НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Об использовании теории делимости в квадратичных полях для получения оценок некоторых линейных форм

11, ноябрь 2013

DOI: 10.7463/1113.0622505

Иванков П. Л.

УДК 511.361

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

ivankovpl@mail.ru

Введение

Изучение арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами осложняется тем обстоятельством, что эти функции не являются E-функциями и к ним нельзя непосредственно применить известный в теории трансцендентных чисел метод Зигеля [1, 2]. Причина этого связана с тем, что общий наименьший знаменатель дробей

$$\frac{(\omega+1)\dots(\omega+k)}{k!}, \quad k=1,\,\dots,\,n,$$

слишком быстро растет при $n \to \infty$, если ω не является рациональным числом. Однако, если специальным образом подобрать алгебраические числа $\omega_1,\,\dots,\,\omega_t$, то общий наименьший знаменатель чисел

$$\frac{\prod\limits_{x=1}^{k}(\omega_1+x)\dots(\omega_t+x)}{k!}, \quad k=1,\,\dots,\,n, \tag{1}$$

оказывается «хорошим», и это в некоторых случаях позволяет устанавливать линейную независимость значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами и получать соответствующие количественные результаты. При этом надо использовать подходящую эффективную конструкцию линейных приближающих форм. В настоящей работе в качестве многочлена от x в числителе дроби (1) берется $(x^2+1)(x^2-2)(x^2-3)(x^2-6)$; можно доказать, что в этом случае при $n \to \infty$ общий наименьший знаменатель дробей (1) оценивается сверху величиной порядка $e^{O(n)}$. Многочленов с такими свойствами бесконечно много; метод их построения ясен из работы [3].

1. Результаты

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — комплексные числа;

$$a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r), \quad b(x) = (x^2+1)(x^2-2)(x^2-3)(x^2-6)(x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m).$$

Рассмотрим при $k = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, u$, где $u = m+8$, следующие функции:

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)(\lambda_k+x)}{b(x)}, \tag{2}$$

а также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ_k:

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\nu^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k+x), \tag{3}$$

$k = 1, \ldots,], t$, $l_k = 0, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$. Здесь $\tau_1, \ldots, \tau_t$ — натуральные числа. Через $\mathbb{I}$ обозначим некоторое мнимое квадратичное поле (или поле рациональных чисел).

Предположим также, что выполнены стандартные достаточные условия, которые обеспечивают линейную независимость над полем рациональных дробей функций (3), т.е. разности между любыми корнями знаменателя и числителя под знаком произведения в правой части (2), а также между числами λ_{k_1} и λ_{k_2} при различных k_1 и k_2 не являются целыми рациональными числами. Кроме этого требуется, чтобы $a(x)b(x)(x+\lambda_1)\ldots(x+\lambda_t)$ было отлично от нуля при $x = 1, 2, \ldots$ По поводу этих достаточных условий см. [4].

Теорема 1. Предположим, что выполнены все перечисленные выше условия. Пусть также выполнены условия:

1) $m+1 \geqslant r \geqslant 2$;
2) числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ рациональны;
3) $\beta_r, \ldots, \beta_m$ являются алгебраическими степеней $\varkappa_r, \ldots, \varkappa_m$ сответственно;
4) $\eta = 1 - \frac{1}{u-r+1}\left(\frac{1}{\varkappa_r} + \ldots + \frac{1}{\varkappa_m} + 4\right)$;
5) $(x+\beta_r)\ldots(x+\beta_m) \in \mathbb{I}[x]$;
6) $0 \neq \xi \in \mathbb{I}$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого нетривиального набора целых чисел h_0, h_{kl_kj}, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, из поля $\mathbb{I}$, максимум модулей которых есть H, выполняется неравенство

$$\left|h_0 + \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u} h_{kl_kj}F_{kl_kj}(\xi)\right| > H^{-\frac{w(u-r-1)+\eta(u-r+1)}{u-r-1-\eta(u-r+1)}-\varepsilon}, \tag{4}$$

где H достаточно велико (нижняя граница зависит от ε);

$$w = uT, \quad T = \tau_1 + \ldots + \tau_t. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е. Вместо функций $F_{kl_kj}(z)$ можно рассмотреть и другие функции, которые получаются заменой в правой части (3) произведения $\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k + x)$ на $\prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k+x}$. Отметим также, что количество рациональных корней многочлена $b(x)$ из правой части (3) может быть и меньше, чем $r+1$. В последнем случае (при $\tau_1 = \ldots = \tau_t = 1$) к функции (3) нельзя применить теорему 1 из [5]. В случае отсутствия дифференцирований по параметру здесь можно было бы применить теорему 2 из [3].

2. Доказательства

Пусть n — достаточно большое натуральное число,

$$N_1 = \left[\frac{n}{T}\right]. \tag{6}$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{t} \prod_{\sigma=0}^{N_1-1} (z - \lambda_k - \sigma)^{\tau_k}, \tag{7}$$

степень которого в силу (5) и (6) не превышает n, и подберем числа θ_s так, чтобы тождественно по z выполнялось равенство

$$Q(z) = \sum_{s=0}^{n} \theta_s \prod_{x=1}^{n-s} (z+x). \tag{8}$$

Для этого (см., например, [6, с. 40–41]) следует положить

$$\theta_s = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{Q(z)\,dz}{\prod\limits_{x=1}^{n-s+1}(z+x)}, \tag{9}$$

где C — положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции.

Лемма 1. При $1 \leqslant k \leqslant t$, $0 \leqslant l_k \leqslant \tau_k - 1$ выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^{n} \theta_s A(s) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x) = 0, \tag{10}$$

где $A(s)$ — произвольный многочлен, степень которого не превышает $N_1 - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $l_k = 0$. Из (7) и (8) следует, что

$$0 = Q(\lambda_k + \sigma) = \sum_{s=0}^{n} \theta_s \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + \sigma + x) = \sum_{s=0}^{n} \theta_s A_{k\sigma}(s) \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x),$$

где

$$A_{k\sigma}(s) = \prod_{x=1}^{\sigma} \frac{\lambda_k + n - s + x}{\lambda_k + x}, \quad 1 \leqslant k \leqslant t, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant N_1 - 1.$$

Так как любой многочлен от s степени не выше $N_1 - 1$ представляется в виде линейной комбинации многочленов $A_{k\sigma}(s)$, то при $l_k = 0$ утверждение леммы справедливо. Далее рассуждаем по индукции. Поскольку $l_k \leqslant \tau_k - 1$, то из (7) и (8) следует, что

$$0 = \left.\frac{d^{\,l_k} Q(z)}{dz^{\,l_k}}\right|_{z=\lambda_k+\sigma} = \sum_{s=0}^{n} \theta_s \frac{\partial^{\,l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + \sigma + x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \theta_s \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \Big(A_{k\sigma}(s) \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x) \Big) = \sum_{\mu_k=0}^{l_k} \binom{l_k}{\mu_k} \sum_{s=0}^{n} \theta_s \frac{\partial^{\mu_k} A_{k\sigma}(s)}{\partial \lambda_k^{\mu_k}} \cdot \frac{d^{\,l_k-\mu_k}}{d\lambda_k^{l_k-\mu_k}} \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x).$$

По предположению индукции получаем отсюда равенство

$$\sum_{s=0}^{n} \theta_s A_{k\sigma}(s) \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x) = 0,$$

которое позволяет завершить доказательство леммы, как указано выше. Теорема доказана.

Пусть $N_2 = \left[\frac{n}{w}\right] - 1$. Рассмотрим многочлен

$$P(z) = \sum_{s=0}^{n} p_s z^s, \tag{11}$$

где

$$p_s = \frac{\theta_s}{n!} \prod_{x=1}^{n-s} b(N_2 + x) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{1}{a(x)}. \tag{12}$$

Лемма 2. В разложении в ряд по степеням z функций

$$r^*_{kl_kj}(z) = P(z) F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{kl_kj\nu} z^\nu, \tag{13}$$

где $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, коэффициент $c_{kl_kj\nu}$ при z^ν равен нулю, если $n \leqslant \nu \leqslant n + N_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем выражение для указанного коэффициента следующим образом:

$$c_{kl_kj\nu} = \sum_{s=0}^{n} p_s (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{\,l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} (\lambda_k + x) = \frac{1}{n!} \prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{b(x)} \sum_{s=0}^{n} \theta_s (\nu - s)^{j-1} \times$$

$$\times \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} b(x-s) \prod_{x=n+1}^{\nu} a(x-s) \frac{d^{\,l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \left(\prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x) \prod_{x=n+1}^{\nu} (\lambda_k + x - s) \right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{b(x)} \sum_{\mu_k=0}^{l_k} \binom{l_k}{\mu_k} \sum_{s=0}^{n} \theta_s B_{l_k-\mu_k}(s) \frac{d^{\mu_k}}{d\lambda_k^{\mu_k}} \prod_{x=1}^{n-s} (\lambda_k + x), \tag{14}$$

где

$$B_{l_k-\mu_k}(s)=(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=\nu+1}^{n+N_2}b(x-s)\prod_{x=n+1}^{\nu}a(x-s)\frac{d^{\,l_k-\mu_k}}{d\lambda_k^{l_k-\mu_k}}\prod_{x=n+1}^{\nu}(\lambda_k+x-s).$$

Многочлен $B_{l_k-\mu_k}(s)$ имеет, очевидно, степень не выше N_1-1. Поэтому (14) равно нулю в силу леммы 1. Лемма 2 доказана.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 1 носит чисто технический характер: соответствующие рассуждения хорошо известны. Некоторые новые моменты возникают лишь при оценках знаменателей коэффициентов многочленов (11), а также появляющихся ниже многочленов $P_{kl_kj}(z)$.

Лемма 3. Если ω_1 и ω_2 рациональны, то общий наименьший знаменатель чисел

$$\frac{(\omega_1+g+1)\dots(\omega_1+g+k)}{(\omega_2+1)\dots(\omega_2+k)},\quad k=1,\,\dots,\,n,$$

при любом целом рациональном g оценивается сверху величиной $e^{O(n)}$, где постоянная в показателе степени зависит от ω_1 и ω_2 (и не зависит от n и g).

Доказательство леммы стандартно; оно основано на сравнении степеней простых чисел, входящих в числители и знаменатели рассматриваемых дробей. Провести это доказательство можно, например, опираясь на рассуждения в [7, с. 186].

В дальнейшем через $\gamma_1,\gamma_2,\dots$ обозначаются положительные постоянные, не зависящие от n (но, возможно, зависящие от числа ξ, поля $\mathbb{I}$ и от параметров функций (3)).

Лемма 4. Общий наименьший знаменатель чисел

$$\frac{\theta_s}{s!},\quad s=0,\,1,\,\dots,\,n,$$

не превышает $e^{\gamma_1 n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем выражение для θ_s из правой части (9) с помощью теоремы о вычетах; имеем

$$\frac{\theta_s}{s!}=\frac{1}{s!}\sum_{x=1}^{n-s+1}\pm\frac{\prod_{k=1}^{t}\prod_{\sigma=0}^{N_1-1}(x+\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}}{(x-1)!(n-s+1-x)!}=$$

$$=\sum_{x=1}^{n-s+1}\pm\frac{(n-s)!}{(x-1)!(n-s+1-x)!}\cdot\frac{n!}{s!(n-s)!}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{t}\prod_{\sigma=0}^{N_1-1}(x+\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}}{n!}.$$

Так как числа $\lambda_1,\dots,\lambda_t$ рациональные, то лемма 4 сводится к лемме 3.

Наименьшим общим знаменателем некоторого множества чисел X из поля $\mathbb{I}$ будем называть наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое любое число из X становится целым в упомянутом поле.

Лемма 5. Для абсолютной величины коэффициентов многочленов (11) справедлива оценка

$$|p_s| \leqslant e^{\gamma_2 n} \left(\frac{n!}{s!}\right)^{u-r-1}, \tag{15}$$

причем модуль общего наименьшего знаменателя этих чисел не превышает $e^{\gamma_3 n}$.

Доказательство. Абсолютную величину коэффициента p_s, $0 \leqslant s \leqslant n$, оценим с помощью (12). Из (9) получаем (считая, что C — окружность радиуса $n+2$ с центром в начале координат)

$$\left|\frac{\theta_s}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i n!}\int\limits_C \frac{Q(z)\,dz}{\prod\limits_{x=1}^{n-s+1}(z+x)}\right| \leqslant \frac{n+2}{n!}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{t}\prod\limits_{\sigma=0}^{N_1-1}(n+2+\gamma_3+\sigma)^{\tau_k}}{\prod\limits_{x=1}^{n-s+1}(n+2-x)} =$$

$$= \frac{n+2}{n!}\left(\frac{\Gamma(n+2+\gamma_3+N_1)}{\Gamma(n+2+\gamma_3)\Gamma(N_1)}\right)^{\text{т}} \frac{(\Gamma(N_1))^{\text{т}}}{(n+1)!}\,s!$$

Применение формулы Стирлинга дает теперь такую оценку

$$\frac{|\theta_s|}{n!} \leqslant e^{\gamma_4 n}\frac{s!}{n!}. \tag{16}$$

Аналогично оцениваются и прочие множители, входящие в правую часть равенства (12):

$$\left|\prod_{x=1}^{n-s} b(N_2+x)\prod_{x=1}^{n-s}\frac{1}{a(x)}\right| \leqslant e^{\gamma_5 n}\left(\frac{n!}{s!}\right)^{u-r}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует (15).

Оценим общий наименьший знаменатель чисел p_s.

Перепишем (12) так:

$$p_s = \frac{\theta_s}{s!}\,\frac{s!(n-s)!}{n!}\,V_{1s}V_{2s}V_{3s},$$

где

$$V_{1s} = \prod_{x=1}^{n-s}\frac{x(\beta_1+N_2+x)\dots(\beta_{r-1}+N_2+x)}{a(x)},$$

$$V_{2s} = \prod_{x=1}^{n-s}\frac{((N_2+x)^2+1)((N_2+x)^2-2)((N_2+x)^2-3)((N_2+x)^2-6)}{x^2},$$

$$V_{3s} = \prod_{x=1}^{n-s}(\beta_r+N_2+x)\dots(\beta_m+N_2+x), \quad s = 0,\,1,\,\dots,\,n.$$

Общий наименьший знаменатель чисел $\theta_s/s!$ оценивается сверху величиной $e^{\gamma_1 n}$ — это следует из леммы 4. Для чисел вида

$$\frac{s!(n-s)!}{n!}, \quad s = 0,\, 1,\, \ldots,\, n,$$

обратных биномиальным коэффициентам общий наименьший знаменатель имеет величину порядка $e^{O(n)}$. Доказательство этого утверждения можно провести так же, как и доказательство леммы 3, сравнивая степени, в которых простые числа входят в числители и знаменатели соответствующих дробей. Числа V_{1s} имеют общий наименьший знаменатель, не превосходящий $e^{\gamma_6 n}$ — это вытекает из леммы 3. Аналогично оценивается и общий наименьший знаменатель чисел V_{2s}. Здесь, однако, лемма 3 не годится, так как корни многочлена от x, стоящего в числителе рассматриваемой дроби иррациональны. Но можно сослаться на лемму 5 работы [3], в которой доказывается (с помощью теории делимости в квадратичных полях), что указанный общий наименьший знаменатель есть величина порядка $e^{O(n)}$. Общий наименьший знаменатель чисел V_{3s}, очевидно, не превосходит $q^{(m-r+1)n}$, где q — такое натуральное число, что все числа $q\beta_1, \ldots, q\beta_m$ являются целыми (алгебраическими) числами. Подводя итог сказанному, убеждаемся в справедливости второго утверждения леммы. Лемма 5 полностью доказана.

Рассмотрим теперь при $0 \leqslant k \leqslant t$, $0 \leqslant l_k \leqslant \tau_k - 1$, $1 \leqslant j \leqslant u$ многочлен

$$P_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} p_{kl_kj\nu} z^\nu \tag{18}$$

степени не выше n, коэффициент при z^ν которого равен умноженному на -1 коэффициенту $c_{kl_kj\nu}$ в разложении по степеням z функции $r^*_{kl_kj}(z)$, определяемой равенствами (13). Нам потребуются оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов $p_{kl_kj\nu}$ многочленов (18).

Лемма 6. Пусть N — натуральное число, l — неотрицательное целое рациональное число. Тогда

$$\frac{d^l}{d\lambda^l}\prod_{x=1}^{N}(\lambda + x) = \prod_{x=1}^{N}(\lambda + x)\sum\frac{\pm 1}{(\lambda + x_1)\ldots(\lambda + x_l)},$$

где сумма состоит из конечного числа слагаемых, а $x_1, \ldots, x_l$ — числа (среди которых могут быть и повторяющиеся), соответствующим образом выбранные из множества $\{1,\, \ldots,\, N\}$.

Доказательство проводится индукцией по l.

Лемма 7. Для любого $\varepsilon > 0$ абсолютная величина наименьшего общего знаменателя коэффициентов многочленов (18) не превышает $(n!)^{\frac{u-r+1}{w}(\eta+\varepsilon)}$; эта оценка справедлива для всех достаточно больших n (нижняя граница зависит от ε и от параметров функций (3); числа η и w определены в формулировке теоремы).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем выражение коэффициента $p_{kl_kj\nu}$ в соответствии с его определением:

$$p_{kl_kj\nu} = -c_{kl_kj\nu} = -\sum_{s=0}^{\nu} p_s(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\,\frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}(\lambda_k+x) =$$
$$= -\sum_{s=0}^{\nu}\frac{\theta_s}{s!}\,\frac{s!(n-s)!}{n!}\prod_{x=1}^{n-s}\frac{x+\lambda_k}{x}\prod_{x=1}^{N_2}\frac{b(n+x-s)}{b(x)}\times$$
$$\times(\nu-s)^{j-1}\prod_{x=\nu+1}^{n}\frac{b(x-s)}{a(x-s)(x+\lambda_k-s)}\sum\frac{\pm1}{(\lambda_k+x_1)\ldots(\lambda_k+x_{l_k})}. \quad (19)$$

Входящие в последнее выражение множители

$$\frac{\theta_s}{s!},\quad \frac{s!(n-s)!}{n!}\quad \text{и}\quad \prod_{x=1}^{n-s}\frac{x+\lambda_k}{x}$$

имеют общий наименьший знаменатель, не превосходящий $e^{\gamma_7 n}$ — это (с учетом рациональности чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$) уже рассматривалось выше. Общий наименьший знаменатель множителей

$$\prod_{x=1}^{N_2}\frac{b(n+x-s)}{b(x)}, \quad (20)$$

можно оценить с помощью леммы 6 работы [8, с. 1227]. Здесь следует учесть, что числа $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ рациональны; алгебраические числа $\pm i$, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{6}$ имеют степень два, а степени чисел $\beta_r, \ldots, \beta_m$ суть соответственно $\varkappa_r, \ldots, \varkappa_m$. Внеся в рассуждения, доказывающие упомянутую лемму 6 работы [8], некоторые изменения технического характера, получим, что общий наименьший знаменатель чисел (20) оценивается сверху величиной $(n!)^{\frac{u-r+1}{w}(\eta+\varepsilon)}$, где ε — произвольное положительное число, а n достаточно велико (нижняя граница зависит от ε). В случае множителей

$$\prod_{x=\nu+1}^{n}\frac{b(x-s)}{a(x-s)(x+\lambda_k-s)} = \prod_{x=\nu+1}^{n}\Bigg(\frac{(x-s+\beta_1)\ldots(x-s+\beta_{r-1})x^2}{a(x-s)(x+\lambda_k-s)}\times$$
$$\times\frac{((x-s)^2+1)((x-s)^2-2)((x-s)^2-3)((x-s)^2-6)}{x^2}\times(x-s+\beta_r)\ldots(x-s+\beta_m)\Bigg)$$

можно рассуждать, как при доказательстве леммы 5 (при этом опять придется сослаться на [3, лемма 5]). В результате получим оценку их общего наименьшего знаменателя в виде $e^{\gamma_8 n}$. Осталось оценить общий наименьший знаменатель последней суммы, входящей в (19). Хорошо известно, что общее наименьшее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ есть величина порядка $e^{O(n)}$. Применение этого замечания в рассматриваемой ситуации показывает, что общий наименьший знаменатель упомянутой суммы оценивается сверху величиной $e^{\gamma_9 n}$. Суммируя все вышесказанное, получаем утверждение леммы. Лемма 7 доказана.

Полученные результаты позволяют доказать теорему. Мы имеем совместные приближения

$$r_{kl_kj}(z) = P_{kl_kj}(z) + P(z)F_{kl_kj}(z)$$

для функций (3) с порядком нуля при $z = 0$ близким к максимально возможному. При этом функции (3) линейно независимы над полем рациональных дробей. Поэтому, следуя методу, разработанному в статье [9], мы можем построить целую совокупность таких приближений, причем соответствующий определитель будет отличен от тождественного нуля. Затем надо перейти к числовым приближающим формам; получающийся при этом результат оформим в виде леммы. При доказательстве этой леммы следует иметь в виду оценку

$$|r_{kl_kj}(\xi)| \leqslant e^{\gamma_{10}n}(n!)^{-\frac{u-r-1}{w}},$$

которая легко следует из (14) и (15).

Лемма 8. В поле $\mathbb{I}$ существуют числа $v_0^{(s)}$, $v_{kl_kj}^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, w$, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, обладающие следующими свойствами:

1) определитель $\det\bigl(v_0^{(s)} v_{kl_kj}^{(s)}\bigr)$, составленный из чисел $v_0^{(s)}$ и $v_{kl_kj}^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, w$, $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, u$, отличен от нуля;

2) $\det\bigl(v_{kl_kj}^{(s)} + v_0^{(s)}F_{kl_kj}(\xi)\bigr) \leqslant e^{\gamma_{11}n}(n!)^{-\frac{u-r-1}{w}}$;

3) $\det(v_0^{(s)}) \leqslant e^{\gamma_{12}n}(n!)^{u-r-1}$;

4) числа $v_0^{(s)}$ являются целыми, а общий наименьший знаменатель чисел $v_{kl_kj}^{(s)}$ по модулю не превышает $(n!)^{\frac{u-r+1}{w}}(\eta + \varepsilon)$, причем последняя оценка справедлива для всех достаточно больших n.

Перечисленные утверждения справедливы при всех допустимых значениях индексов.

Из последней леммы утверждение теоремы можно получить с использованием стандартной техники. Подробности см. в [9].

Заключение

Мы видим, что, выбирая специальным образом параметры гипергеометрических функций, можно расширить область применимости используемой эффективной конструкции совместных приближений при изучении арифметической природы значений таких функций. При этом привлекалась теория делимости в квадратичных полях. Применение аналогичной теории в других полях алгебраических чисел позволит получить новые результаты такого рода.

Список литературы

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929. No. 1. P. 1–70.

2. Галочкин А.И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций // Математические заметки. 1981. Т.29, вып. 1. С. 3–14.
3. Иванков П.Л. О значениях некоторых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Изв. ВУЗов. Математика. 2007. № 7. С. 48–52.
4. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.
5. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 34, № 5. С. 53–62.
6. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во МГУ, 1982. 312 с.
7. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 447 с.
8. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. XVII, № 6. С. 1220–1235.
9. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Padé approximation to Diophantine inequalities in values of G-functions // Number Theory. Springer Berlin Heidelberg, 1985. P. 9–51. (Ser. Lect. Notes in Math.; vol. 1135.). DOI:10.1007/BFb0074600.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

On the usage of the theory of divisibility in quadratic fields for obtaining the estimates of some linear forms

11, November 2013

DOI: 10.7463/1113.0622505

Ivankov P. L.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
ivankovpl@mail.ru

It is impossible to use the known in the theory of transcendental numbers Siegel's method directly for investigation of arithmetic properties of values of generalized hyper-geometric functions with irrational parameters because these functions do not belong to the class of E-functions. For that reason in such a situation one usually applies different variants of effective construction of linear approximating forms. In this paper we use one of such variants that makes it possible to consider the differentiated with respect to a parameter functions. The capabilities of this method are extended by a special choice of parameters of the functions under consideration.

References

1. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 1929, no. 1, pp. 1–70.
2. Galochkin A.I. O kriterii prinadlezhnosti gipergeometricheskih funkcij Zigelja klassu E-funkcij [Hypergeometric Siegel functions and E-functions]. *Matematicheskie zametki*, 1981, vol. 29, iss. 1, pp. 3–14. (English Translation: *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1981, vol. 29, iss. 1, pp. 3–8).
3. Ivankov P.L. O znachenijah nekotoryh gipergeometricheskih funkcij s irracional'nymi parametrami [The values of certain hypergeometric functions with irrational parameters]. *Izv. VUZov. Matematika*, 2007, no. 7, pp. 48–52. (English Translation: *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, iss. 7, pp. 45–49.).
4. Ivankov P.L. O lineinoi nezavisimosti nekotorykh funktsii [On linear independence of certain functions]. *Chebyshevskii sbornik*, 2010, vol. 11, no. 1, pp. 145–151.

5. Ivankov P.L. O linejnoj nezavisimosti znachenij celyh gipergeometricheskih funkcij [On linear independence of values of entire hypergeometric functions]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [Siberian mathematical journal], 1993, vol. 34, no. 5, pp. 53–62.
6. Fel'dman N.I. *Sed'maia problema Gil'berta* [The Hilbert seventh problem]. Moscow, MSU Publ., 1982. 312 p.
7. Shidlovskii A.B. *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers]. Moscow, Nauka, 1987. 448 p.
8. Galochkin A.I. Ob arifmeticheskikh svoistvakh znachenii nekotorykh tselykh gipergeometricheskikh funktsii [On the arithmetic properties the values of certain entire hypergeometric functions]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [Siberian mathematical journal], 1976, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235.
9. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. Applications of Pade approximation to diophantine inequalities in values of G-function. In: *Number Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1985, pp. 9–51. (Ser. Lect. Notes in Math.; vol. 1135.). DOI:10.1007/BFb0074600.