НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Математическая модель движения полноприводной колесной машины по дороге с твердой неровной поверхностью

 # 11, ноябрь 2013
DOI: 10.7463/1113.0645575
Фоминых А. Б., Жеглов Л. Ф.
УДК 629.1.028

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
fab@bmstu.ru
tereza@bmstu.ru

Введение

Одним из характерных условий эксплуатации армейских колесных машин (КМ) является движение в составе колонны. При некоторых обстоятельствах (террористические акты, неисправности технического характера, возникающие у машин и др.) требуется объезд впереди стоящих транспортных средств, в том числе, движение через придорожный кювет, въезд на насыпь, переезд траншеи.

Важной составляющей в общей модели КМ [1-4], определяющей нагрузки в трансмиссии, является модель взаимодействия шины с неровной поверхностью дороги. В работах [5, 6] рассмотрены конечно-элементные, а в работах [7, 8] с распределенным контактом модели взаимодействия шины с неровностями, которые требуют для расчета значительного числа экспериментальных данных.

При движении через неровности, описываемые гладкими функциями, вполне адекватные результаты можно получить, если использовать модель шины с точечным контактом с опорной поверхностью [1]. Недостатком этой модели является задание перемещения колес в системе координат, жестко связанной с опорной поверхностью, в то время как в действительности колеса перемещаются относительно корпуса машины.

В соответствии с этим, целью настоящей работы является получение дифференциальных уравнений динамической системы КМ при ее движении по твердой неровной поверхности, которые бы более точно отражали действительные физические процессы, происходящие в динамической системе трансмиссии и системе подрессоривания при рассматриваемом нагружении.

Научной новизной работы является математическая модель движения полноприводной колесной машины по дороге с твердой неровной поверхностью, позволяющая существенно уточнить нагрузки, возникающие в системах трансмиссии и подрессоривания КМ в реальных условиях ее эксплуатации.

Вывод уравнений движения

Рассмотрим методику создания математической модели для расчета нагруженности трансмиссии, исключив недостаток, отмеченный в работе [1].

Примем следующие допущения:

– машина считается системой твердых тел, шарнирно или упруго связанных между собой;

– корпус машины и её рама, если таковая имеется, являются абсолютно жесткими;

– подвеска всех колес независимая на поперечных рычагах;

– двигатель и корпуса агрегатов трансмиссии, кроме колесных редукторов, жестко закреплены на корпусе машины;

– контакт колеса с дорогой точечный;

– колебания тел считаются малыми;

– качение колеса по дороге происходит без скольжения;

– движение КМ происходит в направлении оси $\bar{O}X$ системы координат $\bar{O}XYZ$, связанной с опорной поверхностью, при отсутствии отрыва колес от дороги, профиль которой задан уравнением (рис.1)

$$z_д = h_д \sin\left[\frac{2\pi}{L_д}(x_д \cos\varphi_д + y_д \sin\varphi_д)\right],$$

где $x_д, y_д, z_д$ -- координаты произвольной точки на поверхности дороги, $L_д$ и $h_д$ – период и амплитуда функции, характеризующей синусоидальные волны на поверхности дороги (движение КМ происходит не перпендикулярно прямолинейной образующей поверхности дороги, а под некоторым углом $90^o - \varphi_д$ к ней).

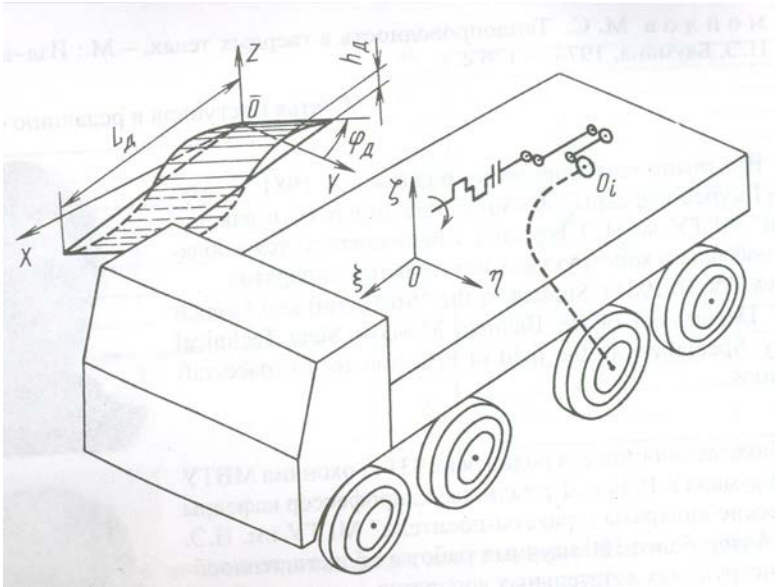


Рис. 1. Схема колесной машины в системе координат $\bar{O}XYZ$, связанной с опорной поверхностью

Представим нашу динамическую систему как систему следующих твердых тел: корпус колесной машины с центром инерции в точке O, обладающий массой M_o и моментами инерции

A_o, B_o, C_o относительно главных центральных осей корпуса $O\xi, O\eta, O\zeta$ соответственно; массы трансмиссии с моментами инерции I_i относительно своих осей вращения, проходящих через точки O_i, i=1, 2,…,n_i; массы колес M_j, сосредоточенные в центрах колес – точках O_j, j=1, 2,…,2n_o, где n_o - число осей колесной машины. Точка O_j – точка пересечения оси вращения j- го колеса с плоскостью продольной симметрии последнего.

Для описания движения системы вводятся следующие обобщенные координаты: x_o, y_o, z_o – линейные координаты точки O в системе осей $\bar{O}XYZ$; α, β, γ - углы поворота корпуса машины; φ_i - углы поворота масс трансмиссии вокруг собственных осей вращения; z_{jB} - вертикальные координаты точек O_j в системе координат $O\xi\eta\zeta$ (в направлении оси $O\zeta$). Координаты z_o и z_{jB} отсчитываются от положения статического равновесия колесной машины на горизонтальной плоскости.

Для упрощения уравнений движения, динамическая система трансмиссии предварительно приведена к валу колеса, для чего моменты инерции I_i и коэффициенты жесткости упругих связей масс трансмиссии разделены на квадраты передаточных чисел от соответствующего вала до колеса.

Движение рассматриваемой динамической системы может быть описано дифференциальными уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_к}\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_к}+\frac{\partial П}{\partial q_к}=Q_к, \qquad к = 1,2,\ldots, n_к,$$

где T, $П$ – кинетическая и потенциальная энергии системы; Φ – диссипативная функция; $Q_к$ – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $q_к$; $n_к$ - число обобщенных координат:

$$n_к = 6 + n_i + 2n_o.$$

Для написания выражений T, $П$ и Φ в точке O введем кроме системы координат $O\xi\eta\zeta$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции корпуса, еще две системы координат: $O\xi^н\eta^н\zeta^н$, совпадающую в начальный момент времени t = 0 с системой координат $O\xi\eta\zeta$; $O\xi^*\eta^*\zeta^*$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $\bar{O}XYZ$.

Переход от системы координат $O\xi^н\eta^н\zeta^н$ к системе $O\xi\eta\zeta$ [9] задается с помощью трех последовательных поворотов (рис. 2). Первый поворот – поворот плоскости $\xi^н O\zeta^н$ вокруг оси $O\eta^н$ на угол α - угол продольного крена, в результате которого ось $O\xi^н$ займет положение ON, а $O\zeta^н$ - ON_1. Второй поворот – поворот плоскости $N_1O\eta^н$ вокруг линии узлов ON на угол β - угол поперечного крена, в результате которого ось ON_1 займет положение $O\zeta$, а $O\eta^н$ – ON_2. Третий поворот – поворот плоскости NON_2 вокруг оси $O\zeta$ на угол γ – угол рысканья, в результате которого ось ON займет положение $O\xi$, а $ON_2 – O\eta$.

Взаимное положение осей систем координат $O\xi\eta\zeta$ и $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ может быть задано с помощью таблицы косинусов углов между соответствующими осями координат, которая с учетом малости углов α, β, γ может быть представлена в виде табл. 1.

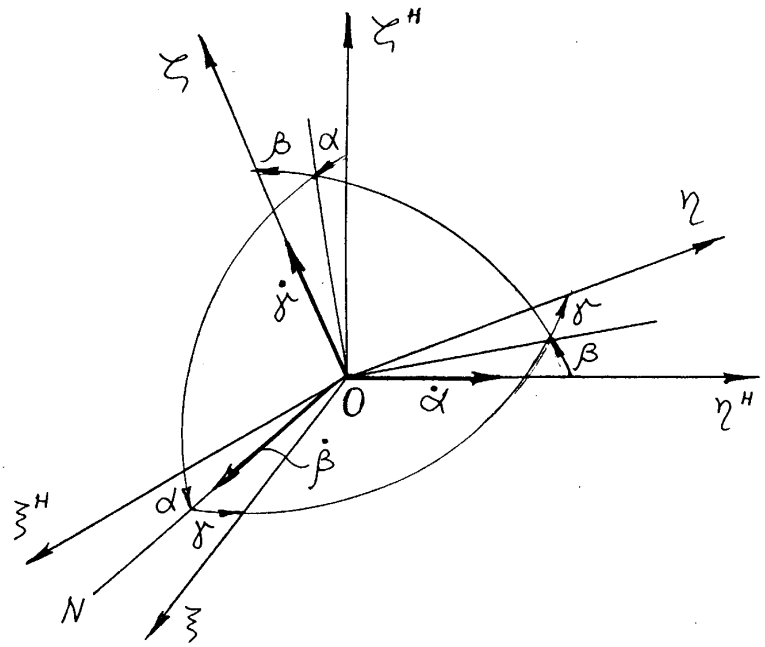


Рис. 2. Углы между системами координат $O\xi\eta\zeta$ и $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$

Таблица 1. Косинусы углов между осями систем координат $O\xi\eta\zeta$ и $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$

	$\xi^{н}$	$\eta^{н}$	$\zeta^{н}$
ξ	1	γ	$-\alpha$
η	$-\gamma$	1	β
ζ	α	$-\beta$	1

Этой таблице косинусов может быть поставлено в соответствие матричное равенство [10]

$$\overline{r} = \left\| a^{H} \right\| \cdot \overline{r}^{H}, \qquad (1)$$

где $\overline{r}$ - матрица-столбец, элементами которой являются координаты какой-либо точки S в системе координат $O\xi\eta\zeta$; $\overline{r}^{H}$ – матрица-столбец, элементами которой являются координаты той же точки S в системе координат $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$; $\left\| a^{H} \right\|$ - квадратная матрица размерности 3x3:

$$\left\| a^{H} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & 1 & \beta \\ \alpha & -\beta & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Равенство (1) дает нам возможность определить координаты точки в системе координат $O\xi\eta\zeta$, зная ее координаты в системе $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$.

Аналогичным образом вводим углы между осями систем координат $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ и $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$, и получаем матричное равенство

$$\overline{\overline{r}}^{H} = \left\|a^{*}\right\| \cdot \overline{\overline{r}}^{*}, \qquad (3)$$

где $\overline{\overline{r}}^{*}$ - матрица-столбец, элементами которой являются координаты той же точки *S* в системе координат $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$; $\left\|a^{*}\right\|$ -квадратная матрица размерности 3x3, элементами которой являются косинусы углов между соответствующими осями систем координат $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ и $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$.

Так как в процессе движения положение систем координат $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ и $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$ не меняется, то все элементы матрицы $\left\|a^{*}\right\|$ являются постоянными числами, зависящими только от взаимного положения систем координат $O\xi\eta\zeta$ и $\bar{O}XYZ$ в начальный момент времени t = 0. С учетом выражений (1) и (3) можно записать

$$\overline{\overline{r}} = \left\|a\right\| \cdot \overline{\overline{r}}^{*}, \qquad (4)$$

где $\left\|a\right\| = \left\|a^{н}\right\| \cdot \left\|a^{*}\right\|$.

Матрицы $\left\|a^{н}\right\|$, $\left\|a^{*}\right\|$ и $\left\|a\right\|$ являются ортогональными, так как они составлены из элементов таблиц косинусов. Для таких матриц обратная матрица является транспонированной, то есть $\left\|a\right\|^{-1} = \left\|a\right\|^{T}$. Тогда выражение (4) может быть переписано в виде

$$\overline{\overline{r}}^{*} = \left\|a\right\|^{-1} \overline{\overline{r}} = \left\|a\right\|^{T} \overline{\overline{r}} = \left\|a^{*}\right\|^{T} \cdot \left\|a^{н}\right\|^{T} \cdot \overline{\overline{r}}. \qquad (5)$$

С учетом обозначений, введенных на рис. 2 ($\overline{\dot{\alpha}}$, $\overline{\dot{\beta}}$, $\overline{\dot{\gamma}}$), выражение для мгновенной угловой скорости системы координат $O\xi\eta\zeta$ (корпуса машины) по отношению к системе координат $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ и, следовательно, к системе $\bar{O}XYZ$, может быть записано в виде

$$\overline{\omega} = \overline{\dot{\alpha}} + \overline{\dot{\beta}} + \overline{\dot{\gamma}}.$$

Если обозначить через ω_{ξ}, ω_{η}, ω_{ζ} - проекции мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ на оси системы координат $O\xi\eta\zeta$, неразрывно связанные с корпусом колесной машины, то с учетом малости колебаний имеем $\omega_{\xi} = \dot{\beta}$, $\omega_{\eta} = \dot{\alpha}$, $\omega_{\zeta} = \dot{\gamma}$.

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальных энергий трансмиссии $П_{тр}$, подвески $П_{п}$ и шин $П_{ш}$:

$$П = П_{тр} + П_{п} + П_{ш};$$

$$\Pi_{тр} = \frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2} C_{i_1,i_2}(\varphi_{i_1} - \varphi_{i_2})^2.$$

Здесь C_{i_1,i_2} - коэффициенты жесткости упругих связей между i_1 и i_2массами трансмиссии;

$$\Pi_{п} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} C_{пj} {z_{jB}}^2,$$

где $C_{пj}$ - коэффициент жесткости подвески j-го колеса в направлении координаты z_{jB}, приведенный к перемещению центра O_j j-го колеса;

$$\Pi_{ш} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} C_{шjz}(z_{дj} - z_{oj})^2,$$

где $C_{шjz}$ - коэффициент жесткости шины j-го колеса в радиальном направлении; $z_{дj}$ - вертикальная координата (в системе $\bar{O}XYZ$) дороги под центром обода O_j j-го колеса (она меняется от – $h_д$ до + $h_д$); z_{oj} - вертикальная проекция (в системе $\bar{O}XYZ$) центра обода O_j j-го колеса относительно положения статического равновесия КМ на горизонтальной плоскости;

$$z_{дj} = h_д sin\left[\frac{2\pi}{L_д}\left(x_{дj}cos\varphi_д + y_{дj}sin\varphi_д\right)\right].$$

Для определения z_{oj} введем точку S_j (рис. 3), под которой понимается точка, неподвижно связанная с корпусом КМ, совпадающая с центром обода O_j j-го колеса в начальном (статическом) положении КМ на горизонтальной плоскости.

Неизменные координаты точки S_j в системе $O\xi\eta\zeta$ обозначим через $\xi_{sj},\eta_{sj},\zeta_{sj}$. Радиус-вектору $\bar{r}_{sj}$ точки S_j в системе координат $O\xi\eta\zeta$ поставим в соответствие матрицу-столбец

$$\bar{\bar{r}}_{sj} = \left\|\begin{matrix}\xi_{sj}\\ \eta_{sj}\\ \zeta_{sj}\end{matrix}\right\|.$$

Тогда

$$z_{oj} = \|001\| \cdot \left(\bar{\bar{r}}_{oj} - \bar{\bar{r}}^{H}_{oj}\right),$$

где $\bar{\bar{r}}_{oj}$ – матрица-столбец с координатами точки O_j в системе координат $\bar{O}XYZ$; $\bar{\bar{r}}^{H}_{oj}$ - матрица-столбец $\bar{\bar{r}}_{oj}$ в начальном (статическом) положении колесной машины на горизонтальной плоскости.

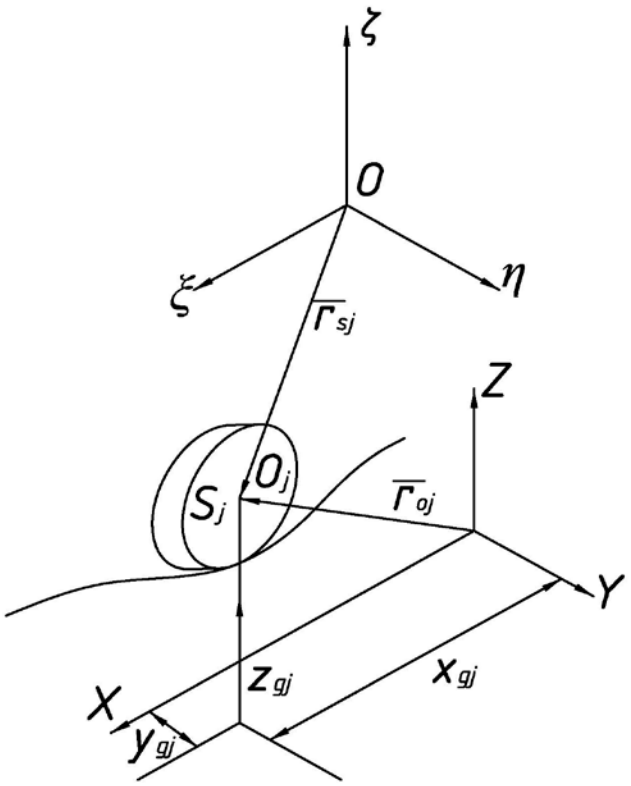


Рис. 3. Координаты центра колеса в системах координат $O\xi\eta\zeta$ и $\bar{O}XYZ$

Обозначим $\bar{r}_{oj}$ – радиус-вектор точки O_j в системе координат $\bar{O}XYZ$. Тогда

$$\bar{r}_{oj} = \bar{r}_o + \bar{r}_{sj} + \bar{r}_{sjoj},$$

где $\bar{r}_o$ - радиус-вектор точки O в системе $\bar{O}XYZ$; $\bar{r}_{sjoj}$ - радиус-вектор с началом в точке S_j, а концом в точке O_j в системе $O\xi\eta\zeta$.

По аналогии с выражением (5) последнее векторное равенство в системе координат $\bar{O}XYZ$ примет вид

$$\bar{\bar{r}}_{oj} = \bar{\bar{r}}_o + \|a\|^T\left(\bar{\bar{r}}_{sj} + \bar{\bar{r}}_{sjoj}\right) = \bar{\bar{r}}_o + \|a^*\|^T \cdot \|a^{\text{н}}\|^T \cdot \left(\bar{\bar{r}}_{sj} + \bar{\bar{r}}_{sjoj}\right),$$

где $\bar{\bar{r}}_o^{\,T} \equiv \|x_o, y_o, z_o + z_{\text{ст}}\|$; $z_{\text{ст}}$ - вертикальная координата точки O в статическом положении КМ на горизонтальной плоскости в системе $\bar{O}XYZ$; $\bar{\bar{r}}_{sjoj}$ - матрица-столбец с координатами вектора $\bar{r}_{\text{sjoj}}$ в системе координат $O\xi\eta\zeta$;

$$\bar{\bar{r}}_{sj}^{\,T} \equiv \|\xi_{sj}, \eta_{sj}, \zeta_{sj}\|;$$
$$\bar{\bar{r}}_{sjoj}^{\,T} \equiv \|0; 0; z_{jB}\|.$$

Итак,

$$\bar{\bar{r}}_{oj} = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + z_{\text{ст}} \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \cdot \|a^{\text{н}}\|^T \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + z_{ст} \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \cdot \left\| \begin{matrix} 1-\gamma & \alpha \\ \gamma & 1 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{matrix} \right\|.$$

Примем, что в начальный момент t = 0 КМ находится в статическом положении на горизонтальной плоскости, так что $x_0 = y_0 = z_0 = \alpha = \beta = \gamma = z_{jB} = 0$ (также как и $\varphi_i = 0$).

Тогда

$$\bar{\bar{r}}_{oj}{}^{H} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ z_{ст} \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ z_{ст} \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\|.$$

Координаты (в системе $\bar{O}XYZ$) перемещения точки O_j относительно положения статического равновесия КМ на горизонтальной плоскости найдутся из выражения

$$\bar{\bar{r}}_{oj} - \bar{\bar{r}}_{oj}{}^{H} = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \left[\left\| \begin{matrix} 1 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 1 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\{ \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ z_{jB} \end{matrix} \right\| \right\} - \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| \right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \cdot \left[\left\| \begin{matrix} 0 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 0 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 1 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ z_{jB} \end{matrix} \right\| \right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \left[\left\| \begin{matrix} 0 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 0 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \alpha z_{jB} \\ -\beta z_{jB} \\ z_{jB} \end{matrix} \right\| \right].$$

Если в первом приближении считать, что главные центральные оси $O\xi\eta\zeta$ КМ совпадают с осями симметрии КМ и в начальный момент движения (в статическом положении КМ на горизонтальной плоскости) параллельны осям системы $\bar{O}XYZ$, то

$$\|a^*\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \equiv \|E\|$$

и последнее равенство перепишется в виде

$$\bar{\bar{r}}_{oj} - \bar{\bar{r}}_{oj}{}^{H} = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 0 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \alpha z_{jB} \\ -\beta z_{jB} \\ z_{jB} \end{matrix} \right\|.$$

В результате

$$z_{oj} = \|0 \quad 0 \quad 1\| \left(\bar{\bar{r}}_{oj} - \bar{\bar{r}}_{oj}{}^{H} \right) = z_0 + \|-\alpha \quad \beta \quad 0\| \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} \end{matrix} \right\| + z_{jB} = z_0 - \alpha\xi_{sj} + \beta\eta_{sj} + z_{jB}.$$

Координаты $x_{дj}$ точки O_j можно вычислить по формуле:

$$x_{дj} = \|1 \quad 0 \quad 0\| \cdot \bar{\bar{r}}_{oj} = \|1 \quad 0 \quad 0\| \left[\left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + z_{ст} \end{matrix} \right\| + \|a^*\|^T \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 1 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{matrix} \right\| \right]$$

или с учетом $\|a^*\| = \|E\|$ – по формуле

$$x_{дj} = x_0 + \|1 \quad -\gamma \quad \alpha\| \cdot \begin{Vmatrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{Vmatrix} = x_0 + \xi_{sj} - \gamma\eta_{sj} + \alpha\left(\zeta_{sj} + z_{jB}\right).$$

Аналогично для $y_{дj}$ имеем выражение

$$y_{дj} = \|0 \quad 1 \quad 0\|\bar{\bar{r}}_{oj} = \|0 \quad 1 \quad 0\| \cdot \left[\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + z_{ст} \end{Vmatrix} + \|a^*\|^T \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 1 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{Vmatrix}\right] \cong$$

$$\cong y_0 + \|\gamma \quad 1 \quad -\beta\| \cdot \begin{Vmatrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{Vmatrix} = y_0 + \gamma\xi_{sj} + \eta_{sj} - \beta\left(\zeta_{sj} + z_{jB}\right).$$

В результате вертикальная координата дороги над точкой O_j запишется в виде

$$z_{дj} = h_д \cdot sin\left[\frac{2\pi}{L_д}\langle\left(x_0 + \xi_{sj} - \gamma\eta_{sj} + \alpha\zeta_{sj} + \alpha z_{jB}\right)cos\varphi_д + \left(y_0 + \gamma\xi_{sj} + \eta_{sj} - \beta\zeta_{sj} - \beta z_{jB}\right)sin\varphi_д\rangle\right],$$

а потенциальная энергия шины примет вид

$$П_ш = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} C_{шjz}\left\{h_д sin\left[\frac{2\pi}{L_д}\langle\left(x_0 + \xi_{sj} - \gamma\eta_{sj} + \alpha\zeta_{sj} + \alpha z_{jB}\right)cos\varphi_Д + \left(y_0 + \gamma\xi_{sj} + \eta_{sj} - \beta\zeta_{sj} - \beta z_{jB}\right)sin\varphi_Д\rangle\right] - z_0 + \alpha\xi_{sj} - \beta\eta_{sj} - z_{jB}\right\}^2.$$

Кинетическая энергия системы в первом приближении может быть представлена в виде суммы кинетических энергий корпуса колесной машины T_o, вращающихся масс трансмиссии $T_{тр}$ и поступательно движущихся масс колес $T_{колес}$:

$$T = T_o + T_{тр} + T_{колес};$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\left[M_0(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + A_0\dot{\beta}^2 + B_0\dot{\alpha}^2 + C_0\dot{\gamma}^2\right];$$

$$T_{тр} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_i} I_i\dot{\varphi}_i^2;$$

$$T_{колес} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} M_j\left|\bar{V}_{oj}\right|^2.$$

Здесь $\bar{V}_{oj}$– абсолютная скорость точки O_j (в системе $\bar{O}XYZ$).

$$\bar{V}_{oj} = \bar{V}_{oj}^{\,отн} + \bar{V}_{oj}^{\,I} + \bar{V}_{oj}^{\,II} + \bar{V}_{oj}^{\,III},,$$

где $\bar{V}_{oj}^{\,отн}$ – скорость точки O_j относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$;

$\bar{V}_{oj}^{\ I}$ - скорость той точки системы координат $O\xi\eta\zeta$, с которой в данный момент совпадает точка O_j, относительно системы $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$;

$\bar{V}_{oj}^{\ II}$ - скорость той точки системы координат $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$, с которой в данный момент совпадает точка O_j, относительно системы $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$;

$\bar{V}_{oj}^{\ III}$- скорость той точки системы координат $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$, с которой в данный момент совпадает точка O_j,относительно системы $\bar{O}XYZ$.

По условию введения систем координат скорость $\bar{V}_{oj}^{\ II} = 0$ (так как система $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ неподвижна относительно системы $O\xi^{*}\eta^{*}\zeta^{*}$). Чтобы сложить векторы в последнем равенстве, необходимо выразить их через проекции в какой-нибудь одной системе координат, например в системе $\bar{O}XYZ$:

$$\bar{\bar{V}}_{oj} = \bar{\bar{V}}_{oj}^{\ отн} + \bar{\bar{V}}_{oj}^{\ I} + \bar{\bar{V}}_{oj}^{\ III}\ .$$

Здесь элементами всех введенных матриц-столбцов являются проекции одноименных векторов на оси системы координат $\bar{O}XYZ$.

Точка O_j в системе $O\xi\eta\zeta$ задается матрицей-столбцом

$$\bar{\bar{r}}_{osoj} = \bar{\bar{r}}_{sj} + \bar{\bar{r}}_{sjoj} = \left\| \begin{matrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{matrix} \right\|, \qquad \text{а } \dot{\bar{\bar{r}}}_{osoj} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_{jB} \end{matrix} \right\|,$$

Так как $\xi_{sj} = const,\ \eta_{sj} = const,\ \zeta_{sj} = const.$

Чтобы спроектировать вектор $\bar{\bar{V}}_{oj}^{\ отн}$ на оси $\overline{OXYZ}$, необходимо умножить матрицу-столбец $\bar{\bar{r}}_{osoj}$ слева на матрицу $\|a\|^T$:

$$\bar{\bar{V}}_{oj}^{\ отн} = \|a\|^T \cdot \bar{\bar{r}}_{osoj}.$$

Точка O_j имеет в системе $O\xi\eta\zeta$ радиус вектор $\bar{r}_{osoj}$ с координатами $\xi_{sj}, \eta_{sj}, (\zeta_{sj} + z_{jB})$. Сама система $O\xi\eta\zeta$ поворачивается относительно системы $O\xi^{н}\eta^{н}\zeta^{н}$ с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}$, имеющей проекции $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ на оси $O\xi\eta\zeta$. Тогда по формуле Эйлера имеем

$$\bar{V}_{oj}^{\ I} = [\bar{\omega}, \bar{r}_{osoj}].$$

Здесь координаты вектора $\bar{V}_{oj}^{\ I}$ являются его проекциями в системе $O\xi\eta\zeta$.

Векторному произведению $[\bar{\omega}, \bar{r}_{osoj}]$ можно сопоставить произведение двух матриц $\|\omega\| \cdot \bar{\bar{r}}_{osoj}$ – вектор-столбец. Чтобы спроецировать этот вектор на оси системы $\bar{O}XYZ$ нужно умножить это произведение слева на матрицу $\|a\|^T$. В результате получим

$$\bar{\bar{V}}_{oj}^{\ I} = \|a\|^T \cdot \|\omega\| \cdot \bar{\bar{r}}_{osoj},$$

где $\|\omega\| = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} & 0 & -\dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} & \dot{\beta} & 0 \end{Vmatrix}$.

И, наконец, $\bar{\bar{V}}_{oj}^{\ III} = \dot{\bar{r}}_o$.

В итоге получаем

$$\bar{\bar{V}}_{oj} = \bar{\bar{V}}_{oj}^{\ \text{отн}} + \bar{\bar{V}}_{oj}^{\ I} + \bar{\bar{V}}_{oj}^{\ III} = \|a\|^T \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_{jB} \end{Vmatrix} + \|a\|^T \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} & 0 & -\dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} & \dot{\beta} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Vmatrix}$$

или

$$\bar{\bar{V}}_{oj} \equiv \begin{Vmatrix} \dot{x}_{0j} \\ \dot{y}_{0j} \\ \dot{z}_{oj} \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Vmatrix} + \|a^{\text{н}}\|^{\text{т}} \cdot \left[\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_{jB} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -\dot{\gamma} & \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} & 0 & -\dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} & \dot{\beta} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \xi_{sj} \\ \eta_{sj} \\ \zeta_{sj} + z_{jB} \end{Vmatrix} \right] =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -\gamma & \alpha \\ \gamma & 1 & -\beta \\ -\alpha & \beta & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\dot{\gamma}\eta_{sj} + \dot{\alpha}(\zeta_{sj} + z_{jB}) \\ \dot{\gamma}\xi_{sj} - \dot{\beta}(\zeta_{sj} + z_{jB}) \\ -\dot{\alpha}\xi_{sj} + \dot{\beta}\eta_{sj} + z_{jB} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dot{x}_0 - \dot{\gamma}\eta_{sj} + \dot{\alpha}(\zeta_{sj} + z_{jB}) - \gamma\dot{\gamma}\xi_{sj} + \gamma\dot{\beta}(\zeta_{sj} + z_{jB}) - \alpha\dot{\alpha}\xi_{sj} + \alpha\dot{\beta}\eta_{sj} + \beta z_{jB} \\ \dot{y}_0 - \gamma\dot{\gamma}\eta_{sj} + \gamma\dot{\alpha}(\zeta_{sj} + z_{jB}) + \dot{\gamma}\xi_{sj} - \dot{\beta}(\zeta_{sj} + z_{jB}) + \beta\dot{\alpha}\xi_{sj} - \beta\dot{\beta}\eta_{sj} - \beta z_{jB} \\ \dot{z}_0 + \alpha\dot{\gamma}\eta_{sj} - \alpha\dot{\alpha}(\zeta_{sj} + z_{jB}) + \beta\dot{\gamma}\xi_{sj} - \beta\dot{\beta}(\zeta_{sj} + z_{jB}) - \dot{\alpha}\xi_{sj} + \dot{\beta}\eta_{sj} + \dot{z}_{jB} \end{Vmatrix}.$$

С учетом малости обобщенных координат и их скоростей имеем

$$\bar{\bar{V}}_{oj} \equiv \begin{Vmatrix} \dot{x}_{oj} \\ \dot{y}_{oj} \\ \dot{z}_{oj} \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} \dot{x}_o - \dot{\gamma}\eta_{sj} + \dot{\alpha}\zeta_{sj} \\ \dot{y}_o + \dot{\gamma}\xi_{sj} - \dot{\beta}\zeta_{sj} \\ \dot{z}_o - \dot{\alpha}\xi_{sj} + \dot{\beta}\eta_{sj} + \dot{z}_{jB} \end{Vmatrix}.$$

В результате, поскольку

$$T_{\text{колес}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} M_j \left|\bar{V}_{oj}\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} M_j (\dot{x}_{0j}^2 + \dot{y}_{0j}^2 + \dot{z}_{0j}^2),$$

окончательно получим

$$T_{\text{колес}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} M_j \left[\left(\dot{x}_0 - \dot{\gamma}\eta_{sj} + \dot{\alpha}\zeta_{sj}\right)^2 + \left(\dot{y}_0 + \dot{\gamma}\xi_{sj} - \dot{\beta}\zeta_{sj}\right)^2 + \left(\dot{z}_0 - \dot{\alpha}\xi_{sj} + +\dot{\beta}\eta_{sj} + \dot{z}_{jB}\right)^2 \right].$$

При вычислении диссипативной функции в первом приближении могут быть учтены только потери энергии в подвеске. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n_0} b_{nj}\dot{z}_{jB}^2,$$

где b_{nj} – коэффициент трения в амортизаторе j-го колеса, приведенный к перемещению центра колеса (точки O_j).

В качестве обобщенной силы, действующей на координату φ_1, считаем приведенный к колесу крутящий момент двигателя, который, в частности, для дизеля может быть задан как совокупность внешней и регулярных характеристик (рис. 4):

$$Q_{\varphi_1} = T_e \cdot U_{\text{тр}\Sigma}.$$

Здесь $U_{\text{тр}\Sigma}$ – суммарное передаточное число от двигателя до колеса.

Считая в первом приближении радиусы качения колес постоянными, уравнение связи колес с дорогой представим в виде

$$x_0 = \varphi_j \cdot r_{kj},\ j = 1,2,\dots,2n_0.$$

Таким образом, углы поворота колес φ_j при данной постановке задачи не будут являться обобщенными координатами, а будут зависеть от обобщенной координаты x_0.

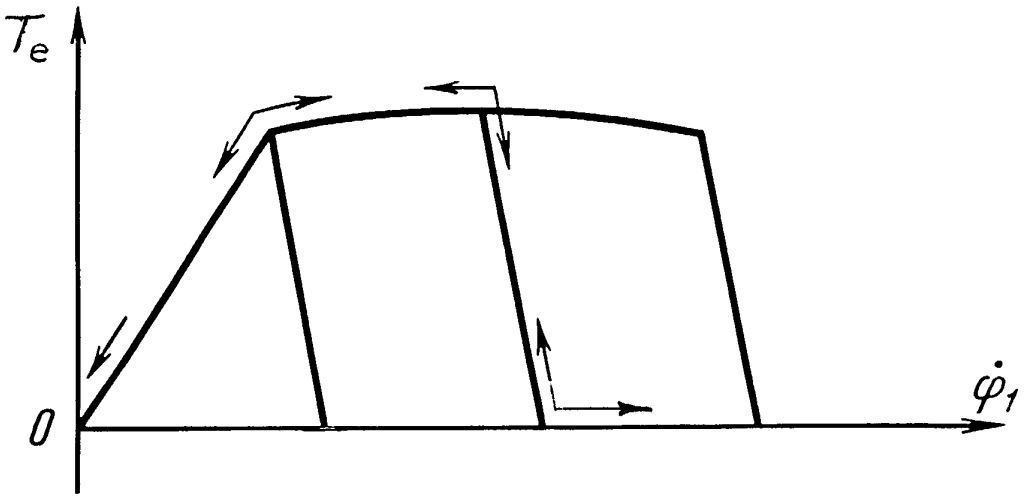


Рис. 4. Внешняя и регуляторные характеристики дизеля

Обобщенная сила Q_{x_0} по координате x_0 обусловлена силами сопротивления воздуха, качения колес по дороге и подъема колес по неровности:

$$Q_{x_0} = -\sum_{j=1}^{2n_0} P_{zj}(f + \alpha_{\text{д}j}) - 0{,}5C_x \cdot K_{\text{лоб}} \cdot B \cdot H \cdot \rho_B \cdot \dot{x}_0^2.$$

Здесь f – коэффициент сопротивления качению колеса; $\alpha_{\text{д}j}$ – угол наклона касательной к поверхности дороги в плоскости, перпендикулярной плоскости $X\bar{O}Z$ в точке дороги, лежащей под центром O_j j-го колеса; P_{zj} – вертикальная сила в контакте j-го колеса с дорогой:

$$P_{zj} = C_{\text{ш}jz}(h_j + z_{\text{д}j} + z_{oj}),$$

где h_j – статический прогиб шины;

$$\alpha_{\text{д}j} = \frac{\partial z_{\text{д}j}}{\partial x_{\text{д}j}} = \frac{2\pi h_{\text{д}}}{L_{\text{д}}} cos\varphi_{\text{д}} cos\left[\frac{2\pi}{L_{\text{д}}}(x_{\text{д}j}\cos\varphi_{\text{д}} + y_{\text{д}j}\sin\varphi_{\text{д}})\right];$$

C_x – коэффициент обтекаемости;

$K_{лоб}$ – коэффициент заполнения площади лобового сечения КМ;

B и H – колея и габаритная высота машины соответственно;

ρ_B – плотность воздуха.

Остальные обобщенные силы считаем равными нулю.

Подставляя все найденные выражения для T, $П$, $Ф$ и Q в уравнения Лагранжа второго рода, получим систему дифференциальных уравнений, записанную в матричной форме:

$$\|M\|\ddot{\bar{q}}_к + \|B\|\dot{\bar{q}}_к + \|C\|\bar{q}_к = \bar{F}.$$

Здесь $\|M\|, \|B\|, \|C\|$ – квадратные матрицы порядка $n_к$ х $n_к$, элементы которых являются постоянными величинами; $\bar{q}_к$ – матрица-столбец обобщенных координат $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \dots \varphi_i \dots, \dots z_j \dots$ порядка $n_к$; $\bar{F}$ - матрица-столбец порядка $n_к$, элементами которой являются нелинейные функции обобщенных координат и их производных.

Решение последней системы дифференциальных уравнений позволяет определить все обобщенные координаты и скорости в функции времени и вычислить текущее значение упругого момента на участке трансмиссии между i-ой и k-ой массами

$$T_{i,k} = C_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)$$

при движении колесной машины по дороге с определенными параметрами $h_д, L_д$ и $\varphi_д$.

Одновременно может быть вычислена нагрузка на j-ое колесо со стороны дороги

$$P_{zj} = c_{шjz}\left(h_j + z_{дj} + z_{oj}\right)$$

и в первом приближении – нагрузка на корпус КМ со стороны системы подрессоривания

$$P_{пj} = c_{пj}\left(h_{пj} + z_{jB}\right) + b_{пj}\dot{z}_{jB},$$

где $h_{пj}$ – статический прогиб системы подрессоривания j – ого колеса.

Заключение

Задание перемещений колес в системе координат, связанной с корпусом колесной машины, позволяет по сравнению с математической моделью, использованной в работе [1], существенно уточнить выражения для потенциальной, кинетической энергий и диссипативной функции системы, что, в конечном счете, обеспечивает адекватность математическую модель движения полноприводной колесной машины по твердой неровной поверхности дороги.

Разработанная математическая модель взаимосвязанной динамической системы многоосной полноприводной КМ дает возможность достоверно оценить динамическую нагруженность деталей трансмиссии и системы подрессоривания при неустановившемся движении машины в условиях совместного нагружения от двигателя и несимметричного пространственного нагружения от дорожной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках договора №9905/17/07-к-12 между ОАО «КАМАЗ» и «Московским государственным техническим университетом имени Н.Э. Баумана».

Список литературы

1. Полунгян А.А., Фоминых А.Б. Математическая модель динамики трансмиссии колесной машины при движении по твердой неровной дороге // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2003. № 4. С. 15-25.
2. Белоусов Б.Н., Шухман С.Б. Прикладная механика наземных тягово-транспортных средств с мехатронными системами: монография / под общ. ред. докт. техн. наук, проф. Б.Н. Белоусова. М.: Агроконсалт, 2013. 612 с.
3. Белоусов Б.Н., Попов С.Д. Колесные транспортные средства особо большой грузоподъемности. Конструкция. Теория. Расчет / Под общ. ред. Б.Н. Белоусова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 728 с.
4. Камаль А., Фоминых А.Б. Математическая модель движения по ровной дороге двухосной полноприводной колесной машины с вариаторами в раздаточной коробке // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2007. № 7. С. 32-36.
5. Darnell I., Hulbert G.M., Mousseau C.W. An Efficient Three-Dimensional Tire Model for Vehicle Dynamics Simulation // Mechanics of Structures and Machines. 1997. Vol. 25, iss. 1. P. 1-19. DOI: 10.1080/08905459708905277
6. Fukushima T., Shimonishi H. Simulation of a Vehicle Running onto a Curb by Using Tire and Vehicle FE models // Proc. of the 4th European LS-DYNA Users Conference, 2003. P. 1-7.
7. Фоминых А.Б., Комиссаров А.И. Модели взаимодействия колеса с единичными неровностями, предназначенные для определения динамической нагруженности трансмиссии колесной машины // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2005. № 1. С. 29-37.
8. Davis D.S. A Radial-Spring Terrain-Enveloping Tire Model // Vehicle System Dynamics. 1974. Vol. 3. P. 55-69.
9. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
10. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968. 912 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

A mathematical model of the all-wheel drive vehicle's motion on a firm rough road

11, November 2013
DOI: 10.7463/1113.0645575
Fominyh A.B., Jeglov L.F.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation
fab@bmstu.ru
tereza@bmstu.ru

A spatial model of interaction between a wheel vehicle and a road surface was considered in this article. Expressions for kinematic and power factors that determine motion and oscillations of a wheel vehicle, transmission elements and its running gear under spatial loads were obtained. It was shown that specifying wheels displacement in the coordinate system connected with the vehicle's body allowed to make this mathematical model of motion significantly more precise. This approach provides a possibility to obtain a reliable estimate of exploitation operating modes of aggregates and systems of a wheel vehicle under conditions of passing engineering constructions.

Publications with keywords: mathematical model, Suspension system, wheeled vehicle, spatial loading, coordinate systems, matrices, differential equations, transmission, carrier system
Publications with words: mathematical model, Suspension system, wheeled vehicle, spatial loading, coordinate systems, matrices, differential equations, transmission, carrier system

References

1. Polungyan A.A., Fominykh A.B. Matematicheskaya model' dinamiki transmissii kolesnoy mashiny pri dvizhenii po tverdoy nerovnoy doroge [Mathematical simulation of dynamics of wheeled vehicle transmission]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2003, no. 4, pp. 15-25.

2. Belousov B.N., Shukhman S.B. *Prikladnaya mekhanika nazemnykh tyagovo-transportnykh sredstv s mekhatronnymi sistemami* [Applied mechanics of ground towing vehicles with mechatronic systems]. Moscow, Agrokonsalt, 2013. 612 p.

3. Belousov B.N., Popov S.D. *Kolesnye transportnye sredstva osobo bol'shoy gruzopod"emnosti. Konstruktsiya. Teoriya. Raschet* [Wheel vehicles specially the big carrying capacity. Design. Theory. Calculation]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 728 p.

4. Kamal' A., Fominykh A.B. Matematicheskaya model' dvizheniya po rovnoy doroge dvukhosnoy polnoprivodnoy kolesnoy mashiny s variatorami v razdatochnoy korobke [Mathematical model of movement on a level road of four-wheel drive vehicle with variators in a distributing box]. *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2007, no. 7, pp. 32-36.

5. Darnell I., Hulbert G.M., Mousseau C.W. An Efficient Three-Dimensional Tire Model for Vehicle Dynamics Simulation. *Mechanics of Structures and Machines*, 1997, vol. 25, iss. 1, pp. 1-19. DOI: 10.1080/08905459708905277

6. Fukushima T., Shimonishi H. Simulation of a Vehicle Running onto a Curb by Using Tire and Vehicle FE models. *Proc. of the 4th European LS-DYNA Users Conference*, 2003, pp. 1-7.

7. Fominykh A.B., Komissarov A.I. Modeli vzaimodeystviya kolesa s edinichnymi nerovnostyami, prednaznachennye dlya opredeleniya dinamicheskoy nagruzhennosti transmissii kolesnoy mashiny [Models of interaction of the wheel with single irregularities, intended for determining the dynamic loading of transmission of wheeled vehicle]. *Izvestiya VUZov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2005, no. 1, pp. 29-37.

8. Davis D.S. A Radial-Spring Terrain-Enveloping Tire Model. *Vehicle System Dynamics*, 1974, vol. 3, pp. 55-69.

9. Lur'e A.I. *Analiticheskaia mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 824 p.

10. Aleksandrov P.S. *Lektsii po analiticheskoy geometrii* [Lectures on analytical geometry]. Moscow, Nauka, 1968. 912 p.