	Число элементов	$\bar{w}(0)$	$\bar{M}(0)$
13	0,0178	0,0837	14	0,0190	0,0832
17	0,0170	0,0830	18	0,0176	0,0827
21	0,0166	0,0827	22	0,0169	0,0824
25	0,0160	0,0824	26	0,0165	0,0823
Аналитическое решение		$\bar{w}(0) = 0,0155$	$\bar{M}(0) = 0,0822$		

Основные выводы

1. В работе выполнено распространение смешанных моделей МКЭ на задачи изгиба пластин, лежащих на упругом основании винклеровского типа (ледяной покров).
2. Предложен способ учета жесткого защемления на границе в смешанных моделях МКЭ при решении задач изгиба пластин поперечной нагрузкой. Полученные соотношения, учитывающие "увеличение жесткости", позволяют уменьшить число уравнений разрешающей системы на число элементов на контуре пластины.
3. По мере последовательного измельчения сетки наблюдается сходимость результатов решения к аналитическим.
4. В работе представлена лишь незначительная часть полученных результатов (например [26]), но этих данных вполне достаточно, чтобы подтвердить приемлемость предлагаемого способа учета жесткого защемления в смешанных моделях МКЭ, а также применения смешанных моделей к задачам изгиба пластин, лежащих на упругом основании.

Список литературы

1. Физика и механика льда: пер. с англ. / Под ред. П. Трюде. М.: Мир, 1983. 352 с.
2. Песчанский И.С. Ледоведение и ледотехника. Л.: Морской транспорт, 1963. 343 с.
3. Бутягин И.П. Прочность льда и ледяного покрова. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1966. 153 с.
4. Войтковский К.Ф. Механические свойства льда. М.: АН СССР, 1960. 99 с.
5. Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е. Морской лед. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 318 с.
6. Зуев В.А. Средства продления навигации на внутренних водных путях. Л.: Судостроение, 1986. 207 с.
7. Курдюмов В.А., Хейсин Д.Е. К выбору функций распределения геометрических параметров ледяного покрова в вероятностной модели взаимодействия судна со льдом // Вопросы теории, прочности и проектирования судов, плавающих во льдах: межвуз. сб. / Горьков. политехн. ин-т. Горький, 1984. С. 14-17.
8. Ионов Б.П., Грамузов Е.М. Ледовая ходкость судов. СПб.: Судостроение, 2001. 512 с.
9. Бычковский Р.Р., Гурьянов Ю.А. Ледовые строительные площадки, дороги и переправы / под общ. ред. Н.Н. Бычкового. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2005. 260 с.
10. Зубов Н.Н. Основы устройства дорог на ледяном покрове. М.: Гидрометеиздат, 1946. 175 с.
11. Панфилов Д.Ф. О механизме поперечного изгиба у льда // Журнал технической физики. 1979. Т. 49, № 10. С. 2121-2126.
12. Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля: в 4 т. Т. 3. Л.: Судпромгиз, 1962. 527 с.
13. Каштелян В.И. Приближенное определение усилий, разрушающих ледяной покров // Проблемы Арктики и Антарктики. 1960. № 5. С. 31-37.
14. Князьков В.В. Экспериментальное определение основных характеристик разрушения ледяного покрова // Морской вестник. 2008. № 4 (28). С. 106-109.
15. Князьков В.В. Влияние направления действия нагрузки на несущую способность ледяного покрова // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. Вып. 51 (335). СПб., 2010. С. 13-18
16. Ключарев В., Изюмов С. Определение грузоподъемности ледяных переправ // Военно-инженерный журнал. 1943. № 23. С. 30-40.
17. Лавров В.В. Деформация и прочность льда. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 206 с.
18. Панфилов Д.Ф. Экспериментальные исследования грузоподъемности ледяного покрова // Известия ВНИИГ. 1960. Т. 64. С. 101-115.

19. Michel B. Ice Mechanics. Les Presses de L'Univercity Laval, Quebec, 1978. 477 p.
20. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ. / под ред. Б.Е. Подбери. М.: Мир. 1975. 542 с.
21. Шахверди Г.Г. Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью. СПб.: Судостроение, 1993. 256 с.
22. Herrman L.R. Finite-element bending analysis for plates // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. 1967. Vol. 93, no. 5. P. 13-25.
23. Прочность, устойчивость, колебания: справочник. В 3 т. Т. 1. / ред. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
24. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
25. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.
26. Князьков В.В. Влияние размеров области распределения нагрузки и воздушной полости на напряженно-деформированное состояние ледяного покрова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2012. № 3 (96). С. 194-201.

Accounting rigid support at the border in a mixed model the finite element method in problems of ice cover destruction

03, March 2014

DOI: **10.7463/0314.0700516**

V.V. Knyazkov

Russia, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev (NSTU)

vl.knyazkov@yandex.ru

To evaluate the force to damage the ice covers is necessary for estimation of icebreaking capability of vessels, as well as of hull strength of icebreakers, and navigation of ships in ice conditions. On the other hand, the use of ice cover support to arrange construction works from the ice is also of practical interest.

By the present moment a great deal of investigations of ice cover deformation have been carried out to result, usually, in approximate calculations formula which was obtained after making a variety of assumptions. Nevertheless, we believe that it is possible to make further improvement in calculations. Application numerical methods, and, for example, FEM, makes possible to avoid numerous drawbacks of analytical methods dealing with both complex boundaries and load application areas and other problem peculiarities.

The article considers an application of mixed models of FEM for investigating ice cover deformation. A simple flexible triangle element of mixed type was taken to solve this problem. Vector of generalized coordinates of the element contains apices flexures and normal bending moments in the middle of its sides. Compared to other elements mixed models easily satisfy compatibility requirements on the boundary of adjacent elements and do not require numerical displacement differentiation to define bending moments, because bending moments are included in vector of element generalized coordinates.

The method of account of rigid support plate is proposed. The resulting ratio, taking into account the "stiffening", reduces the number of resolving systems of equations by the number of elements on the plate contour.

To evaluate further the results the numerical realization of ice cover stress-strained problem it becomes necessary and correct to check whether calculation results correspond to accurate solution. Using an example of circular plate the convergence of numerical solutions to analytical solutions is showed.

The article presents just a small part of the obtained results. However, that is enough to confirm an acceptability of FEM mixed models in this class of problems.

Publications with keywords: [FEM](#), [mixed model](#), [ice cover](#), [elastic foundation](#)

Publications with words: [FEM](#), [mixed model](#), [ice cover](#), [elastic foundation](#)

References

1. Tryde P., ed. *Physics and mechanics of ice*. Springer Berlin Heidelberg, 1980. DOI: 10.1007/978-3-642-81434-1 (Russ. ed. Tryde P., ed. *Fizika i mekhanika l'da*. Moscow, Mir, 1983. 352 p.).
2. Peschanskiy I.S. *Ledovedenie i ledotekhnika* [Glaciology and ice technique]. Leningrad, Morskoy transport, 1963. 343 p.
3. Butyagin I.P. *Prochnost' l'da i ledyanogo pokrova* [Strength of ice and ice cover]. Novosibirsk, Nauka: Sibirskoe otdelenie Publ., 1966. 153 p.
4. Voytkovskiy K.F. *Mekhanicheskie svoystva l'da* [Mechanical properties of ice]. Moscow, AN SSSR Publ., 1960. 99 p.
5. Doronin Yu.P., Kheysin D.E. *Morskoy led* [Sea ice]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975. 318 p.
6. Zuev V.A. *Sredstva prodleniya navigatsii na vnutrennikh vodnykh putyakh* [Means of extension of navigation on inland waterways]. Leningrad, Sudostroenie, 1986. 207 p.
7. Kurdyumov V.A., Kheysin D.E. [Choice of distribution functions of geometric parameters of the ice cover in the probabilistic model of ship-ice interaction]. *Voprosy teorii, prochnosti i proektirovaniya sudov, plavayushchikh vo l'dakh: mezhvuz. sb.* [Theory, strength and design of ships navigating in ice: collected scientific papers]. Gor'kiy, GPI Publ., 1984, pp. 14-17.
8. Ionov B.P., Gramuzov E.M. *Ledovaya khodkost' sudov* [Ice propulsive quality of ships]. St. Petersburg, Sudostroenie, 2001. 512 p.
9. Bychkovskiy R.R., Gur'yanov Yu.A. *Ledovye stroitel'nye ploshchadki, dorogi i perepravy* [Ice construction sites, roads and crossings]. Saratov, SSTU Publ., 2005. 260 p.
10. Zubov N.N. *Osnovy ustroystva dorog na ledyanom pokrove* [Construction of roads on ice cover]. Moscow, Gidrometeoizdat, 1946. 175 p.
11. Panfilov D.F. [Mechanism of transverse bending of ice]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1979, vol. 49, no. 10, p. 2121-2126.
12. Papkovich P.F. *Trudy po stroitel'noy mekhanike korablya. V 4 t. T. 3* [Proceedings of construction mechanics of ship. In 4 vols. Vol. 3]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962. 527 p.
13. Kashtelyan V.I. [Approximate determination of efforts that deplet ice cover]. *Problemy Arktiki i Antarktiki*, 1960, no. 5, pp. 31-37.

14. Knyaz'kov V.V. [Experimental determining of the main features of ice cover destruction]. *Morskoy vestnik*, 2008, no. 4 (28), pp. 106-109.
15. Knyaz'kov V.V. [Influence of loading directions on the bearing capacity of ice cover]. *Trudy TsNII im. akad. A.N. Krylova*. Iss. 51 (335). St. Petersburg, 2010, pp. 13-18.
16. Klyucharev V., Izyumov S. [Determination of the carrying capacity of ice crossings]. *Voennoinzhenernyy zhurnal*, 1943, no. 23, pp. 30-40.
17. Lavrov V.V. *Deformatsiya i prochnost' l'da* [Deformation and strength of ice]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1969. 206 p.
18. Panfilov D.F. [Experimental studies of load capacity of ice cover]. *Izvestiya VNIIG*, 1960, vol. 64, pp. 101-115.
19. Michel B. *Ice Mechanics*. Les Presses de L'Univercity Laval, Quebec, 1978. 477 p.
20. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Publishing Co., London, 1971. 521 p. (Russ. ed.: Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. Moscow, Mir, 1975. 542 p.).
21. Shakhverdi G.G. *Udarnoe vzaimodeystvie sudovykh konstruksiy s zhidkost'yu* [Impact interaction ship constructions with fluid]. St. Petersburg, Sudostroenie, 1993. 256 p.
22. Herrman L.R. Finite-element bending analysis for plates. *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 1967, vol. 93, no. 5, pp. 13-25.
23. Birger I.A., Panovko Ya.G. , eds. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniya: spravochnik. V 3 t. T. 1* [Durability. Stability. Fluctuations: handbook. In 3 vols. Vol. 1]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 831 p.
24. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka, 1966. 636 p.
25. Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [The finite element method in the calculation of ship designs]. Leningrad, Sudostroenie, 1974. 344 p.
26. Knyaz'kov V.V. [Effect of size distribution of load and the air cavity on the stress-strain state of ice cover]. *Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva*, 2012, no. 3 (96), pp. 194-201.