

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Терминальное управление процессами в химических реакторах методом орбитальной линеаризации

10, октябрь 2013

DOI: 10.7463/1013.0612563

Касаткина Т. С., Крищенко А. П.

УДК 517.938

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
kasatkina_t_s@mail.ru

Введение

Порционные реакторы широко используются в современной индустрии для получения одних веществ из других с помощью химических реакций. В реакторе может протекать несколько химических реакций, и при их описании часто используют относительные концентрации веществ в их общей смеси. Важной характеристикой процессов, протекающих в реакторе, является температура. Ее поддержка в нужном диапазоне важна как для химических реакций, так и для нахождении порционного реактора в рабочем состоянии.

Поиск режимов работы порционных реакторов приводит к задачам терминального управления, включающим ограничения на состояние и управление. Одна из таких задач рассмотрена в настоящей работе. Ее особенностью является то, что система дифференциальных уравнений с управлением, описывающая процесс, протекающий в порционном реакторе, не является управляемой, а начальные и конечные значения заданы для всего вектора состояния. Предложенное решение основано на переходе в этой системе от старой независимой переменной (времени) к новой и последующем преобразованию системы к нестационарному каноническому виду. Такое преобразование системы с управлением можно рассматривать как распространение метода орбитальной линеаризации на более широкий класс аффинных систем путем использования нестационарной линеаризации обратной связью.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 сформулирована постановка задачи. В разд. 3 описано преобразование системы дифференциальных уравнений с управлением к некоторому каноническому виду методом орбитальной линеаризации. В разд. 4 с помощью этого преобразования исходная терминальная задача трансформируется в терминальную задачу для системы канонического вида, которая в разд. 2 и 5 анализируется и решается.

В разд. 6 приведены результаты численного моделирования процесса управления. В заключении приведено краткое обсуждение полученных результатов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим порционный реактор, в котором исходное вещество A превращается в вещество B , которое затем превращается в вещество C . Математическая модель такого порционного реактора может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений [1, 2, 3, 4]:

$$\begin{cases} \dot{C}_A = -k_1(T)C_A^2, \\ \dot{C}_B = k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B, \\ \dot{T} = \gamma_1 k_1(T)C_A^2 + \gamma_2 k_2(T)C_B + a_0 + a_1 T + (b_0 + b_1 T)v, \end{cases} \quad (1)$$

где C_A, C_B — относительная концентрация веществ A и B в смеси в порционном реакторе; T — абсолютная температура; $\gamma_1, \gamma_2, a_0, a_1, b_0, b_1$ — постоянные коэффициенты; v — управление (безразмерное). В системе (1) точка означает дифференцирование по времени $t \in [0; \infty)$, т.е. $(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dt}$.

Коэффициенты $k_1(T)$ и $k_2(T)$, характеризующие скорости протекания химических реакций, вычисляются по формулам

$$k_1(T) = A_{10}e^{-E_1/(RT)}, \quad k_2(T) = A_{20}e^{-E_2/(RT)}.$$

где E_1, E_2 — энергии активации (некоторые постоянные); R — универсальная газовая постоянная.

Обозначим через $x = (C_A, C_B, T)$ вектор переменных состояния системы (1). Из физического смысла переменных состояния и реализуемости технологического процесса следует, что допустимые состояния системы (1) образуют множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3 = \{(C_A, C_B, T)\}$, заданное неравенствами

$$0 < C_A < 1, \quad 0 < C_B < 1, \quad C_A + C_B \leqslant 1, \quad 0 < T_{\min} < T < T_{\max}, \quad \dot{C}_B > 0, \quad (2)$$

где последнее неравенство в силу системы (1) эквивалентно условию $k_1(T)C_A^2 - k_2(T)C_B > 0$ и выражает дополнительное требование к динамике процесса управления, целью которого является получение вещества B .

Пусть для системы (1) заданы граничные условия

$$x|_{t=0} = x_0 = (C_{A0}, C_{B0}, T_0) \in \Omega, \quad x|_{t=t_*} = x_* = (C_{A*}, C_{B*}, T_*) \in \Omega, \quad (3)$$

и требуется найти управление v , которое в множестве Ω переводит систему (1) из начального положения x_0 в конечное положение x_* за некоторое конечное время t_* .

2. Необходимые условия существования решения терминальной задачи

Обозначим сумму относительных концентраций веществ A и B в момент времени t через $e(t)$. Из первых двух уравнений системы (1) следует, что

$$\dot{e}(t) = \dot{C}_A + \dot{C}_B = -k_2(T)C_B < 0.$$

Следовательно, функция $e(t)$ убывает вдоль траектории системы при любом управлении. Это отражает тот факт, что в системе (1) параллельно основной реакции, в которой из вещества A образуется вещество B , идет химическая реакция, в которой из вещества B образуется вещество C . Поэтому в конечном состоянии всегда выполнено условие

$$e(t_*) < e(0),$$

которое дает необходимое условие существования решения терминальной задачи

$$C_{A*} + C_{B*} < C_{A0} + C_{B0}. \quad (4)$$

Аналогично из первого уравнения системы (1) следует, что $\dot{C}_A < 0$. Поэтому C_A убывает вдоль траектории системы при любом управлении. В частности, для граничных значений должно выполняться неравенство

$$C_{A*} < C_{A0}. \quad (5)$$

Еще одно необходимое условие существования решения терминальной задачи следует из физического смысла переменных C_A и C_B :

$$e(0) = C_{A0} + C_{B0} \leqslant 1. \quad (6)$$

Далее будет предполагаться, что неравенства (4)–(6) выполнены для граничных условий (3).

Поскольку неравенство (6) предполагается выполненным, то третье условие в (2) выполняется вдоль любой траектории, выходящей из начального состояния.

3. Орбитальная линеаризация

Система (1) является аффинной. Один из методов решения терминальных задач для аффинных систем основан на их преобразовании к регулярному каноническому виду [5].

Далее будем считать, что $E_1 < E_2$. При $E_1 \neq E_2$ система (1) не преобразуется к каноническому виду. Поэтому для решения терминальной задачи для системы (1) воспользуемся методом орбитальной линеаризации [1, 6].

Выполним в системе (1) замену переменной t . Используем новую независимую переменную τ , которая связана с временем t соотношениями

$$\frac{d\tau}{dt} = k_1(T)C_A^2 \quad (7)$$

и $\tau = 0$ при $t = 0$. Это интегрируемая замена независимой переменной в области $C_A > 0$ [7], поскольку, во-первых, в этой области $\dot{\tau} > 0$, а во-вторых, $\dot{\tau} = -\dot{C}_A$ и поэтому с учетом начального условия в (3) $\tau = C_{A0} - C_A$.

Переменную τ называют масштабированным временем, а $\frac{1}{k_1(T)C_A^2}$ — функцией масштабирования времени [1].

После перехода в системе (1) к новой независимой переменной τ получается система, эквивалентная аффинной нестационарной системе второго порядка. Действительно, выполнив в системе (1) замену (7) независимой переменной, получим

$$\begin{cases} C'_A = -1, \\ C'_B = 1 - \frac{k_2(T)C_B}{k_1(T)C_A^2}, \\ T' = u, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$u = \frac{\gamma_1 k_1(T)C_A^2 + \gamma_2 k_2(T)C_B + a_0 + a_1 T + (b_0 + b_1 T)v}{k_1(T)C_A^2} \quad —$$

новое управление, а штрих обозначает дифференцирование по масштабируемому времени τ , т.е. $(.)' = \frac{d(.)}{d\tau}$.

Поскольку

$$C_A = C_{A0} - \tau, \quad \tau \in [0, C_{A0}), \quad (9)$$

то из второго и третьего уравнения системы (8) получаем двумерную нестационарную систему

$$C'_B = 1 - \frac{k_2(T)C_B}{k_1(T)(C_{A0} - \tau)^2}, \quad T' = u \quad (10)$$

с множеством допустимых состояний $\hat{\Omega}$ в расширенном пространстве состояний $\mathbb{R}^3 = \{(C_B, T, \tau)\}$. Согласно (2) множество $\hat{\Omega}$ задано неравенствами

$$0 \leq \tau < C_{A0}, \quad 0 < C_B < 1, \quad C_{A0} - \tau + C_B \leq 1, \quad T_{\min} < T < T_{\max}, \quad C'_B > 0. \quad (11)$$

Покажем, что система (10) преобразуется к каноническому виду в некоторой области ее расширенного пространства состояний [5]. Система функций

$$\begin{cases} y = C_B, \\ y' = 1 - \frac{k_2(T)C_B}{k_1(T)(C_{A0} - \tau)^2}, \\ \tau = \tau \end{cases} \quad (12)$$

задает отображение Φ , сохраняющее независимую переменную, из множества $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 = \{(C_B, T, \tau)\}$ в $\mathbb{R}^3 = \{(y, y', \tau)\}$.

Обратное отображение $\Psi = \Phi^{-1}$ имеет вид

$$\begin{cases} C_B = y, \\ T = \frac{E_1 - E_2}{R(\ln(A_{10}(1 - y')(C_{A0} - \tau)^2) - \ln(A_{20}y))}, \\ \tau = \tau. \end{cases} \quad (13)$$

Оно определено в области $\Omega_y = \Phi(\hat{\Omega})$, заданной неравенствами

$$0 \leq \tau < C_{A0}, \quad 0 < y < 1, \quad C_{A0} - \tau + y \leq 1, \quad \psi_-(y, \tau) < y' < \psi_+(y, \tau), \quad y' > 0, \quad (14)$$

где двойное неравенство относительно y' связано с ограничением на температуру, в котором

$$\psi_-(y, \tau) = 1 - \frac{A_{20}y}{A_{10}(C_{A0} - \tau)^2} e^{\frac{E_1 - E_2}{RT_{\min}}}, \quad \psi_+(y, \tau) = 1 - \frac{A_{20}y}{A_{10}(C_{A0} - \tau)^2} e^{\frac{E_1 - E_2}{RT_{\max}}} < 1.$$

В результате получаем, что отображение $\Phi : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_y$ является диффеоморфизмом, а аффинная система (10) на множестве $\hat{\Omega}$ эквивалентна системе канонического вида на множестве Ω_y . Для ее нахождения выполним в системе (10) замену переменных (12). В результате получаем уравнение

$$y'' = f(\bar{y}, \tau) + g(\bar{y}, \tau)u, \quad \bar{y} = (y, y'), \quad (\bar{y}, \tau) \in \omega_y. \quad (15)$$

где

$$f(\bar{y}, \tau) = -\frac{k_2(T)}{k_1(T)} \left(\frac{y'}{(C_{A0} - \tau)^2} + \frac{2y}{(C_{A0} - \tau)^3} \right), \quad g(\bar{y}, \tau) = \frac{(1 - y')(E_1 - E_2)}{RT^2},$$

а температура T определяется вторым равенством в (13). В системе канонического вида (15) коэффициент при управлении в области Ω_y не обращается в нуль, т.е. она регулярна в этой области.

4. Переформулировка терминалльной задачи

Диффеоморфизм Φ позволяет сформулировать для системы канонического вида (15) эквивалентную терминалльную задачу: найти программное управление u , которое переводит систему (15) в множество Ω_y из начального положения

$$(\bar{y}_0, 0) = \Phi(C_{B0}, T_0, 0) \quad (16)$$

при $\tau = 0$ в конечное положение

$$(\bar{y}_*, \tau_*) = \Phi(C_{B*}, T_*, \tau_*), \quad (17)$$

при $\tau = \tau_* = C_{A0} - C_{A*}$.

Для упрощения задачи изменим ограничения (14) на состояния. Не будем учитывать третье условие, поскольку оно выполнено вдоль любой траектории системы при сделанных в разд. 2 предположениях. Второе условие заменим на $0 < y_{\min} = \frac{A_{10}}{A_{20}} < y < 1$, а два последних условия — на $0 < y' < 1$. При этом исходное ограничение на температуру вдоль траекторий системы может нарушаться и его учет при решении терминалльной задачи нужно проверять и обеспечивать дополнительно.

Учитывая вышесказанное, приходим к задаче терминалльного управления для системы канонического вида (15), регулярной на множестве допустимых состояний $\hat{\Omega}_y$, заданном неравенствами

$$0 \leq \tau < C_{A0}, \quad y_{\min} < y < 1, \quad 0 < y' < 1, \quad (18)$$

при краевых условиях $(\bar{y}_0, 0), (\bar{y}_*, \tau_*) \in \Omega_y$.

Отметим, что отображение Φ^{-1} , определяемое соотношениями (13), является диффеоморфизмом множества $\hat{\Omega}_y$ на множество $\Phi^{-1}(\hat{\Omega}_y)$, причем величина T в области $\hat{\Omega}_y$ принимает только положительные значения.

5. Решение терминальной задачи

Каждое решение терминальной задачи, сформулированной в предыдущем разделе, определяет дугу непрерывной кривой $y' = \psi(y)$ на фазовой плоскости yOy' , которая содержится в области

$$y_{\min} < y < 1, \quad 0 < y' < 1 \quad (19)$$

и соединяет начальное состояние \bar{y}_0 с конечным состоянием \bar{y}_* . Этую дугу можно задать параметрически

$$y = \xi(\tau), \quad y' = \xi'(\tau) = \psi(\xi(\tau)),$$

где функция $y = \xi(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_*]$, является решением задачи Коши $y' = \psi(y)$, $y|_{\tau=0} = y_0$.

Движение по дуге реализуется программным управлением

$$u(\tau) = \frac{\frac{d\psi(\xi(\tau))}{d\xi}\psi(\xi(\tau)) - f(\xi(\tau), \psi(\xi(\tau)), \tau)}{g(\xi(\tau), \psi(\xi(\tau)), \tau)}. \quad (20)$$

Масштабированное время движения по дуге можно найти интегрированием дифференциального уравнения $y' = \psi(y)$:

$$\tau_* = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi(y)}.$$

Функцию $\psi(y)$ будем искать в виде

$$\psi(y) = \psi_c(y) = ky + b + cd(y), \quad (21)$$

где функция $d(y) \in C^1[y_0, y_*]$ равна нулю на концах отрезка $[y_0, y_*]$, а коэффициенты

$$k = \frac{y'_* - y'_0}{y_* - y_0}, \quad b = \frac{y'_0 y_* - y'_* y_0}{y_* - y_0}$$

выбраны так, что при $c = 0$ график функции $y' = \psi_0(y)$ представляет собой прямую на фазовой плоскости, проходящую через начальное состояние \bar{y}_0 и конечное состояние \bar{y}_* . Отрезок этой прямой, заключенный между граничными состояниями, содержится в открытой области (19). Поэтому существуют такие c_- и c_+ , $c_- < 0 < c_+$, что при всех $c \in (c_-, c_+)$ дуга кривой $\psi_c(y) = ky + b + cd(y)$, заключенная между граничными точками, тоже содержится в области (19). Масштабированное время $\tau(c)$ движения по этой дуге зависит от параметра c согласно формуле

$$\tau(c) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_c(y)}.$$

Если уравнение $\tau(c) = \tau_*$ имеет решение $c = c_* \in (c_-, c_+)$, то мы имеем дугу кривой $\psi(y) = \psi_{c_*}(y)$, время движения по которой совпадает с τ_* ; при этом управление (20) для $\psi_{c_*}(y)$ имеет вид

$$u_{c_*}(\tau) = \frac{\frac{d\psi_{c_*}(\xi(\tau))}{d\xi}\psi_{c_*}(\xi(\tau)) - f(\xi(\tau), \psi_{c_*}(\xi(\tau)), \tau)}{g(\xi(\tau), \psi_{c_*}(\xi(\tau)), \tau)}. \quad (22)$$

Управление (22) переводит систему (15) из начального состояния (16) в конечное состояние (17) по траектории $y = y(\tau) = \xi(\tau)$, $y' = y'(\tau) = \psi_{c_*}(\xi(\tau))$, $\tau \in [0, \tau_*]$. Таким образом, для системы канонического вида найдено программное движение $(u_{c_*}(\tau), \xi(\tau), \psi_{c_*}(\xi(\tau)))$, содержащееся в области регулярности. Это позволяет получить управление в виде обратной связи, обеспечивающее динамику переходных процессов в отклонениях от программной траектории в соответствии с уравнением

$$y'' - y''(\tau) + c_1(y' - y'(\tau)) + c_0(y - y(\tau)) = 0,$$

где $c_1 > 0$, $c_0 > 0$. При таком выборе постоянных c_1 , c_0 программная траектория является асимптотически устойчивым решением этого уравнения. Указанное управление имеет вид [5]

$$u = u_s = \frac{\frac{d\psi_{c_*}(\xi(\tau))}{d\xi}\psi_{c_*}(\xi(\tau)) - f(\bar{y}, \tau) - c_1(y' - y'(\tau)) + c_0(y - y(\tau))}{g(\bar{y}, \tau)}. \quad (23)$$

Управлению (23) соответствует исходное управление v для системы (1)

$$v = v_s = \frac{k_1(T)C_A^2 u_s - \gamma_1 k_1(T)C_A^2 - \gamma_2 k_2(T)C_B - a_0 - a_1 T}{b_0 + b_1 T} \quad (24)$$

Поскольку $\tau = C_{A0} - C_A$, то управление v_s записано в виде обратной связи, так как зависит только от текущего состояния $x = (C_A, C_B, T)$ системы (1) и граничных условий. Полученное управление (24) является решением терминальной задачи (3) для системы (1), если выполнены ограничения на температуру и нет ограничений на управление v .

В рассматриваемом порционном реакторе технически реализуемыми управлениями являются температура подаваемого пара и коэффициент передачи тепла окружающей обмотки. Их наибольшие и наименьшие значения выбираются из технологических соображений или ограничений, продиктованных надежностью. С помощью этих управлений можно реализовать только те значения v , которые принадлежат отрезку $[0, 1]$. Отметим, что $v = 0$ означает наибольшую скорость охлаждения смеси, $v = 1$ — наибольшую скорость ее нагревания. Для учета ограничения $v \in [0, 1]$ можно использовать управление

$$v = v_* = \begin{cases} 0, & v_s < 0; \\ v_s, & v_s \in [0; 1]; \\ 1, & v_s > 1. \end{cases} \quad (25)$$

Случай 1. Пусть при численном моделировании управление (24) не выходит за ограничения, т.е. $v_* = v_s$. Тогда траектория системы в фазовых переменных y , y' удовлетворяет уравнению $y' = \psi_{c_*}(y)$ и из начального состояния попадает в конечное при $\tau = \tau_*$. Поэтому время t_* , требующееся для перевода системы из начального состояния в конечное, равно $t|_{\tau=\tau_*}$ и может быть найдено путем численного интегрирования на отрезке $[0; \tau_*]$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{k_1(T)(C_{A0} - \tau)^2}, \\ \frac{dy}{d\tau} = \psi_{c_*}(y), \end{cases} \quad (26)$$

где

$$T = \frac{E_1 - E_2}{R(\ln(A_{10}(1 - \psi_{c_*}(y))(C_{A0} - \tau)^2) - \ln(A_{20}y))},$$

при начальном условии $t|_{\tau=0} = 0$, $y|_{\tau=0} = y_0$. Если при численном моделировании температура оставалась в заданных границах, то управление является искомым решением терминальной задачи.

Случай 2. Пусть при численном моделировании управление (24) в какой-то момент времени выходит за ограничения. Тогда значения управлений v_* и v_s становятся разными и траектория системы в фазовых переменных y , y' смещается с кривой $y' = \psi_{c_*}(y)$. Если затем, с некоторого момента времени управление (24) опять удовлетворяет ограничениям, то траектория системы в фазовых переменных y , y' будет приближаться к кривой $y' = \psi_{c_*}(y)$, что обеспечивается при нахождении управления (23) на этапе стабилизации. Если в результате в некоторый момент времени \hat{t}_* траектория системы попадает в окрестность состояния x_* , определяемую допустимой погрешностью решения терминальной задачи, то остается проверить, как в случае 1, выполнение ограничений по температуре.

Если не выполнены ограничения по температуре или погрешность решения терминальной задачи не является допустимой, то в алгоритм вычисления управления (25) можно внести следующие изменения: а) задать другие значения постоянных $c_{1,0}$ в управлении (23); б) выбрать другую функцию $d(y)$.

В качестве функции $d(y)$ можно фиксировать, например, функцию $(y - y_0)^\alpha(y_* - y)^\beta$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ или $\operatorname{arctg}(\alpha(y - y_0)) \operatorname{arctg}(\beta(y_* - y))$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Если фиксированная функция $d(y)$ неотрицательна на отрезке $[y_0, y_*]$, то для существования решения уравнения $\tau(c) = \tau_*$ в интервале (c_-, c_+) достаточно выполнения условия $\tau_* \in (\tau(c_+), \tau(c_-))$. Параметры функции $d(y)$ типа α , β могут использоваться для выполнения ограничений на температуру, управление или для улучшения характеристик переходных процессов.

6. Результаты численного моделирования

Рассмотрим систему (1) при следующих значениях параметров [2, 3, 4]

$$\begin{aligned} A_{10} &= 1,1 \text{ c}^{-1}; & a_0 &= 4,3145 - a_1 273,15 \text{ K} \cdot \text{c}^{-1}, \\ A_{20} &= 172,2 \text{ c}^{-1}; & b_1 &= 0,0515 \text{ c}^{-1}, \\ E_1 &= 20900 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}; & b_0 &= 1,4962 - b_1 273,15 \text{ K} \cdot \text{c}^{-1}, \\ E_2 &= 41800 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}; & \gamma_0 &= 41,8 \text{ K} \cdot \text{c}^{-1}, \\ a_1 &= -0,1099 \text{ c}^{-1}, & \gamma_1 &= 83,6 \text{ K} \cdot \text{c}^{-1}. \end{aligned}$$

Пример 1. Пусть заданы граничные условия

$$x_0 = (0,993, 0,007, 298), \quad x_* = (0,693, 0,3, 333), \quad (27)$$

которые удовлетворяют необходимым условиям (4)–(6) существования решения терминальной задачи.

Фиксируем функцию $d(y)$ в виде

$$d(y) = (y - y_0)(y_* - y). \quad (28)$$

В этом случае $c_- = -38,48$, $c_+ = 0,67$. На рис. 1 представлена зависимость масштабированного времени движения по кривой $y' = \psi_c(y)$ от параметра c .

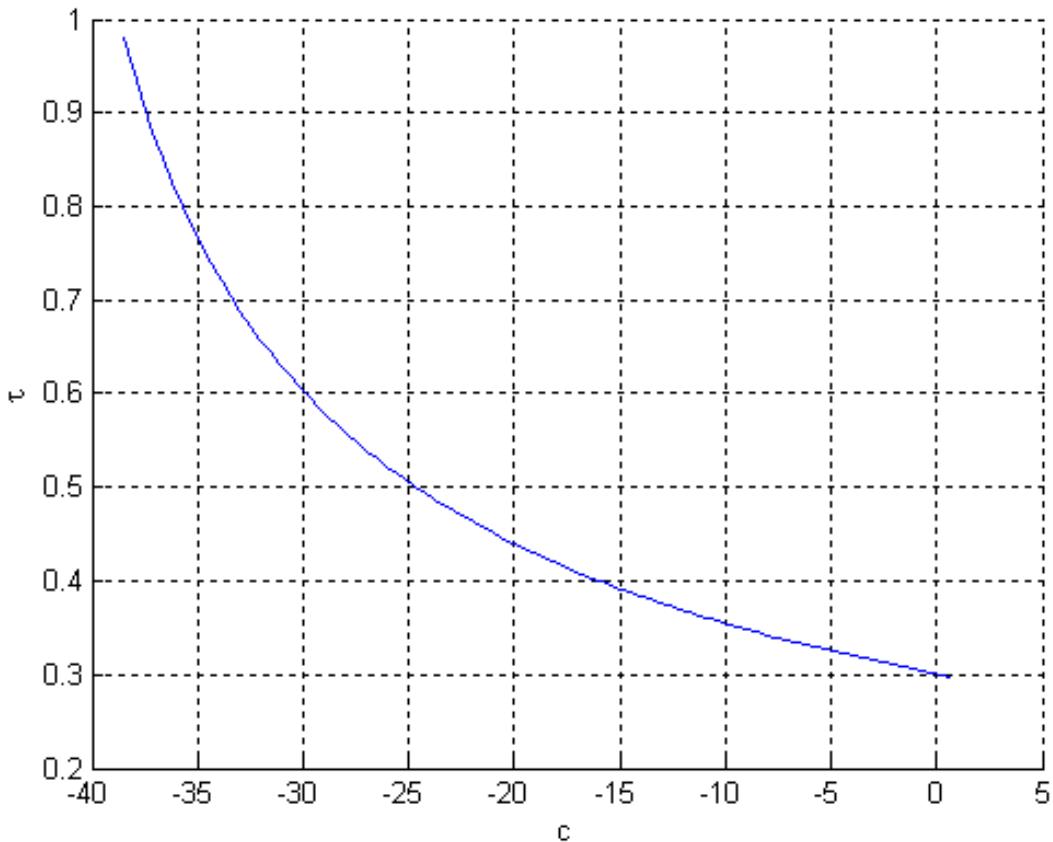


Рис. 1. Зависимость масштабированного времени τ от параметра c

Значение $\tau(c)$ лежит в диапазоне $[0,2978; 0,9791]$, а в соответствии с граничными условиями (27) $\tau_* = 0,3$. Следовательно, существует решение c_* уравнения $\tau(c) = \tau_*$, которое найдено численно и равно $c_* = 0,2094$. Время $t_* = 676$ с и найдено путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (26).

При вычислении управления в виде обратной связи для системы канонического вида использованы значения $c_1 = 1$, $c_0 = 0,25$.

В ходе математического моделирования оказалось, что значения управления v_s не выходят за ограничения.

На рис. 2–6 приведены результаты численного моделирования в виде графиков зависимостей от времени переменных состояния системы и управлений при $c = c_*$.

При $t = t_* = 676$ в результате моделирования было получено конечное состояние системы $(0,6929, 0,3002, 333,1451)$, что демонстрирует приемлемую точность решения поставленной терминальной задачи.

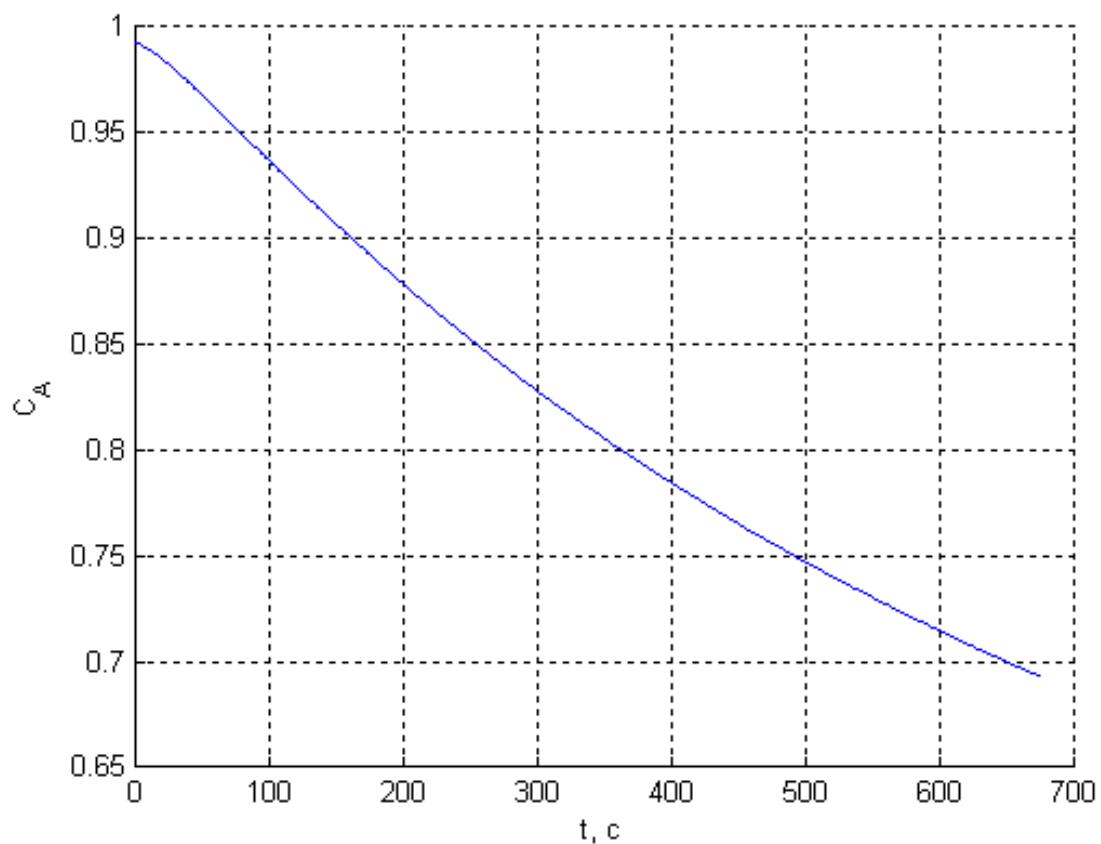


Рис. 2. Зависимость концентрации вещества A от времени t при $c = 0,2094$

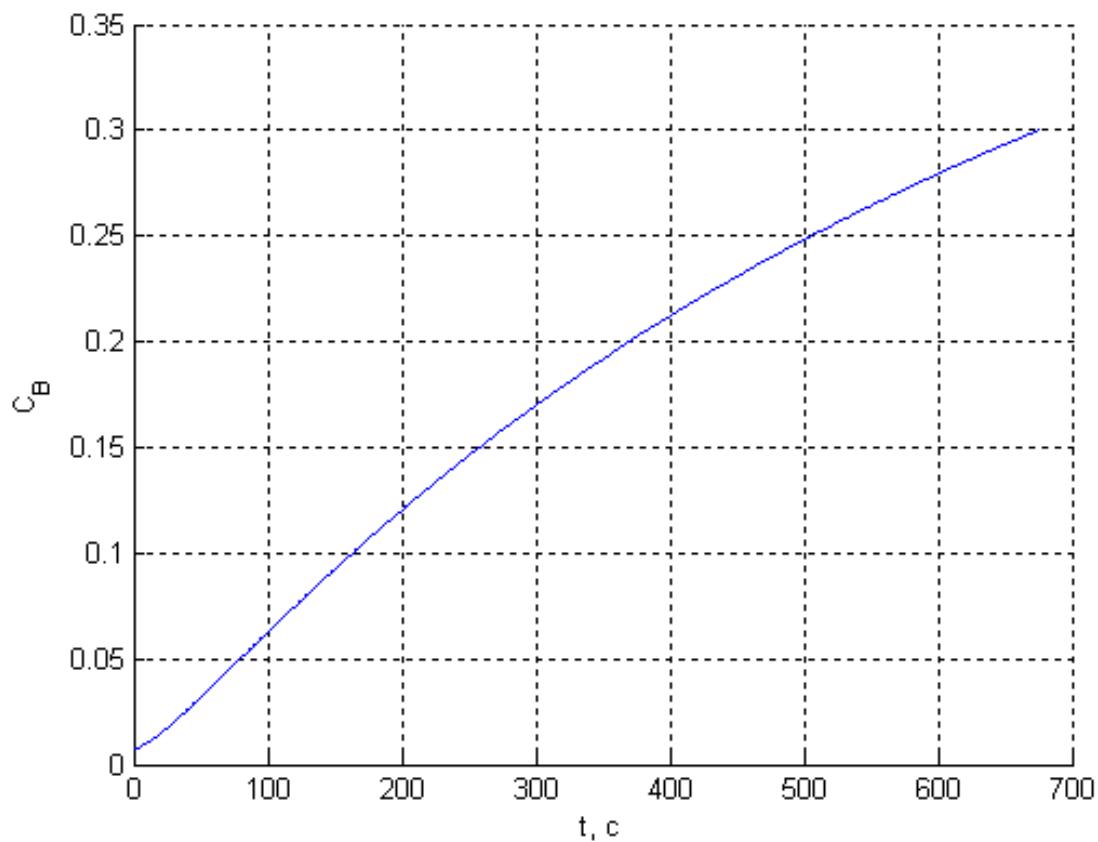


Рис. 3. Зависимость концентрации вещества B от времени t при $c = 0,2094$

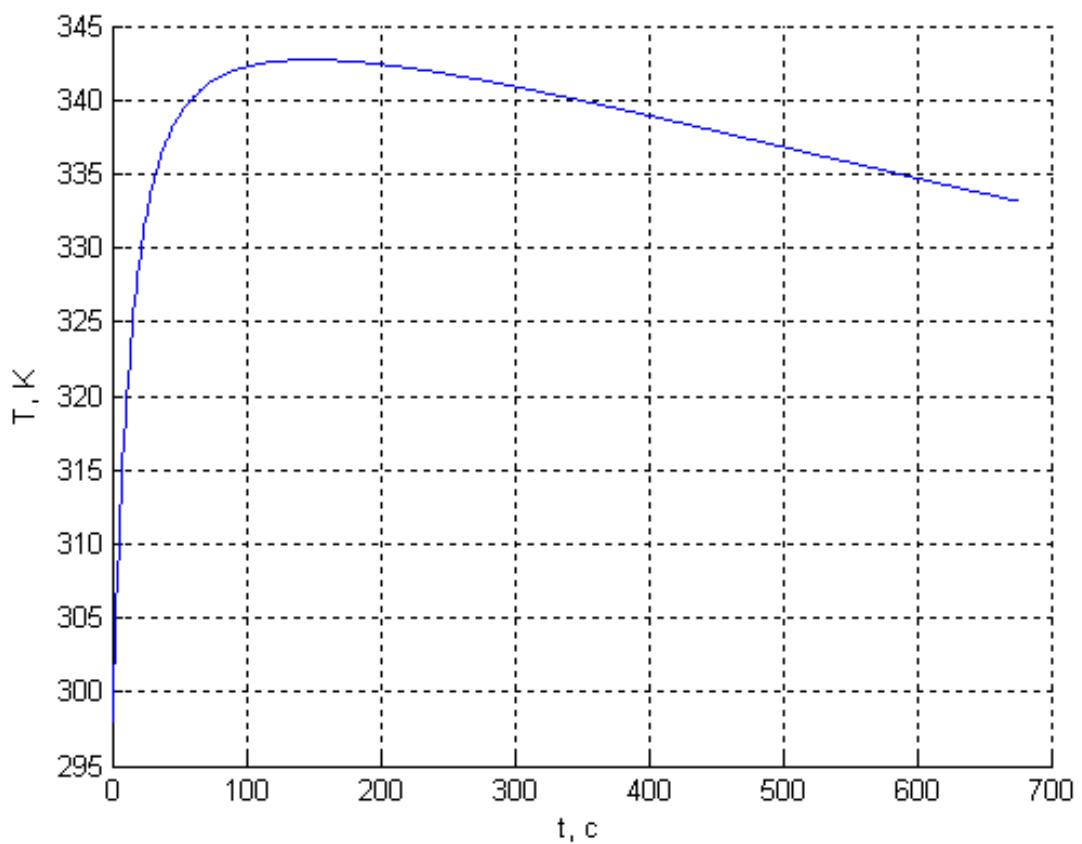


Рис. 4. Зависимости температуры T от времени t при $c = 0,2094$

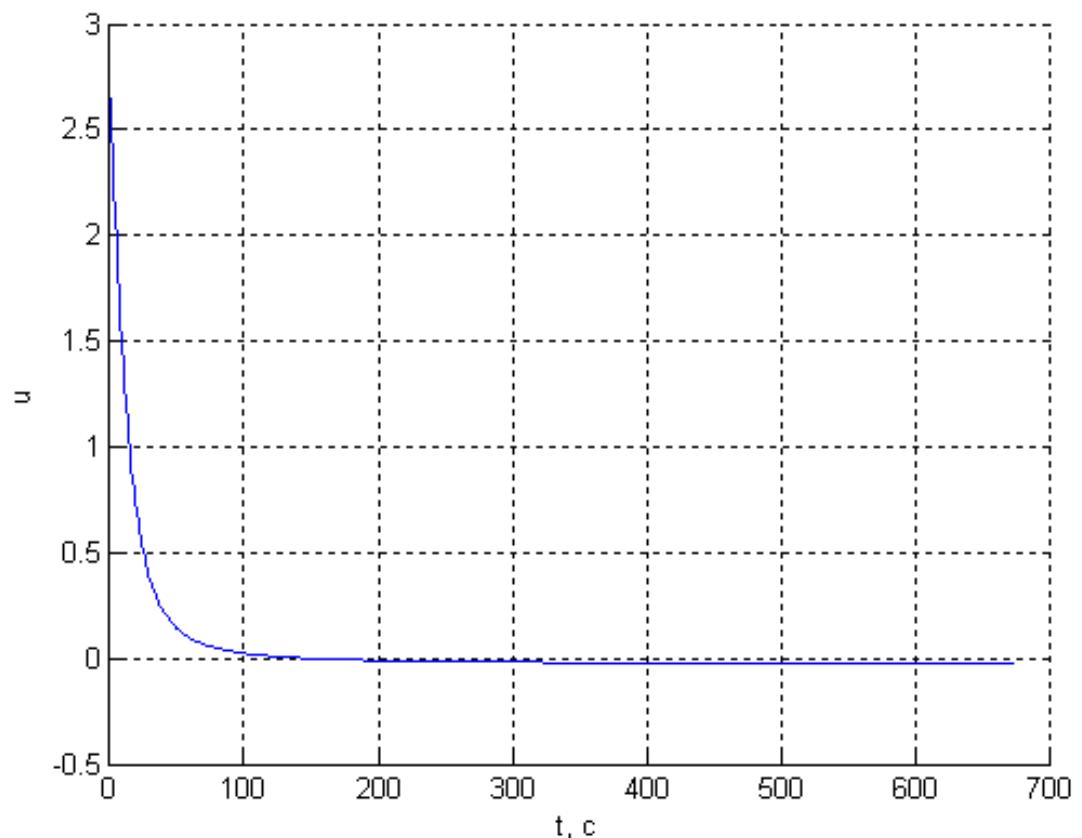


Рис. 5. Зависимости управления u от времени t при $c = 0,2094$

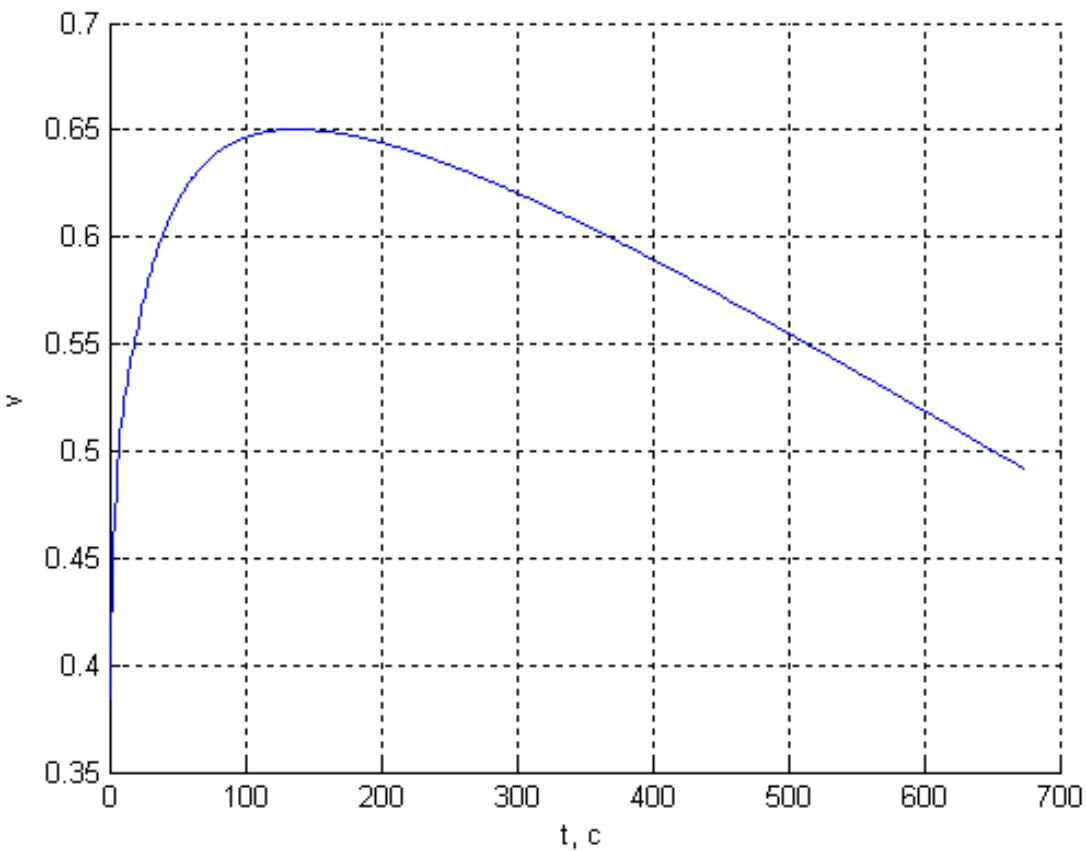


Рис. 6. Зависимость управления v от времени t при $c = 0,2094$

Пример 2. Рассмотрим граничные условия

$$x_0 = (0,993, 0,007, 298), \quad x_* = (0,35, 0,55, 333), \quad (29)$$

также удовлетворяющие необходимым условиям (4)–(6) существования решения терминальной задачи.

В этом случае $c_- = -10,94$, $c_+ = 1,3$. На рис. 7 представлена зависимость масштабированного времени движения по кривой $y' = \psi_c(y)$ от параметра c .

Значение $\tau(c)$ лежит в диапазоне $[0,627; 0,9883]$, в соответствии с граничными условиями (27) $\tau_* = 0,643$. Следовательно, существует решение c_* уравнения $\tau(c) = \tau_*$, которое равно $c_* = 0,8104$.

В ходе численного моделирования использовались значения $c_1 = 1$, $c_0 = 0,25$. Анализ результатов моделирования показывает, что управление v_s выходит за ограничения, но при $\hat{t}_* = 2985$ система находилась в состоянии $(0,393, 0,55, 334,7)$. Следовательно, по переменной C_B граничная задача решена точно, конечное значение C_A отличается от заданного значения C_{A*} на 0,043, а конечное значение температуры T — на 1,7°C.

На рис. 8–12 приведены результаты численного моделирования в виде графиков зависимостей от времени переменных состояния системы и управлений.

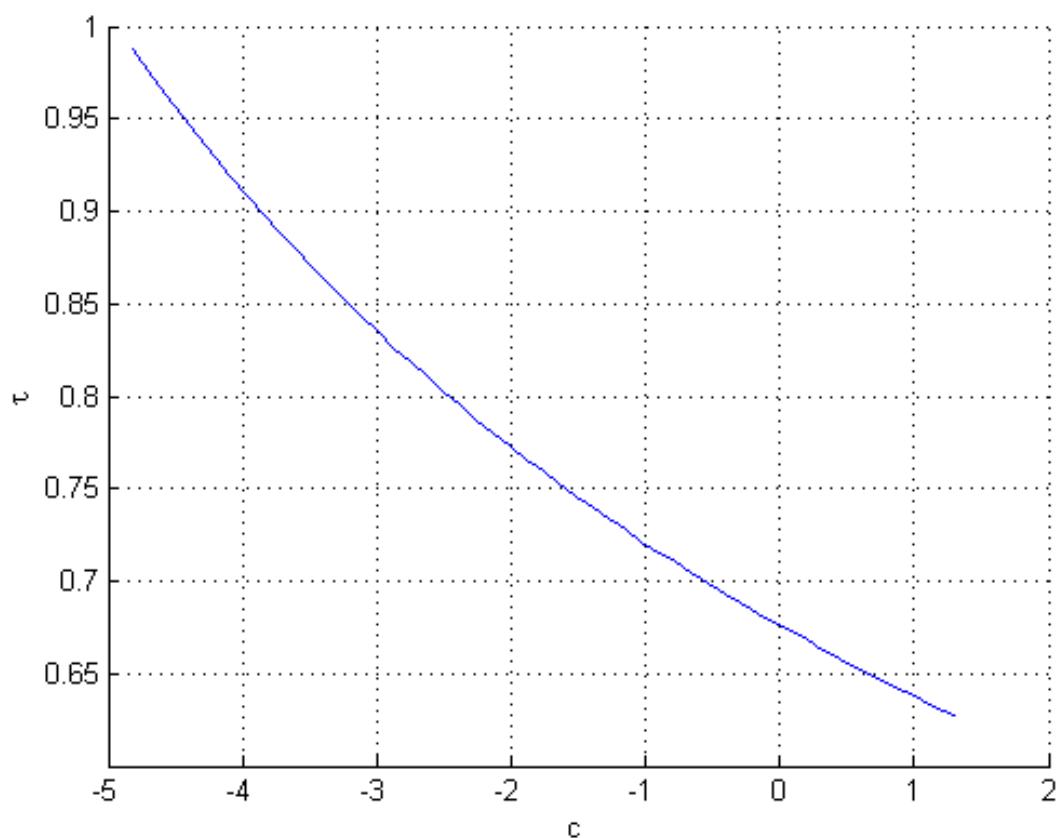


Рис. 7. Зависимость масштабированного времени τ от параметра c

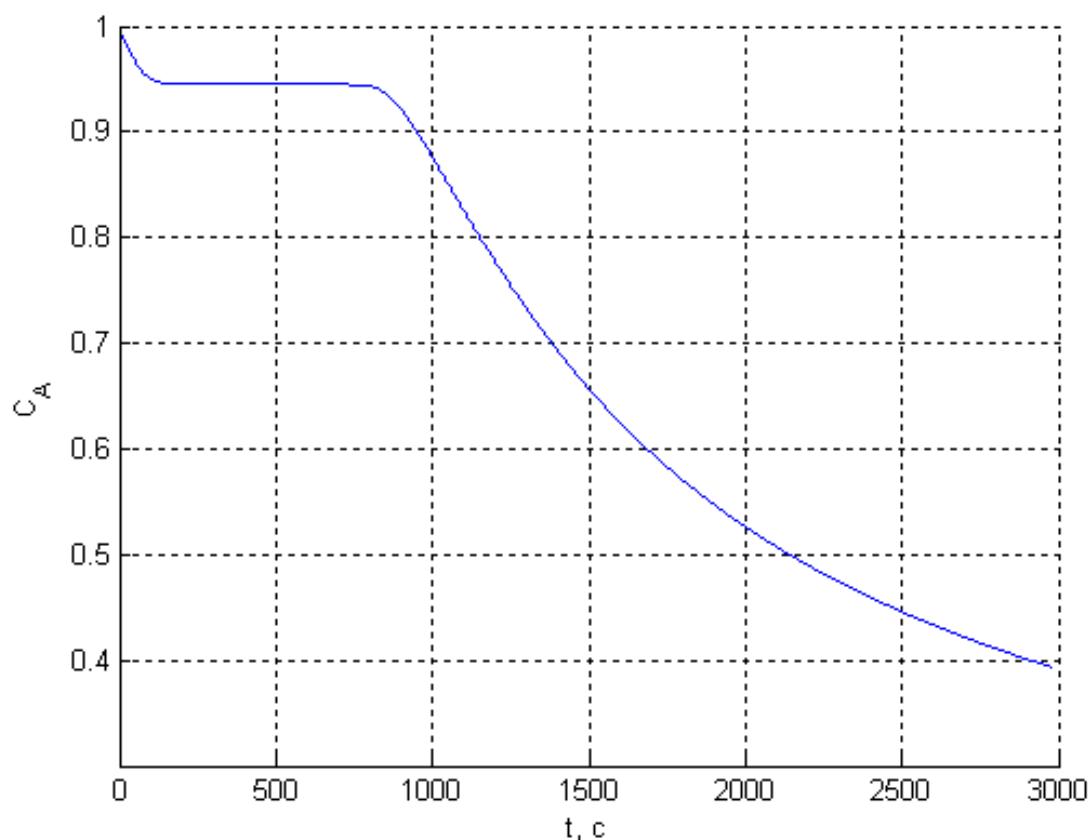


Рис. 8. Зависимость концентрации вещества A от времени t при $c = 0,8104$

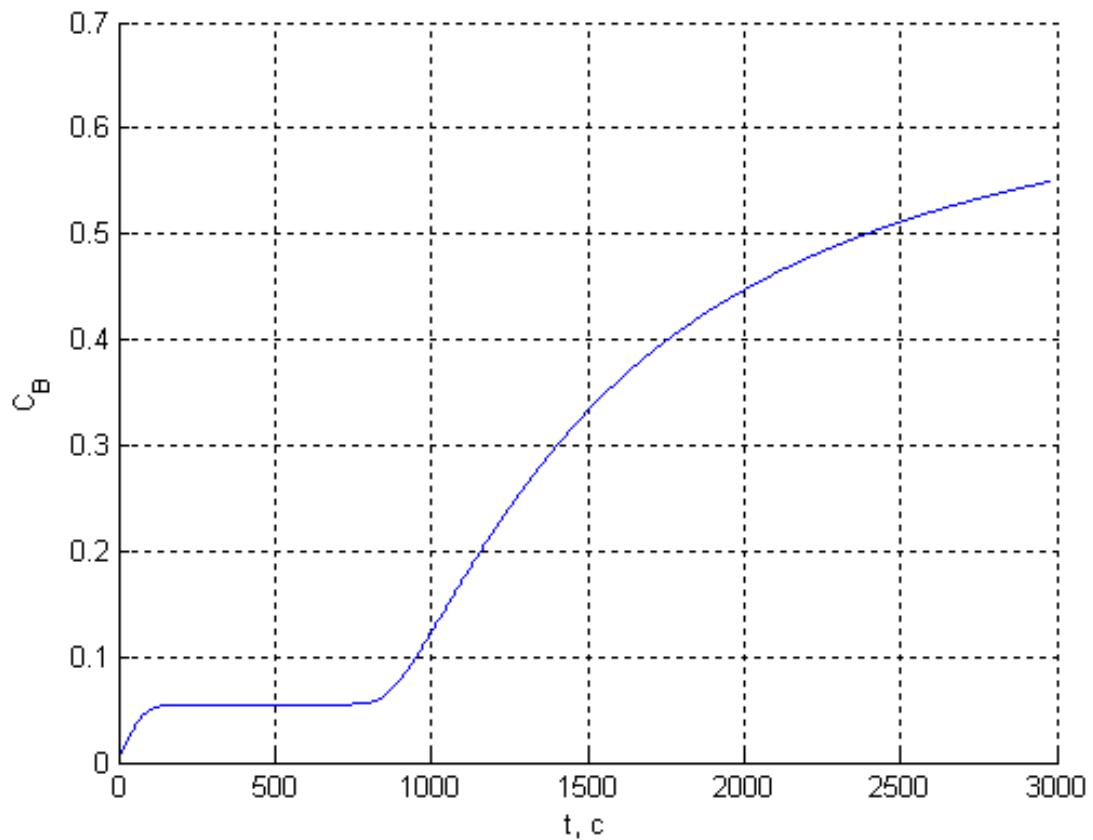


Рис. 9. Зависимость концентрации вещества B от времени t при $c = 0,8104$

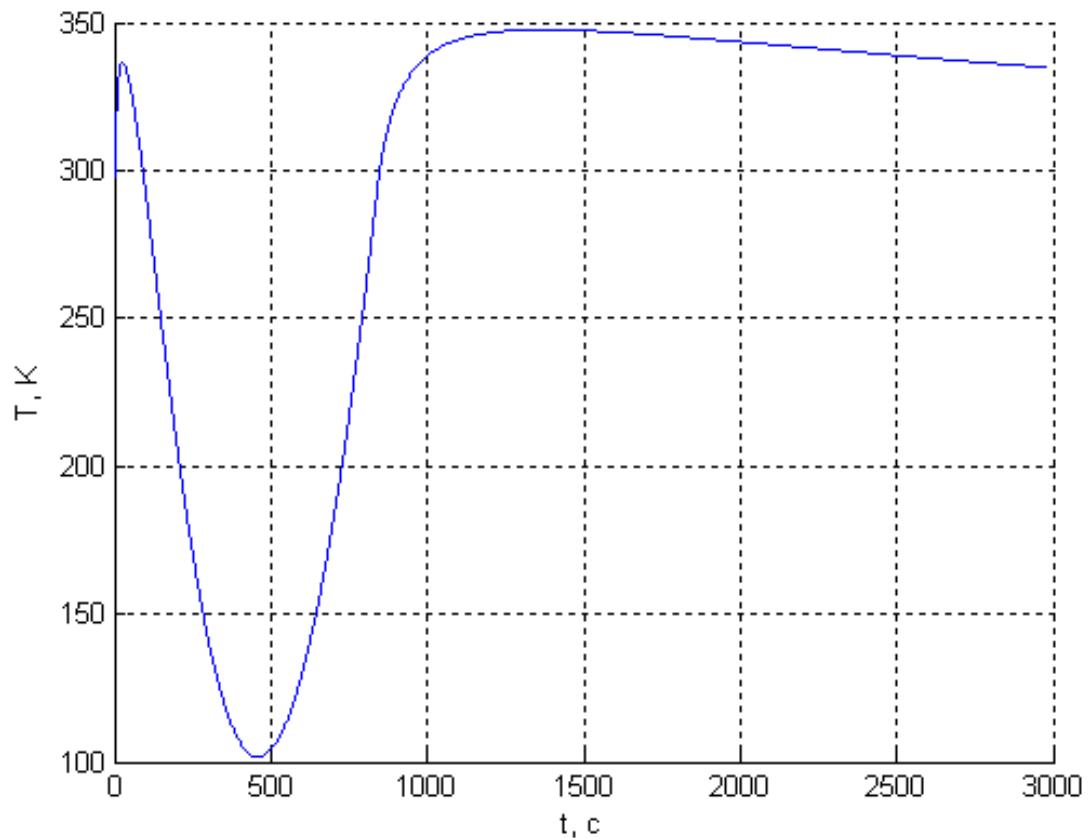


Рис. 10. Зависимость температуры T от времени t при $c = 0,8104$

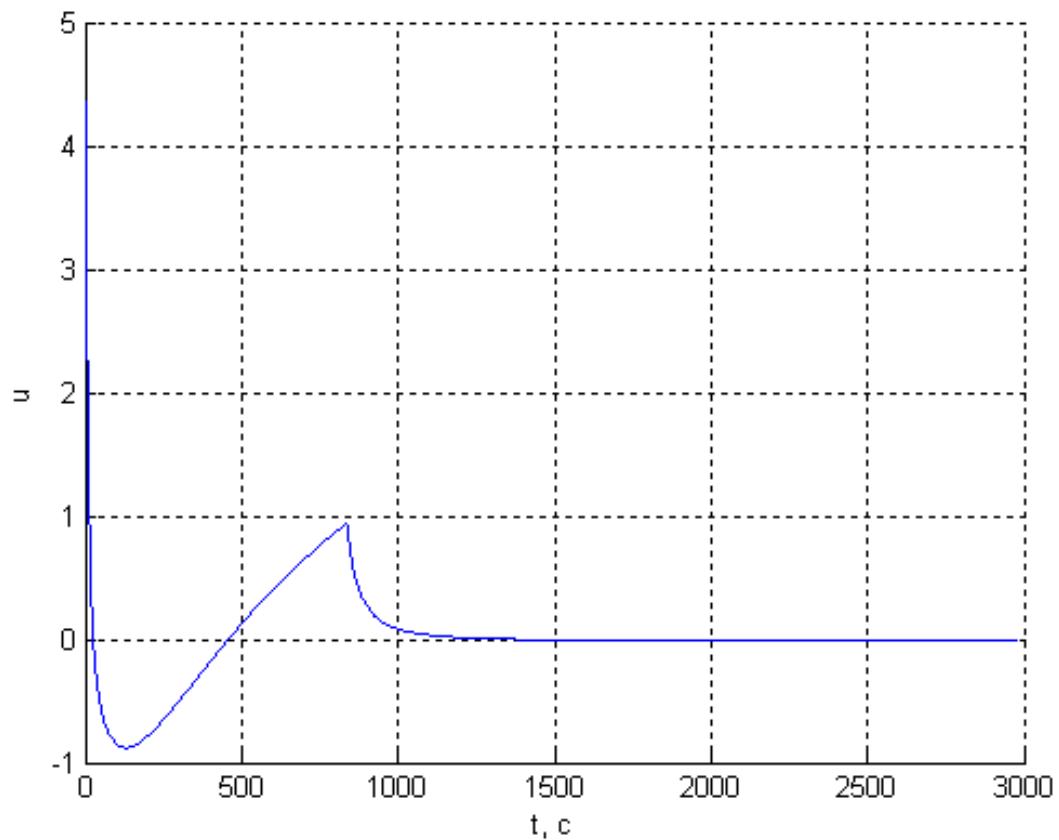


Рис. 11. Зависимость управления u от времени t при $c = 0,8104$

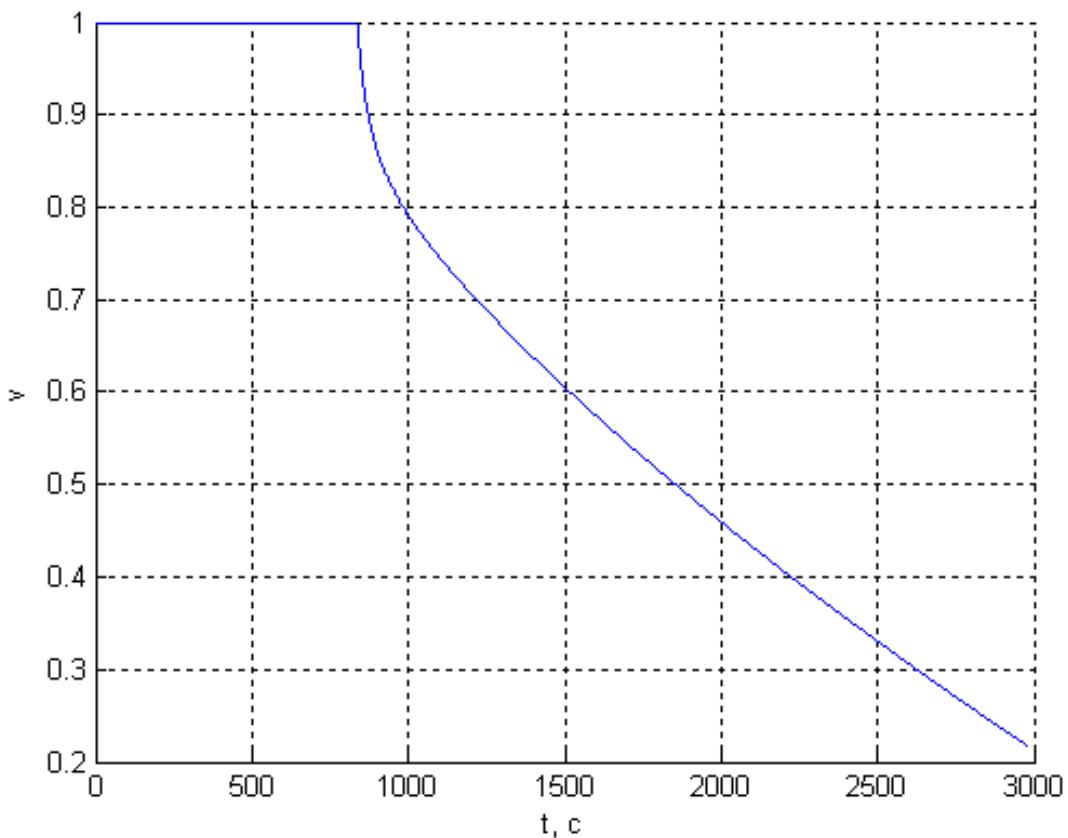


Рис. 12. Зависимость управления v от времени t при $c = 0,8104$

Заключение

Получено решение задачи терминального управления для порционного реактора, который описывается трехмерной аффинной системой. Это решение основано на методе орбитальной линеаризации, с помощью которого исходная терминальная задача преобразована в терминальную задачу для двумерной регулярной системы канонического вида при наличии ограничений на состояние. Для преобразованной задачи терминального управления найдены условия существования решения и предложен метод его нахождения. Полученные результаты проиллюстрированы результатами математического моделирования при рассмотрении численного примера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-01-00733, 13-07-00743) и Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Guay M. An Algorithm for Orbital Feedback Linearization of Single-Input Nonlinear Affine Systems // Systems Control Letters. 1999. Vol. 38, no. 4-5. P. 271–281. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00074-2.
2. Kravaris C., Chung C.-B. Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization // AIChE Journal. 1987. Vol. 33, no. 4. P. 592–603. DOI: 10.1002/aic.690330408.
3. Kravaris C., Wright R.A., Carrier J.F. Nonlinear Controllers for Trajectory Tracking in Batch Processes // Computers and Chemical Engineering. 1989. Vol. 13, no. 1–2. P. 73–82. DOI: 10.1016/0098-1354(89)89008-8.
4. Chen C.-T. A Sliding Mode Control Strategy for Temperature Trajectory Tracking in Batch Processes // Preprints of the 8th IFAC Symposium on Advances Control Chemical Processes, July 10–13, 2012. Furama Riverfront, Singapore.
5. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 520 с.
6. Sampei M., Furuta K. On Time Scaling for Nonlinear Systems: Application to Linearization // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. Vol. 31, no. 5. P. 459–462. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104290.
7. Касаткина Т.С. Преобразования аффинных систем к каноническому виду с использованием замен независимой переменной // Наука и образование. Электрон. журн. 2013. № 7. С. 1–15. DOI: 10.7463/0713.0566578.

Terminal control of processes in chemical reactors using orbital linearization

10, October 2013

DOI: **10.7463/1013.0612563**

Kasatkina T. S., Krishchenko A. P.

Bauman Moscow State Technical University

105005, Moscow, Russian Federation

kasatkina_t_s@mail.ru

The authors consider an affine third order system which describes action of a chemical batch reactor with a ternary working mixture. The terminal control problem for this system with restrictions on state variables was investigated. Solution to this problem is based on the orbital linearization approach by which the original problem is transformed to a terminal problem for a non-stationary second-order system in a canonical form. For the transformed terminal problem conditions for solution existence were obtained; a method of obtaining this solution was also proposed. Operability of the proposed method was illustrated by mathematical simulation.

References

1. Guay M. An Algorithm of Orbital Feedback Linearization of Single-Output Nonlinear Affine Systems. *System Control Letters*, 1999, vol. 38, no. 4–5, pp. 271–281. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00074-2.
2. Kravaris C., Chung C.-B. Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input/Output Linearization. *AIChE Journal*, 1987, vol. 33, no. 4, pp. 592–603. DOI: 10.1002/aic.690330408.
3. Kravaris C., Wright R.A., Carrier J.F. Nonlinear Controllers for Trajectory Tracking in Batch Processes. *Computers and Chemical Engineering*, 1989, vol. 13, no. 1–2, pp. 73–82. DOI: 10.1016/0098-1354(89)89008-8.
4. Chen C.-T. A Sliding Mode Control Strategy for Temperature Trajectory Tracking in Batch Processes. *Preprints of the 8th IFAC Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Furama Riverfront, Singapore, 10–13 July 2012. The International Federation of Automatic Control (IFAC), 2012, pp. 11–18.

5. Krasnoshchecchenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ, 2005. 520 p.
6. Sampei M., Furuta K. On Time Scaling for Nonlinear Systems: Application to Linearization. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1986, vol. 31, no. 5, pp. 459–462. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104290.
7. Kasatkina T.S. Preobrazovaniya affinnykh sistem k kanonicheskому виду с использованием замены независимой переменной [Affine system transformations to the canonical form using change of the independent variable]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 7. DOI: 10.7463/0713.0566578.