НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Преобразования аффинных систем к каноническому виду с использованием замен независимой переменной

07, июль 2013

DOI: 10.7463/0713.0571094

Касаткина Т. С.

УДК 517.938

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kasatkina_t_s@mail.ru

Введение

Актуальным является вопрос преобразования аффинных динамических систем

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1}$$

где u — управление, к каноническому виду. В [1] приведены условия, при выполнении которых с помощью диффеоморфизма пространства состояний, система (1) приводится к каноническому виду. Однако эти условия не всегда выполняются.

Замена переменной дифференцирования (масштабирование времени) предоставляет дополнительную степень свободы при эквивалентных преобразованиях динамических систем. Эквивалентное преобразование динамической системы к линейной управляемой системе с использованием замены времени и последующей линеаризации системы обратной связью впервые было предложено в [2]. В этой работе приведены условия, при которых такое преобразование существует. Системы, удовлетворяющие этим условиям, названы линеаризуемыми обратной связью в широком смысле. Проверка этих условий сводится к поиску функции масштабирования времени и проверке условий линеаризации обратной связью для системы, записанной в новом времени. Функция масштабирования представляет собой решение нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поиск этого решения, особенно в случае больших размерностей пространства состояний системы, является довольно сложной задачей.

В [3, 4] изложенная выше стратегия преобразования системы к линейной управляемой системе названа орбитальной линеаризацией обратной связью. В этих работах в терминах дифференциальной геометрии сформулированы условия, которым должна удовлетворять исходная система, для того чтобы она была орбитально линеаризуема обратной связью. Разработаны алгоритмы орбитальной линеаризации обратной связью для систем со скалярным [4, 5] и векторным управлением [6].

Масштабирование времени применяется в теории управления для поиска оптимальных траекторий, уменьшения отклонения в задачах следования вдоль заданной траектории [7, 8] и заданной кривой [9, 10, 11].

Ряд работ посвящен построению наблюдателя со скалярным [12] и векторным выходом [13]. Также масштабирование времени используется при решении задач стабилизации плоских систем при наличии сингулярностей при некоторых значениях управления [14].

В данной статье исследуется возможность преобразования аффинных систем (1) к каноническому виду с использованием замены независимой переменной (времени). Рассматривается два типа замен: интегрируемые и неинтегрируемые.

Разделы статьи организованы следующим образом. В разд. 1 изложена постановка задачи. В разд. 2 дано определение и классификация замен независимой переменной. В разд. 3 показано, что после выполнения интегрируемой замены преобразованная система не приводится к каноническому виду. В разд. 4 получен вид функции, определяющей неинтегрируемую замену, после выполнения которой система приводится к каноническому виду, который является регулярным.

1. Постановка задачи

Рассмотрим многомерную аффинную систему

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где $B(x) = (b_{ij}(x))$ — матрица типа $n \times m$; $A(x) = \big(a_1(x),\ \ldots,\ a_n(x)\big)^{\mathrm{T}}$ — вектор-функция; $a_i, b_{ij} \in C^\infty(\Omega)$; Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$; $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $i = \overline{1,\, m}$, — управление; $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ — дифференцирование по независимой переменной t.

Обозначим $B_j(x)$, $j = \overline{1,\, m}$, j-й столбец матрицы $B(x)$. Здесь и далее будем ассоциировать с вектор-функциями $A(x)$, $B_1(x)$, $\ldots$, $B_m(x)$ векторные поля $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$, $\ldots$, $\mathbf{B}_m$ с соответствующими координатными представлениями.

Аффинную систему вида

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \;\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n, \\ \dot{z}_n = f(z) + g(z)u, \end{cases} \tag{3}$$

называют системой канонического вида. Если $g(x) \neq 0$, то канонический вид называют регулярным.

Будем рассматривать системы, которые не приводятся к регулярному каноническому виду в окрестности некоторой точки $x^0 \in \Omega$. Это означает невыполнение хотя бы одного из двух условий [1]:

1) матрица управляемости

$$U = \big(\mathbf{B}_1,\ \ldots,\ \mathbf{B}_m,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}_1,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}_m,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^{n-1}\,\mathbf{B}_1,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^{n-1}\,\mathbf{B}_m\big)$$

невырождена в точке x^0;

2) распределение

$$\mathrm{span}\,\big\{\mathbf{B}_1,\ \ldots,\ \mathbf{B}_m,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}_1,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}_m,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^{n-2}\,\mathbf{B}_1,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^{n-2}\,\mathbf{B}_m\big\}$$

инволютивно в окрестности точки x^0.

Здесь и далее $\mathrm{ad}_{\mathbf{X}}\,\mathbf{Y} = [\mathbf{X},\ \mathbf{Y}]$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{X}}^k\,\mathbf{Y} = \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^{k-1}\,\mathbf{Y})$, $k = 2,\,3,\,\ldots$, и $[\mathbf{X},\ \mathbf{Y}]$ обозначает коммутатор векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

2. Замены независимой переменной

Введем новую независимую переменную τ с помощью соотношения

$$\frac{d\tau}{dt} = h(x) = \frac{1}{s(x)}, \tag{4}$$

где $0 < s(x) < +\infty$ — функция масштабирования времени [2].

Пользуясь соотношением (4), перейдем в системе (2) к дифференцированию по переменной τ:

$$x' = \frac{dx}{d\tau} = \dot{x}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{x}}{s(x)} = \frac{1}{s(x)}A(x) + \frac{1}{s(x)}B(x)u.$$

В результате преобразованная система принимает вид

$$x' = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)u, \tag{5}$$

где

$$\tilde{A}(x) = \frac{1}{s(x)}A(x), \quad \tilde{B}(x) = \frac{1}{s(x)}B(x).$$

Определение 1. Преобразование системы (2) к виду (5), полученное переходом к дифференцированию по переменной τ с помощью равенства (4), называется заменой независимой переменной в области $O \in \Omega$. Замена независимой переменной (4) называется интегрируемой, если существует функция $f(x) \in C^\infty(O)$, для которой $\tau = f(x)$. Иначе замена независимой переменной называется неинтегрируемой.

3. Интегрируемые замены

Утверждение 1. *Если в области $O \subset \Omega$ замена независимой переменной* (4) *интегрируема, т.е. $\tau = f(x)$, то в этой области $\mathbf{B}_j f = 0$, $j = \overline{1,\, m}$, $\mathbf{A} f = h$.*

Доказательство. С одной стороны, $\dot{\tau} = h(x)$, с другой, так как замена интегрируемая, $\dot{\tau} = \dot{f}(x) = \mathbf{A} f(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} \mathbf{B}_j f(x) u_j$. Следовательно,

$$h(x) = \mathbf{A} f(x) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{B}_j f(x) u_j.$$

Поскольку полученное равенство верно для любых значений управлений, то $h(x) = \mathbf{A} f(x)$, $\mathbf{B}_j f(x) = 0$, $j = \overline{1,\, m}$. Утверждение доказано.

Рассмотрим влияние интегрируемой замены независимой переменной на ранг матрицы управляемости преобразованной системы (5) в некоторой точке $x^0 \in O$. Матрица управляемости многомерной аффинной системы (5) в точке x^0 имеет вид

$$\tilde{U}(x^0) = \big(\tilde{\mathbf{B}}_1(x^0),\ \ldots,\ \tilde{\mathbf{B}}_m(x^0),\ \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{B}}_1(x^0),\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{B}}_m(x^0),\ \ldots,\\ \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{n-1} \tilde{\mathbf{B}}_1(x^0),\ \ldots,\ \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{n-1} \tilde{\mathbf{B}}_m(x^0)\big).$$

Прежде чем сформулировать основной результат докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Для любых двух векторных полей $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ с координатными представлениями $P(x) = (p_1(x), \ldots, p_n(x))^{\mathrm{T}}$, $Q(x) = (q_1(x), \ldots, q_n(x))^{\mathrm{T}}$, где $p_i,\, q_i \in C^\infty(O(x^0))$ и функции $p_n(x)$, $q_n(x)$ постоянны в окрестности $O(x^0)$ точки x^0, их коммутатор $[\mathbf{P},\, \mathbf{Q}]$ в $O(x^0)$ имеет нулевую координату с номером n.

Доказательство. Столбец координат $[\mathbf{P},\, \mathbf{Q}]\,(x)$ векторного поля $[\mathbf{P},\, \mathbf{Q}]$ в точке $x \in O(x^0)$ вычисляется по формуле

$$[\mathbf{P},\, \mathbf{Q}]\,(x) = \frac{\partial Q}{\partial x} P(x) - \frac{\partial P}{\partial x} Q(x).$$

Так как координаты с номером n векторных полей $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ постоянны, n-е строки матриц $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ нулевые. Следовательно,

$$[\mathbf{P},\, \mathbf{Q}]\,(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \cdots \\ p_{n-1}(x) \\ p_n \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \cdots \\ q_{n-1}(x) \\ q_n \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Из формулы (6) следует, что n-я координата коммутатора векторных полей $[\mathbf{P},\ \mathbf{Q}]$ в окрестности точки x^0 равна нулю. Лемма доказана.

Теорема 1. Если в системе (2) в области $O \subset \Omega$ сделана интегрируемая замена независимой переменной, то ранг матрицы управляемости преобразованной системы (5) меньше n в области O.

Доказательство. Прежде чем в системе (2) перейти к дифференцированию по новой независимой переменной, сделаем замену переменных состояния, которая является невырожденной. Поскольку $\mathbf{A}f(x) = \mathrm{grad}\, f(x) \cdot A(x) > 0$ при $x \in O$, то вектор-функция $\mathrm{grad}\, f(x)$ не является нулевой. Значит, она имеет хотя бы одну ненулевую координату в точке $x^0 \in O$. Без ограничений общности будем считать, что это координата с номером n.

Рассмотрим соотношения

$$z_1 = x_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = x_{n-1}, \quad z_n = f(x), \tag{7}$$

которые задают отображение $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Матрица Якоби системы функций (7) имеет вид

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Определитель матрицы Якоби (8) в точке x^0 не равен нулю:

$$\det(\Phi'(x^0)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\bigg|_{x=x^0} \neq 0.$$

Следовательно, в некоторой окрестности точки $\Phi(x^0)$ существует обратное отображение Φ^{-1}, определяемое соотношениями

$$x_1 = z_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = z_{n-1}, \quad x_n = \Psi(z),$$

и соотношения (7) задают гладкую невырожденную замену переменных в окрестности точки x^0. После замены переменных (7) система (2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{z}_j = \tilde{a}\big(z_1, \ldots, z_{n-1}, \Psi(z)\big) + \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{b}_{ji}\big(z_1, \ldots, z_{n-1}, \Psi(z)\big) u_i, \quad j = \overline{1,\ n-1}; \\ \dot{z}_n = \dot{f}\big(z_1, \ldots, z_{n-1}, \Psi(z)\big). \end{cases} \tag{9}$$

Сделав в системе (9) интегрируемую замену независимой переменной

$$\tau = f(x) = f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \Psi(z)),$$

получаем систему

$$
\begin{aligned}
&z_j' = \frac{a(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}{\dot f(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))} + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_{ji}(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}{\dot f(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}u_i, \quad j=\overline{1,\,n-1};\\
&z_n' = 1.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Столбцы координат векторных полей $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_j$, $j=\overline{1,\,m}$, системы (10) имеют вид

$$
\tilde B_j(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{1j}(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}{\dot f(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{b_{n-1,j}(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}{\dot f(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde A(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}{\dot f(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{a_{n-1}(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))}{\dot f(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z))} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}
$$

Векторные поля $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_j$ с координатными представлениями (11) удовлетворяют условию леммы в окрестности точки x^0. Следовательно, координаты с номером n векторных полей $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{\mathbf{B}}_j$, $j=\overline{1,\,m}$, равны нулю в окрестности точки x^0. Продолжая рассуждения таким образом, заключаем, что координаты векторных полей $\mathrm{ad}^k_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{\mathbf{B}}_j$, $j=\overline{1,\,m}$, $k=\overline{2,\,n-1}$, с номером n равны нулю в окрестности точки x^0. Итак, строка с номером n матрицы управляемости $\tilde U(z_1,\ldots,z_{n-1},\Psi(z)))$ в точке $\Phi^{-1}(x^0)$ состоит из нулевых элементов, поэтому

$$
\operatorname{rank} \tilde U(\Phi^{-1}(x^0)) < n. \tag{12}
$$

Так как система функций (7) задает гладкую невырожденную замену переменных состояния в окрестности точки x^0, отображение Φ является диффеоморфизмом в этой окрестности. Следовательно, с учетом (12) $\operatorname{rank}\tilde U(x^0) < n$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в системе (2) в области $O \subset \Omega$ сделана интегрируемая замена независимой переменной, то преобразованная система (5) не приводится к каноническому виду в области O.

4. Преобразование трехмерных аффинных систем к каноническому виду

Рассмотрим частный случай системы (2) при $n=3$:

$$
\dot\xi = A_0(\xi) + B_0(\xi)w, \quad \xi\in\Omega\subset\mathbb{R}^3, \quad w\in\mathbb{R}, \tag{13}
$$

w — управление. Если вектор-столбец $B_0(\xi)$ в некоторой точке ξ^0 ненулевой, то в некоторой окрестности этой точки существуют невырожденная замена переменных состояния $x=x(\xi)$ и замена управлений $v=v(\xi,w)$, которые приводят систему (13) к форме

$$
\dot x = A(x) + B(x)v, \tag{14}
$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исследуем условия преобразования системы (14) к каноническому виду (3) при $n = 3$:

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ z_3' = f(z) + g(z)v, \end{cases} \tag{15}$$

где дифференцирование осуществляется по переменной τ, введенной с помощью неинтегрируемой замены (4).

Проверим для системы (14) выполнение условия 2 приведения системы к регулярному каноническому виду (см. разд. 1). Инволютивность распределения, порожденного векторными полями $\mathbf{B}$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}$, равносильна тому, что коммутатор $[\mathbf{B},\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}]$ принадлежит линейной оболочке этих векторных полей.

Вычислим координаты коммутаторов:

$$\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}(x) = \frac{\partial B(x)}{\partial x}A(x) - \frac{\partial A(x)}{\partial x}B(x) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{B},\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}]\,(x) = \frac{\partial\,\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}(x)}{\partial x}B(x) - \frac{\partial B(x)}{\partial x}\,\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}(x) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_3^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторное поле $[\mathbf{B},\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}]$ принадлежит линейной оболочке векторных полей $\mathbf{B}$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда существует функция $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$, такая, что в окрестности точки x^0 выполнено равенство

$$[\mathbf{B},\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}]\,(x) = \psi(x)\,\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}(x).$$

Таким образом, если выполнено неравенство

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3}\frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_3^2} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3}\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_3^2} \neq 0, \tag{16}$$

то распределение $\Delta = \mathrm{span}\,\{\mathbf{B},\ \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\}$, порожденное векторными полями $\mathbf{B}$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}$, не является инволютивным. Это означает, что система (14) не приводится к каноническому виду.

После перехода в системе (14) к дифференцированию по переменной τ, введенной с помощью соотношения (4) в области $O \subset \Omega$, получим систему

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x)s(x), \\ x_2' = f_2(x)s(x), \\ x_3' = s(x)v. \end{cases}$$

Вводя новое управление $u = s(x)v$, получим систему

$$x' = \tilde{A} + \tilde{B}u, \tag{17}$$

где

$$\tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x)s(x) \\ f_2(x)s(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выясним, при каких условиях на функцию $s(x)$ распределение $\Delta = \operatorname{span}\{\tilde{\mathbf{B}}, \operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{B}}\}$, порожденное векторными полями $\mathbf{B}$, $\operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{B}}$ преобразованной системы (17), инволютивно в окрестности заданной точки $x^0 \subset O$.

Пусть

$$\operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{B}}(x^0) \neq 0$$

(отметим, что это условие является необходимым для невырожденности матрицы управляемости системы (17) в некоторой окрестности точки x^0). Тогда необходимым и достаточным условием инволютивности распределения Δ в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки x^0 является выполнение в этой окрестности равенства

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial(s(x)f_1(x^0))}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2(s(x)f_1(x))}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial(s(x)f_2(x))}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2(s(x)f_2(x))}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$F_1 = \frac{\partial(s(x)f_1(x))}{\partial x_3}, \quad F_2 = \frac{\partial(s(x)f_2(x))}{\partial x_3}.$$

В этих обозначениях условие (18) имеет вид

$$F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x_3} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0.$$

Записанное равенство в предположении, что $F_1(x) \neq 0$, $x \in O(x^0)$, эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) означает, что функция F_2/F_1 не зависит от x_3, т.е. для некоторой функции $\tilde{f}(x_1, x_2)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial(s(x)f_2(x))}{\partial x_3} = \frac{\partial(s(x)f_1(x))}{\partial x_3}\tilde{f}(x_1, x_2), \tag{20}$$

Для учета соображений симметрии функцию $\tilde{f}$ представим в следующем виде

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = -\frac{\alpha_1(x_1, x_2)}{\alpha_2(x_1, x_2)}.$$

Тогда равенство (20) можно записать в виде

$$\frac{\partial(s(x)f_2(x))}{\partial x_3}\alpha_2(x_1, x_2) + \frac{\partial(s(x)f_1(x))}{\partial x_3}\alpha_1(x_1, x_2) = 0. \tag{21}$$

Проинтегрировав (21) по x_3, получим

$$s(x)\alpha_2 f_2(x) + s(x)\alpha_1 f_1(x) = c(x_1, x_2),$$

откуда следует, что функция $s(x)$ имеет следующее представление:

$$s(x) = \frac{c(x_1, x_2)}{\alpha_1(x_1, x_2)f_1(x) + \alpha_2(x_1, x_2)f_2(x)},$$

или, более коротко

$$s = \frac{c}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}. \tag{22}$$

Из приведенных выкладок вытекает, что если выбрать функцию s по формуле (22), где c, α_1, α_2 не зависят от x_3, то будет выполняться условие (18), т.е. распределение Δ будет инволютивным.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x_1} = x_2 d(x), \quad \dot{x_2} = x_3 d(x), \quad \dot{x_3} = v. \tag{23}$$

В случае $d(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ система (23) не приводится к регулярному каноническому виду, так как для нее выполнено условие (16). Зададим $c(x_1, x_2) = x_2$, $\alpha_1(x_1, x_2) = 1$, $\alpha_2(x_1, x_2) = 0$. Тогда в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$s(x) = \frac{1}{d(x)}.$$

После перехода к новой независимой переменной τ система (23) принимает вид

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = u. \tag{24}$$

Таким образом, хотя исходная система в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ не приводилась к регулярному каноническому виду, преобразованная система (24) оказывается системой регулярного канонического вида в той же области.

Рассмотрим условия, при которых система (17) с функцией $s(x)$, имеющей вид (22), в некоторой окрестности данной точки x^0 преобразуется к каноническому виду. Для этого достаточно выполнения следующих условий:

1) $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{\mathbf{B}}(x^0) \neq 0$;

2) матрица управляемости $U = \left(\tilde{\mathbf{B}},\ \mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{\mathbf{B}},\ \mathrm{ad}^2_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{\mathbf{B}}\right)$ в точке x^0 невырождена.

При выполнении первого условия, как показано, распределение $\operatorname{span}\{\tilde{\mathbf{B}},\ \operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}}\}$ инволютивно, так что будут выполнены условия 1–2 из разд. 1, достаточные для того, чтобы система (17) приводилась к регулярному каноническому виду. Отметим, что первое условие необходимо для выполнения второго, поэтому можно ограничиться выполнением лишь второго условия.

Учитывая вид векторных полей $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, для системы (17) получаем

$$\operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}}(x) = k(x)\begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$k(x) = \frac{c(f'_{1x_3}f_2 - f'_{2x_3}f_1)}{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)^2}.$$

Условие $\operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}}(x^0) \neq 0$ эквивалентно выполнению в точке $x^0 \in \Omega$ неравенства $f'_{1x_3}f_2 - - f'_{2x_3}f_1 \neq 0$, что равносильно неравенству

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'_{x_3} \neq 0, \tag{25}$$

а также выполнению неравенства $c(x_1^0, x_2^0) \neq 0$ и одного из неравенств $\alpha_1(x^0) \neq 0$, $\alpha_2(x^0) \neq 0$.

Зададим

$$c = c(x_2), \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0,$$

тогда $s(x) = \dfrac{c}{f_1}$. Рассмотрим множество $O' \subset \Omega$, на котором функция $s(x)$ не имеет неустранимых особенностей. На этом множестве

$$\operatorname{ad}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}} = k\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \operatorname{ad}^2_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}(k)\frac{\partial}{\partial x_2} + k\Big[\tilde{\mathbf{A}},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big].$$

В результате

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k\dfrac{\partial c}{\partial x_2} \\ 0 & k & \tilde{\mathbf{A}}(k) - k\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{cf_2}{f_1}\right) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является вырожденной в каждой точке x^0, в которой $k(x^0) \neq 0$ и $\dfrac{\partial c(x^0)}{\partial x_2} \neq 0$.

Итак, если для системы (14) функции f_1 и f_2 в точке x^0 одновременно не обращаются в нуль и также верно условие (25), то можно подобрать такую замену времени $\dot{\tau} = s(x)$, что преобразованная система приводится к регулярному каноническому виду. Например, если $f_1(x^0) \neq 0$, то достаточно выбрать масштабирование времени $s(x)$ в виде (22), где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, а c — произвольная функция, зависящая только от переменной x_2 и удовлетворяющая условиям $c(x_2^0) \neq 0$, $c'(x_2^0) \neq 0$.

Заключение

Доказано, что при использовании интегрируемых замен независимой переменной (времени), аффинная система не приводится к каноническому виду. Получен вид масштабирующей функции, задающей неинтегрируемую замену независимой переменной, после выполнения которой аффинная система третьего порядка со скалярным управлением приводится к регулярному каноническому виду.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00733, 12-01-31303), Министерства образования и науки РФ (соглашение № 14.B37.21.0370) и Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 520 с.
2. Sampei M., Furuta K. On Time Scaling for Nonlinear Systems: Application to Linearization // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. Vol. 31, no. 5. P. 459-462. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104290.
3. Respondek W. Orbital Feedback Linearization of Single-Input Nonlinear Control Systems // Proceedings of IFAC NOLCOS'98. Enschede, The Netherlands, 1998. P. 499–504.
4. Guay M. An Algorithm for Orbital Feedback Linearization of Single-Input Nonlinear Affine Systems // Systems Control Letters. 1999. Vol. 38, no. 4–5. P. 271–281.
5. Fang B., Kalker G. Exact Linearization of Nonlinear Systems by Time Scale Transformation // Proceedings of the 2003 American Control Conference, 4–6 June 2003, Denver, Colorado, USA. IEEE, 2003. Vol. 4. P. 3555–3560. DOI: 10.1109/ACC.2003.1244097.
6. Guay M. Orbital Feedback Linearization of Multi-Input Control Affine Systems // Proceedings of the 2001 American Control Conference, 25–27 June 2001, Arlington, VA, USA. IEEE, 2001. Vol. 5. P. 3630–3635. DOI: 10.1109/ACC.2001.946198.
7. Kiss B., Szadecky-Kardoss E. On-Line Time-Scaling Control of a Kinematic Car with One Input // Proceedings of the 15-th Miditerranean Conference on Control and Automation. MED'07, 27–29 July 2007, Athens, Greece. IEEE, 2007. P. 1–6. DOI: 10.1109/MED.2007.4433947.
8. De Luca A., Oriolo G., Samson C. Feedback control of a nonholonomic car-like robot // In: Robot Motion Planning and Control / J.-P. Laumond (ed.). Springer, 1998. P. 171–253. (Ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). DOI: 10.1007/BFb0036073.
9. Гилимьянов Р.Ф., Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Управление движением колесного робота в задаче следования вдоль криволинейного пути // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. Т. 47, № 6. С. 158–165.

10. Hoffner K., Guay M. Geometries of Single-Input Locally Accessible Control Systems // Proceedings of the American Control Conference. ACC'09, 10–12 June 2009, St. Louis, MO. IEEE, 2009. P. 1480–1484. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160678.

11. Пестерев А.В. Синтез стабилизирующего управления в задаче следования колесного робота вдоль заданного пути // Автоматика и телемеханика. 2012. № 7. С. 25–39.

12. Respondek W., Pogromsky A., Nijmeijer H. Time Scaling for Observer Design with Linearizable Error Dynamics // Automatica. 2004. Vol. 40, no. 2. P. 277–285.

13. Wang Y., Lynch A. Multiple Time Scaling of a Multi-Output Observer Form // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. Vol. 55, iss. 4. P. 966–971. DOI: 10.1109/TAC.2010.2041616.

14. Rouchon P., Fliess M., Levine J. Flatness, Motion Planning and Trailers Systems // Proceedings of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control, 15–17 December 1993, San Antonio, USA. IEEE, 1993. Vol. 3. P. 2700–2705. DOI: 10.1109/CDC.1993.325686.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Affine system transformations to the canonical form using change of the independent variable

07, July 2013

DOI: 10.7463/0713.0571094

Kasatkina T. S.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
kasatkina_t_s@mail.ru

Change of the independent variable (time-scaling) gives an additional degree of freedom for equivalence conversions of dynamical systems. Affine system transformation to the canonical form is a standard technique in the design of nonlinear control systems. In this paper transformations of a stationary affine system to the canonical form, using time-scaling, were investigated. Integratable and non-integratable changes of the independent variable were considered. It was shown, that the affine system can't be transformed to the canonical form using integratable time-scaling. Conditions of the possibility of transformation to the regular canonical form using non-integratable time scaling were obtained for single-input affine systems of the third order.

References

1. Krasnosh'echenko V.I., Krishchenko A.P. *Neline'nye systemy: geometricheskie metodi analiza i sinteza* [Nonlinear Systems: geometrical methods of analyses and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.
2. Sampei M., Furuta K. On Time Scaling for Nonlinear Systems: Application to Linearization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, vol. 31, no. 5, pp. 459–462. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104290.
3. Respondek W. Orbital Feedback Linearization of Single-Input Nonlinear Control Systems. *Proceedings of IFAC NOLCOS'98*. Enschede, The Netherlands, 1998, pp. 499–504.
4. Guay M. An Algorithm for Orbital Feedback Linearization of Single-Input Nonlinear Affine Systems. *Systems Control Letters*, 1999, vol. 38, no. 4–5, pp. 271–281.
5. Fang B., Kalker G. Exact Linearization of Nonlinear Systems by Time Scale Transformation. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, 4–6 June 2003, Denver, Colorado, USA. IEEE, 2003, vol. 4, pp. 3555–3560. DOI: 10.1109/ACC.2003.1244097.

6. Guay M. Orbital Feedback Linearization of Multi-Input Control Affine Systems. *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, 25–27 June 2001, Arlington, VA, USA. IEEE, 2001, vol. 5, pp. 3630–3635. DOI: 10.1109/ACC.2001.946198
7. Kiss B., Szadecky-Kardoss E. On-Line Time-Scaling Control of a Kinematic Car with One Input. *Proceedings of the Miditerranean Conference on Control and Automation. MED'07*, 27–29 July 2007, Athens, Greece. IEEE, 2007, pp. 1–6. DOI: 10.1109/MED.2007.4433947.
8. De Luca A., Oriolo G., Samson C. Feedback control of a nonholonomic car-like robot. In: Laumond J.-P. (ed.). *Robot Motion Planning and Control*. Springer, 1998, pp. 171–253. (Ser. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*; vol. 229). DOI: 10.1007/BFb0036073.
9. Gilim'anov R.F., Pesterev A.V., Rapoport L.B. Upravlinie dvizheniem kolesnogo robota v zadache sledovania vdol' krivolineinogo puti [Motion Planning in the Tracking Problem]. *Izvestia RAN. Ser Teoria I systemu upravlenia* [Journal of Russian Academy Science. Ser. Control Systems and Theory], 2008, vol. 47, no. 6, pp. 158–165.
10. Hoffner K., Guay M. Geometries of Single-Input Locally Accessible Control Systems. *Proceedings of the American Control Conference. ACC'09*, 10–12 June 2009, St. Louis, MO. IEEE, 2009, pp. 1480–1484. DOI: 10.1109/ACC.2009.5160678.
11. Pesterev A.V. Sintez stabiliziruyuch'ego upravlenya v zadache sledovan'ya kolesnogo robota vdol' zadannogo puty [Synthesis of a stabilizing control for a wheeled robot following a curvilinear path]. *Avtomatika I telemehanika*, 2012, no. 7, pp. 25–39. (Trans. version: *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, iss. 7, pp. 1134–1144. DOI: 10.1134/S000511791207003X.)
12. Respondek W., Pogromsky A., Nijmeijer H. Time Scaling for Observer Design with Linearizable Error Dynamics. *Automatica*, 2004, vol. 40, no. 2, pp. 277–285.
13. Wang Y., Lynch A. Multiple Time Scaling of a Multi-Output Observer Form. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2010, vol. 55, iss. 4, pp. 966–971. DOI: 10.1109/TAC.2010.2041616.
14. Rouchon P., Fliess M., Levine J. Flatness, Motion Planning and Trailers Systems. *Proceedings of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control*, 15–17 December 1993, San Antonio, USA. IEEE, 1993, vol. 3, pp. 2700–2705. DOI: 10.1109/CDC.1993.325686.