НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения

11, ноябрь 2013
DOI: 10.7463/1113.0619258

Гончаров Д. А.

УДК 534-141

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
zorghhh@gmail.com

Введение.

При работе маршевого двигателя разгонных блоков и иных космических аппаратов ввиду наличия длительных пассивных участков, во время которых реализуются условия микрогравитации[6], для исключения аварийных ситуаций необходимо обеспечивать бесперебойную подачу компонент в заборное устройство, для это цели широко применяются полупроницаемые капиллярные фазоразделители[4], обеспечивающие сплошность компонент при их подаче в заборное устройство. В этой связи, представляет интерес задача о выявлении тех режимов работы в условиях малой гравитации, при которых: а) давление на входе в заборное устройство является недостаточным для осуществления бесперебойной подачи компонент топлива; б) объём жидкости становится неустойчивым, когда нарушается устойчивость и односвязность всей механической системы (жидкость, совершающая малые движения). Настоящая работа служит выяснению тех условий работы, при которых система может становится неустойчивой

В работе [5] исследовалось движение идеальной, несжимаемой и нестратифицированной жидкости, совместно с упругим днищем. Схожая с [5] постановка задачи с иным подходом к разрешению дифференциального уравнения движения пластины реализовывались в работе [6]. Работа [8] посвящена исследованию движений стратифицированной жидкости совместно с упругим днищем, представляемым в виде пластины. В работе [11] схожая с нашей задача рассматривалась с применением операторных методов и исследованием свойств спектра. Тем не менее, в работе [11] не было определено критических значений собственных частот. В работе [9] рассмотрены различные технические реализации фазоразделяющих экранов. Работа [13] посвящена исследованию общих вопросов разрешимости и устойчивости решений класса дифференциально-операторных уравнений. В работе [14] рассматривалась схожая задача без учета сил поверхностного натяжения.

В настоящей работе разработана методика расчёта собственных частот и форм колебаний механической системы, которая может рассматриваться в качестве приближенной для анализа динамики бака с фазоразделителем. В рамках рассматриваемой модели проницаемостью фазоразделителя пренебрегаем. Решена задача с условием на свободной поверхности жидкости при малой гравитации для двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой, что соответствует возможным техническим реализациям расположения капиллярных фазоразделителей [4].

1. Постановка задачи

Свяжем цилиндрическую систему координат с центром фазоразделяющей мембраны.

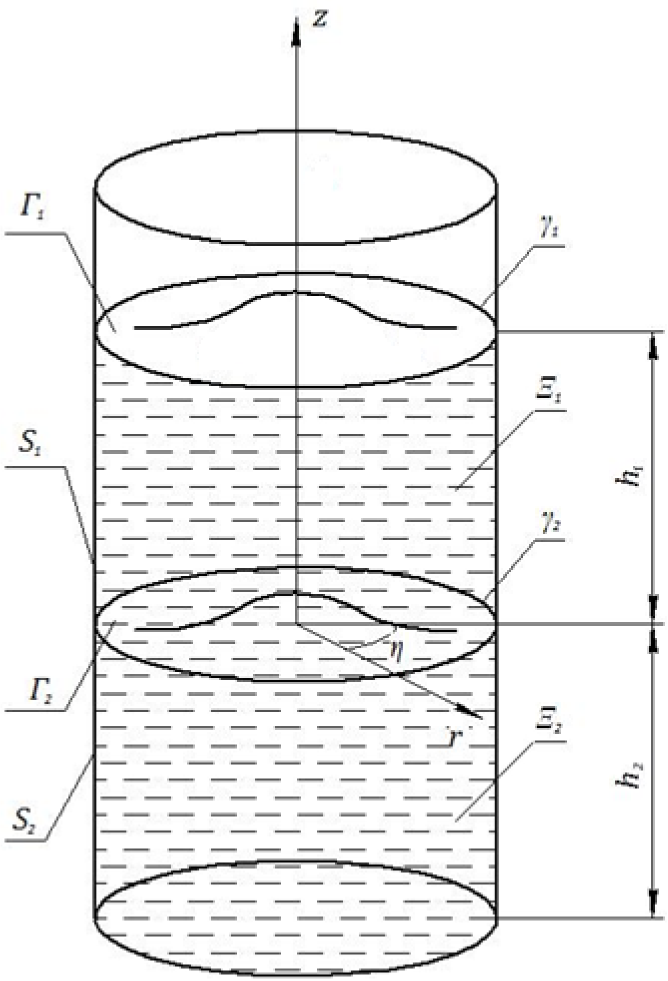

Рис. 1. Модель сосуда с жидкостями, разделёнными мембраной

10.7463/1113.0619258

Тогда рассмотрим область $\Xi = \Xi_1 \cup \Xi_2$, где

$$\Xi_1 : \begin{cases} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ 0 \le z \le h_1 . \end{cases} \qquad \Xi_2 : \begin{cases} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ -h_2 \le z \le 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Обозначим через Γ_1 невозмущенную свободную поверхность жидкости, а через Γ_2 – равновесную поверхность фазоразделяющей мембраны, $S_{1,2}$ –смоченные части первой и второй жидкостями соответственно твердой стенки сосуда

$$\Gamma_1 : \begin{cases} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ z = h_1. \end{cases} \Gamma_2 : \begin{cases} 0 \le r \le a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ z = 0. \end{cases} S_1 : \begin{cases} r = a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ 0 \le z \le h_1. \end{cases} ; \; S_2 : \begin{cases} r = a, \\ 0 \le \eta \le 2\pi, \\ -h_2 \le z \le 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_1 \cap S_1; \; \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_2 \cap S_2. \tag{1.3}$$

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкости в размерном виде в осесимметричном случае примут вид

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 0 \text{ в } \Xi_1, \nabla^2 \Phi^{(2)} = 0 \text{ в } \Xi_2. \tag{1.4}$$

Будем рассматривать задачу для угла смачивания в 90 градусов, в соответствии с [7, стр. 256] и [11], свободную невозмущенную поверхность полагаем плоской.

С граничными условиями:

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_1, \qquad \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_2 , \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial w_2}{\partial t} \text{ на } \Gamma_2, \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} = \frac{\partial w_2}{\partial t} \text{ на } \Gamma_2, \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial w_1}{\partial t} \text{ на } \Gamma_1, \tag{1.6}$$

$$-\frac{\varrho_1}{\sigma_1} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\varrho_1}{\sigma_1} \frac{\partial \Pi}{\partial n} w_1 - \Delta_\Gamma w_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1. \tag{1.7}$$

Здесь $\Phi^{(i)}$ (где $i = \overline{1,2}$) – потенциалы скоростей первой и второй жидкостей соответственно; n – внешняя нормаль к границе области Ξ, заполненной жидкостью; w_1 – отклонение по нормали свободной возмущённой поверхности жидкости от невозмущённой Γ_1,; $\varrho_{1,2}$ – плотности жидкостей выше и ниже фазоразделяющей мембраны соответственно; σ_1 – коэффициент поверхностного натяжения; Δ – дифференциальный оператор Лапласа; условие (1.7), записанное в соответствии с [7, стр. 252] определяет динамическое условие на свободной поверхности, потенциал П внешних сил во время движения считаем постоянным. В случае перехода к безразмерным параметрам в соответствии с $r = \frac{1}{l} r_{\text{разм}}, z = \frac{1}{l} z_{\text{разм}}, t = \left(\sqrt{\frac{\varrho l^3}{\sigma}}\right)^{-1} t_{\text{разм}}, \Phi = \left(\frac{l^2}{\sqrt{\varrho l/\sigma}}\right)^{-1} \Phi_{\text{разм}}, \Pi = \left(\frac{\sigma}{l\varrho}\right)^{-1} \Pi_{\text{разм}}$ и $l = 1$м и полагая потенциал массовых сил $\Pi = \text{Bo} \cdot z$, Bo – число Бонда, характеризующее соотношение между внешними силами и силами поверхностного натяжения, $\text{Bo} = \varrho_1 g^* l^2 / \sigma_1$, g^* – ускорение свободного падения, условие (1.7) в случае угла смачивания в 90 градусов в соответствии с [7, стр. 256]примет вид

$$\left[\text{Bo}\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} - \nabla^2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} - \lambda \Phi^{(1)}\right]\Bigg|_{z=h_1} = 0, \tag{1.7$'$}$$

где $\lambda = \omega^2 = \frac{\varrho_1}{\sigma_1} l^2 \omega^2_{\text{разм}}$, ω – собственная частота колебаний системы. В дальнейшем будем применять условие (1.7) в виде $(1.7)'$.

Смещение мембраны удовлетворяет следующему уравнению движения в осесимметричной постановке [2], [3], [5]:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} - \frac{m_s}{\tau}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau}\left(\varrho_2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t}\bigg|_{z=0} - \varrho_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{z=0}\right), \tag{1.8}$$

где m_s – масса мембраны на единицу площади, а τ – её натяжение. Мы полагаем, что мембрана находится под действием равномерного натяжения τ, т.е. если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частями, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению; величина илы, действующей на элемент линии длины ds составляет величину τds. Величину τ считаем постоянной по площади мембраны.

Граничное условие для уравнения (1.8) имеют вид

$$w_2(r,t)|_{r=a} = 0, \tag{1.9}$$

Запишем условие постоянства нижнего объёма

$$\iiint\limits_{V_2} w_2 r d\eta dr dz = const \tag{1.10}$$

II. Осесимметричное движение жидкости

Рассмотрим применение метода Бубнова-Галёркина для нахождения собственных значений задачи $(1.1) - (1.10)$.

Пусть состояние равновесия жидкостей устойчиво по первому приближению. Найдём собственные числа свободных осесимметричных колебаний системы из 2-х жидкостей, разделенных упругой мембраной.

Будем искать решение соответствующей задачи в виде

$$\Phi^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^{(i)}(r)\, Z_n^{(i)}(z) \exp(j\omega_n t). \qquad (2.1)$$

Применяя метод Фурье к задаче $(1.4) - (1.10)$ в соответствии с [6] получим следующие выражения для потенциалов скоростей:

$$\Phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)}{J_0(\xi_{0n})}\left[\frac{\omega^2 \operatorname{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{a}\right) - \left(Bo + \left(\frac{\xi_{0n}}{a}\right)^2\right)\frac{\xi_{0n}}{a}\operatorname{ch}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{a}\right)}{\left(Bo + \left(\frac{\xi_{0n}}{a}\right)^2\right)\frac{\xi_{0n}}{a}\operatorname{sh}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{a}\right) - \omega^2 \operatorname{ch}\left(\xi_{0n}\frac{h_1}{a}\right)}\operatorname{ch}\left(\xi_{0n}\frac{z}{a}\right) + \operatorname{sh}\left(\xi_{0n}\frac{z}{a}\right)\right] e^{j\omega_n t}, (2.2)$$

$$\Phi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)}{J_0(\xi_{0n})} \operatorname{ch}\left[\frac{\xi_{0n}}{a}(z + h_2)\right] e^{j\omega_n t},$$

где J_0 —функция Бесселя 1-го рода порядка 0, $\xi_{0n} - n$-й корень в уравнении (1.5), 0, причём

$\xi_{01} = 1{,}8412,\ \xi_{02} = 5{,}3315,$ и т. д.; $a^* = \frac{1}{l} a_{\text{разм}}$ – приведённый к безразмерному виду радиус рассматриваемого цилиндра.

Введём обобщённые координаты $q_m(t), m = 1,2, \dots$ и представим перемещения мемебраны в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний мембраны без жидкости. В соответствии с [2] такое разложение примет вид

$$w_2(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) J_0\left(\frac{\zeta_{0m}}{a} r\right), \qquad (2.3)$$

где $\zeta_{0n} - m$-й корень функции Бесселя 1-го рода порядка 0, $\zeta_{01} = 2{,}4048, \zeta_{02} = 5{,}5201, \dots$

Разложим $J_0\left(\frac{\zeta_{0m}}{a} r\right)$ в ряд по ортогональным функциям $J_0\left(\frac{\xi_{0n}}{a} r\right)$

$$J_0\left(\frac{\zeta_{0m}}{a} r\right) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm} J_0\left(\frac{\xi_{0n}}{a} r\right),\ D_{nm} = \frac{2\xi_{0n} J_0(\xi_{0n})}{(\xi_{0n}^2 - \zeta_{0m}^2) J_1(\zeta_{0m})}. \qquad (2.4)$$

Удовлетворяя книметическим условиям на мембране (1.6) с учетом разложения, а также ортогональности функций Бесселя, а так же обозначая

$$C_m = \int_0^a \frac{d}{dr}\left[\frac{rdJ_0\left(\xi_{0m}\frac{r}{a}\right)}{dr}\right]\cdot J_0\left(\xi_{0m}\frac{r}{a}\right)dr, P_m = \frac{m_S}{\tau}\int_0^a rJ_0^2\left(\xi_{0m}\frac{r}{a}\right)dr, \tag{2.5}$$

$$\underset{m=k}{P^*_{mk}} = P_m - \frac{1}{\tau}\varrho_2\sum_{n=1}^{\infty} d_{nm}^{(2)}\, b_{nk}^{(2)} + \frac{1}{\tau}\varrho_1\sum_{n=1}^{\infty} d_{nm}^{(1)}\, b_{nk}^{(1)}, \underset{m\neq k}{P^*_{mk}} = \frac{1}{\tau}\left[\varrho_2\sum_{n=1}^{\infty} d_{nm}^{(2)}\, b_{nk}^{(2)} - \varrho_1\sum_{n=1}^{\infty} d_{nm}^{(1)}\, b_{nk}^{(1)}\right]$$

$$d_{nm}^{(i)} = \frac{1}{D_{nm}}\int_0^a r\cdot J_0\left(\xi_{0m}\frac{r}{a}\right)J_0\left(\xi_{0n}\frac{r}{a}\right)dr\cdot Z_n^{(i)}(0), \qquad b_{nm}^{(i)} = \frac{D_{nm}}{\left(\left.\frac{dZ_n^{(i)}(z)}{dz}\right|_{z=0}\right)} \tag{2.7}$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (\ddot{s}_1 P_{11}^* + s_1 C_1) + \ddot{s}_2 P_{12}^* + \ddot{s}_3 P_{13}^* + \dots = 0, \\ \ddot{s}_1 P_{21}^* + (\ddot{s}_2 P_{22}^* + s_2 C_2) + \ddot{s}_3 P_{13}^* + \dots = 0, \\ \dots \\ \ddot{s}_m P_{m1}^* + \dots + (\ddot{s}_m P_{mm}^* + s_m C_m) + \dots = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Составив определитель m-го порядка которой, получаем характеристическое уравнение. Важно отметить, что недиагональные члены определителя обратятся в ноль ввиду ортогональности функций Бесселя.

$$\begin{vmatrix} C_1 - \omega^2 P_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 - \omega^2 P_{22}^* & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k - \omega^2 P_{mm}^* \end{vmatrix} = 0 \tag{2.10}$$

III. Результаты

Была определена зависимость частоты собственных колебаний механической системы от числа Бонда, характеризующего интенсивность гравитационных сил при различных значениях частоты колебаний свободной поверхности жидкости.

Далее, раскрывая полученный определитель для I-го тона, мы получим частотное уравнение относительно ω. Ограничиваемся 5-ю членами ряда в уравнении относительно ω, полученном при раскрытии определителя (2.10). В полученном соотношении выражаем ω через число Бонда. Полученные зависимости при различных τ, масст мембраны: $m_S = 30$ *кг*, плотности $\varrho_2 = 70\ \frac{кг}{м^3}$, размеры области $a = 1\ м, h_1 = 1 м, h_2 = 1\ м$.

Критическое значение частоты получаем из условия $Bo = 0$. Из рис. 2 видим, что с уменьшением жесткости мембраны, снижается значение критической частоты.

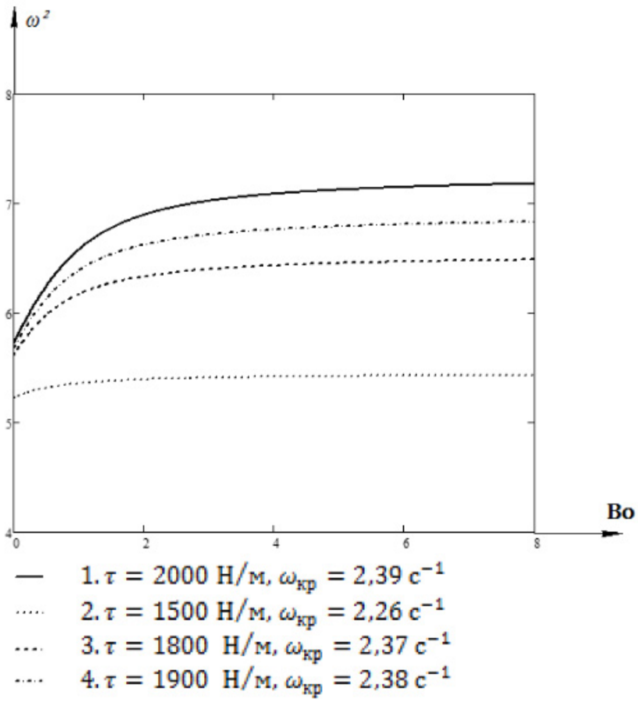

Рис. 2. Зависимость квадрата собственной частоты механической системы от числа Бонда.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 368 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
4. Багров В.В., Курпатенков А.В., Поляев В.М., Синцов А.Л., Сухоставец В.Ф. Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических летательных аппаратов / под ред. В.М. Поляева. М.: УНПЦ «Энергомаш», 1997. 328 с.
5. Пожалостин А.А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном // Известия высших учебных заведений. Сер. Авиационная техника. 1963. № 4. С. 25-32.
6. Петренко М.П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикладная механика. 1969. Том 5, вып. 6. С. 44-50.
7. Бабский В.Г., Копаческий Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости / под ред. А.Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976. 504 с.
8. Андронов А.В. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в контейнере с упругим днищем // Вопросы волновых движений жидкости : сб. науч. тр. Краснодар: КубГУ,1987.

9. Сапожников В.Б., Меньшиков В.А., Партола И.С., Корольков А.В. Развитие идей профессора В.М. Поляева по применению пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск жидкостных ракетных двигателей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2006. № 2. С. 78-88.
10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1969. 510 с.
11. Нго Зуй Кан. О движении идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, заполняющей сосуд с плоским днищем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1980. № 3. С. 143-154.
12. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна: пер. с нем. М.: ОНТИ, 1935. 332 с.
13. Пашкова Ю.С. Малые колебания системы идеальных жидкостей, разделенных упругими перегородками / Симферопольский государственный университет. Симферополь, 1992. 28 с. Деп. в УкрИНТЭИ 02.10.92.
14. Гончаров Д.А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана Электрон. журн. 2012. № 4. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html (дата обращения 01.09.2013).

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Dynamics of two-layer liquid, divided by an elastic baffle considering surface tension forces (with corrections)

11, November 2013
DOI: 10.7463/1113.0619258
Goncharov D.A.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation
zorghhh@gmail.com

Dynamics of an ideal incompressible fluid filling a cylindrical vessel divided by an elastic membrane with an allowance for surface tension forces was investigated in this work. Boundary conditions for surface tension at the wetting angle of 90 degrees were formulated; normal oscillations were determined. The Bubnov-Galerkin method was used to obtain an approximate frequency equation in an axially symmetric case (plane problem). Dependence of the natural frequency of oscillations on the Bond number which characterises the strength of gravity was analysed. A critical value of the natural oscillation frequency was also determined.

Publications with keywords: liquid, phase separating membrane, surface tension, contact angle
Publications with words: liquid, phase separating membrane, surface tension, contact angle

References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 736 p.

2. Martinson L.K., Malov Iu.I. *Differentsial'nye uravneniia matematicheskoi fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 368 p.

3. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1977. 736 p.

4. Bagrov V.V., Kurpatenkov A.V., Poliaev V.M., et al. *Kapilliarnye sistemy otbora zhidkosti iz bakov kosmicheskikh apparatov* [The capillary system of selection of the liquid from the tanks of space vehicles]. Moscow, UNPTs «Energomash» Publ., 1997. 328 p.

5. Pozhalostin A.A. Svobodnye kolebaniia zhidkosti v zhestkom krugovom tsilindricheskom sosude s uprugim ploskim dnom [Free oscillations of liquid in a rigid circular cylindrical vessel with an elastic flat-bottomed]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Ser. Aviatsionnaia tekhnika*, 1963, no. 4. pp. 25-32.

6. Petrenko M.P. Sobstvennye kolebaniia zhidkosti so svobodnoi poverkhnost'iu i uprugogo dnishcha tsilindricheskoi polosti [Natural oscillations of a fluid with free surface and an elastic bottom of the cylindrical cavity]. *Prikladnaia mekhanika*, 1969, vol.5, no. 6, pp. 44-50.

7. Babskiy V.G., Kopacheskiy N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Gidromekhanika nevesomosti* [Hydromechanics of weightlessness]. Moscow, Nauka, 1976. 504 p.

8. Andronov A.V. Kolebaniia ideal'noi stratifitsirovannoi zhidkosti v konteinere s uprugim dnishchem [Oscillations of an ideal stratified fluid in a container with elastic bottom]. *Voprosy volnovykh dvizhenii zhidkosti: sb. nauch. tr.* [Questions of wave motions of fluid: *collected papers*]. Krasnodar, KubGU Publ., 1987.

9. Sapozhnikov V.B., Men'shikov V.A., Partola I.S., Korol'kov A.V. Razvitie idey professora V.M. Polyaeva po primeneniyu poristo-setchatykh materialov dlya vnutribakovykh ustroystv, obespechivayushchikh mnogokratnyy zapusk zhidkostnykh raketnykh dvigateley [Development of ideas of professor V.M. Polyaev on application of porous-meshed materials for internal tank devices providing repeated many times start-up of liquid propellant engines]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2006, no. 2, pp. 78-88.

10. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1969. 510 p.

11. Ngo Zuy Kan. O dvizhenii ideal'noy zhidkosti, podverzhennoy silam poverkhnostnogo natyazheniya, zapolnyayushchey sosud s ploskim dnishchem [On motion of ideal liquid which is exposed to the forces of surface tension and fills the vessel with flat bottom]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1980, no. 3, pp. 143-154.

12. Blaschke W. *Differentsial'naya geometriya i geometricheskie osnovy teorii otnositel'nosti Eynshteyna* [Differential geometry and geometric foundations of Einstein's theory of relativity]. Trans. from German. Moscow, ONTI, 1935. 332 p.

13. Pashkova Yu.S. *Malye kolebaniya sistemy ideal'nykh zhidkostey, razdelennykh uprugimi peregorodkami* [Small oscillations of system of ideal fluids separated by elastic walls]. Simferopol', 1992. 28 p. Dep. UkrINTEI 02.10.92.

14. Goncharov D.A. Osesimmetrichnye kolebaniya dvukhplotnostnoy zhidkosti v tsilindricheskom bake [Axisymmetric oscillations of dual-density liquid in the cylindrical tank]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 4. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html , accessed 01.09.2013.