

Оценка трудоемкости быстрого метода расчета вихревого влияния

в методе вихревых элементов

10, октябрь 2013

DOI: 10.7463/1013.0604030

Кузьмина К. С., Марчевский И. К.

УДК 519.62

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kuz-ksen-serg@yandex.ru

iliamarchevsky@mail.ru

1. Введение

Для моделирования плоских течений идеальной либо вязкой несжимаемой среды, которые описываются уравнениями неразрывности и Эйлера либо Навье — Стокса и соответствующими граничными и начальными условиями [1], в ряде случаев может эффективно использоваться метод вихревых элементов. Первичной расчетной величиной в этом методе является завихренность, по известному распределению которой $\Omega(\mathbf{r})$ и заданной скорости набегающего потока $\mathbf{V}_\infty$ (в случае расчета внешнего течения) может быть восстановлено поле скоростей по закону Био — Савара

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_S \int \frac{\Omega(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi + \mathbf{V}_\infty, \quad (1)$$

а также найдено распределение давления с использованием аналога интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа [2].

Суть метода вихревых элементов (МВЭ) заключается в том, что непрерывное распределение завихренности $\Omega(\mathbf{r})$ заменяется набором из n вихревых элементов — точечных вихрей (бесконечных вихревых нитей, перпендикулярных области течения) определенной интенсивности.

К примеру, если в начальный момент времени распределение завихренности соответствует круглому вихрю Ламба [1, 3], эту процедуру можно провести следующим образом: определяется круг, содержащий большую часть всей завихренности (в нашем случае этот круг содержит более 99,8 % от завихренности во всем пространстве), который разделяется на ячейки приблизительно равной площади S_i (рис. 1). Затем завихренность, содержащаяся в

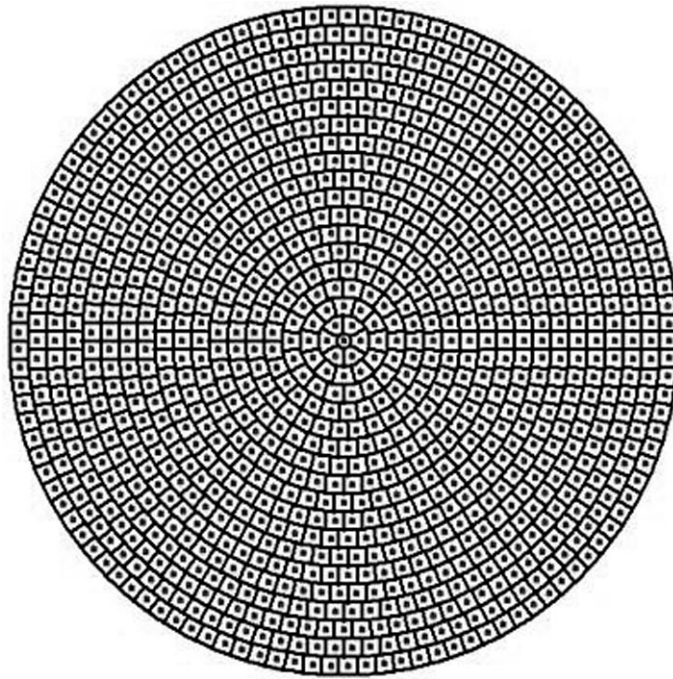


Рис. 1. Разделение круглого вихря на ячейки и помещение в них вихревых элементов

i -й ячейке, стягивается в центр этой ячейки — точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_i$, куда и помещается вихревой элемент с интенсивностью

$$\Gamma_i = \iint_{S_i} \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Таким образом, распределение завихренности при решении задач методом вихревых элементов представляется в виде

$$\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — двумерная дельта-функция; тогда интеграл в законе Био — Савара (1) превращается в сумму

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} + \mathbf{V}_{\infty},$$

где $\mathbf{k}$ — орт оси Oz , перпендикулярной плоскости течения.

В случае идеальной жидкости справедливо уравнение $\frac{D\Omega}{Dt} = 0$ [3] (здесь D/Dt — полная, или материальная производная), которое означает, что завихренность, связанная с данной точкой среды, перемещается вместе с ней с течением времени. Тогда для описания течения среды интенсивности вихревых элементов следует считать постоянными, а их движение должно происходить по полю скоростей среды:

$$\begin{cases} \Gamma_i = \text{const}, \\ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, вычисление скорости i -го вихревого элемента осуществляется по формуле

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underbrace{\frac{\Gamma_j \mathbf{k} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{2\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}}_{v_{ij}} + V_\infty = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Gamma_j \mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + V_\infty, \quad (2)$$

где v_{ij} — влияние j -го вихревого элемента на i -й, $\mathbf{K}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{2\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}$. Видно, что чтобы вычислить скорости всех вихревых элементов, нужно учесть влияние всех пар друг на друга.

Для случая моделирования течения вязкой жидкости справедливы аналогичные рассуждения с той лишь разницей, что завихренность перемещается не со скоростью среды V , а со скоростью $U = V + W$, где W — диффузионная скорость, вычисляемая по распределению завихренности, величина которой пропорциональна вязкости среды [2]. В дальнейшем при анализе вычислительной сложности алгоритмов будет исследована лишь процедура определения конвективных скоростей V_i вихревых элементов. Для процедуры вычисления диффузионных скоростей при необходимости могут быть построены аналогичные оценки.

2. Быстрый метод вычисления конвективных скоростей вихревых элементов

Из формулы (2) видно, что вычислительная сложность алгоритма расчета конвективных скоростей вихревых элементов, т. е. количество операций умножения/деления, которые требуется выполнить, пропорциональна квадрату их количества (n^2), что является фактором, значительно ограничивающим увеличение числа n . В то же время n должно быть достаточно большим, чтобы обеспечить требуемую точность решения задачи. В связи с этим разработан ряд алгоритмов, позволяющих существенно сократить количество операций. Одним из них является так называемый быстрый метод, аналогичный быстрому методу решения гравитационной задачи n тел [4].

Приведем основные соотношения и расчетные формулы быстрого метода при моделировании плоских течений идеальной несжимаемой жидкости [5]. В основе метода лежит распределение вихревых элементов по областям, образующим иерархическую структуру (дерево). При вычислении вкладов от дальних элементов вместо суммирования по каждому из них приближенно рассчитывается их коллективное воздействие. Для расчета влияния вихревых элементов дальней области S на скорости точек в области S_0 вычисляются интегралы положительной и отрицательной завихренности Γ_+ , Γ_- в области S и радиус-векторы центров завихренности $\mathbf{r}_+$ и $\mathbf{r}_-$:

$$\Gamma_\pm = \iint_S \Omega_\pm dS = \sum_{k\pm} \Gamma_{k\pm}, \quad \mathbf{r}_\pm = \frac{1}{\Gamma_\pm} \iint_S \mathbf{r} \Omega_\pm dS \approx \frac{1}{\Gamma_\pm} \sum_{k\pm} \mathbf{r}_{k\pm} \Gamma_{k\pm}, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_{k+}$, $\mathbf{r}_{k-}$, Γ_{k+} , Γ_{k-} — координаты и интенсивности вихревых элементов с положительной и отрицательной завихренностью области S .

Влияние $V_i(S)$ вихревых элементов области S на скорость i -й точки из области S_0 , имеющей координаты (x_i, y_i) , выражается формулами

$$V_i(S) \approx \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_c, \quad \Delta y_i = y_i - y_c, \\ a &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_+ y'_+}{r'^2_+} + \frac{\Gamma_- y'_-}{r'^2_-} \right), \quad b = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_+ x'_+}{r'^2_+} + \frac{\Gamma_- x'_-}{r'^2_-} \right), \\ c &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Gamma_+ x'_+ y'_+}{r'^4_+} + \frac{\Gamma_- x'_- y'_-}{r'^4_-} \right), \quad d = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Gamma_+ (y'^2_+ - x'^2_+)}{r'^4_+} + \frac{\Gamma_- (y'^2_- - x'^2_-)}{r'^4_-} \right). \end{aligned}$$

Здесь x_c, y_c — координаты некоторой выделенной точки r_c области S_0 , $x'_\pm, y'_\pm$ — координаты векторов $r'_\pm = r_c - r_\pm$.

Данные соотношения получаются в результате удержания линейных членов в разложении функции $K(r_i, r_j)$ в (2) по формуле Тейлора в окрестности точек r_c, r_+ и r_- соответственно (отдельно вычисляется влияние вихревых элементов с положительными и отрицательными интенсивностями из области S).

Формула (4) позволяет достаточно точно вычислять вклад в скорости вихревых элементов из области S_0 от вихревых элементов области S , если размеры областей достаточно малы по сравнению с расстоянием между ними. При этом не требуется перебирать все элементы области S и вычислять скорость каждого из них; достаточно лишь определить значения четырех коэффициентов a, b, c и d , после чего скорости всех вихревых элементов найдутся умножением матрицы размером 2×2 на столбец относительных координат вихревых элементов.

Алгоритм быстрого метода вычисления конвективных скоростей вихревых элементов по аналогии с быстрым методом решения гравитационной задачи n тел состоит из трех последовательных этапов:

- 1) построение дерева;
- 2) вычисление суммарных циркуляций Γ_+, Γ_- и центров завихренности r_+, r_- положительных и отрицательных вихревых элементов в каждой области;
- 3) вычисление скоростей вихревых элементов.

3. Построение дерева

Дерево в данной задаче представляет собой иерархическую структуру прямоугольных областей (рис. 2). Прямоугольник-ячейка высшего (нулевого) уровня содержит все вихревые элементы. Он делится по длинной стороне на два одинаковых прямоугольника-ячейки первого уровня. Путем перебора вихревых элементов определяется их принадлежность

к одному из них. После этого каждый прямоугольник «обрезается» по горизонтали и по вертикали, чтобы исключить из него области, не содержащие ни одного вихревого элемента. Такая процедура позволяет, с одной стороны, существенно повысить эффективность метода, а с другой — упростить алгоритм.

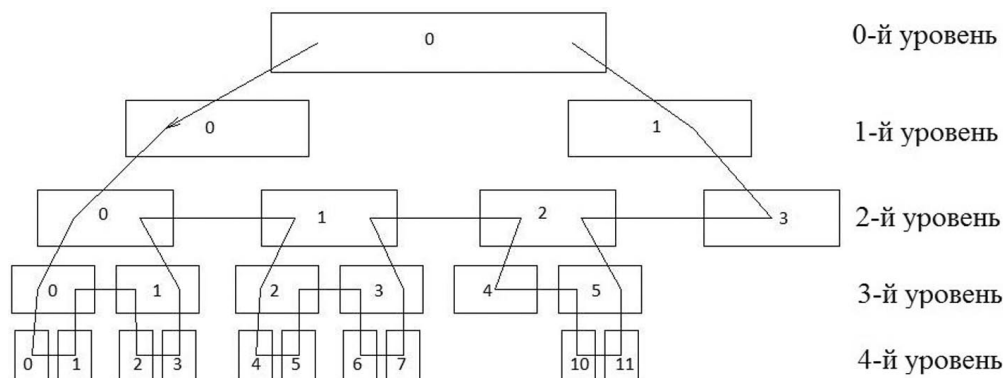


Рис. 2. Структура дерева и схема обхода

Далее два этих прямоугольника делятся аналогичным образом, образуя области второго уровня и т. д. Деление прекращается при выполнении заданного критерия по размеру прямоугольника, количеству вихревых элементов в нем и (или) номеру уровня. Отметим, что «обрезание» всех прямоугольников обеспечивает непустоту ячеек следующего уровня. Нумерацию ячеек на каждом уровне удобно делать «сплошной», как это показано на рис. 2, при этом если некоторые ячейки отсутствуют, то их номера пропускаются. Пример ячеек дерева различных уровней в задаче о моделировании движения круглого вихря показан на рис. 3.

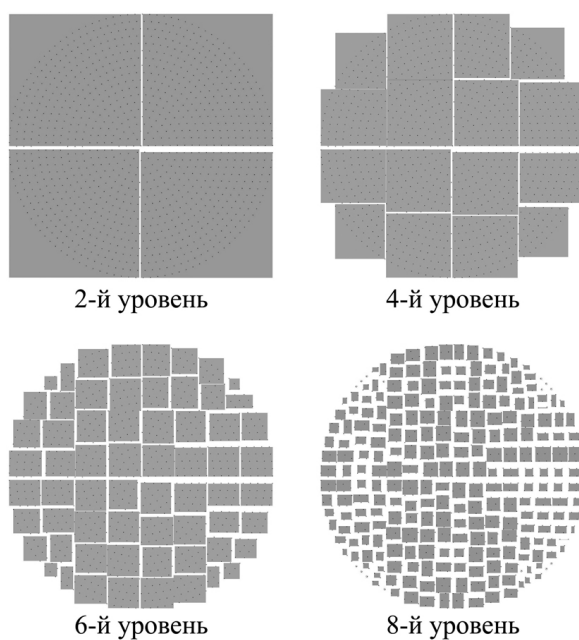


Рис. 3. Прямоугольники-ячейки соответствующих уровней дерева

4. Вычисление характеристик ячеек дерева

Для всех ячеек дерева по формулам (3) вычисляются величины Γ_+ , Γ_- , $\mathbf{g}_+ = \Gamma_+ \mathbf{r}_+$ и $\mathbf{g}_- = \Gamma_- \mathbf{r}_-$. Для нижних ячеек, т. е. ячеек, не имеющих потомков, это делается путем перебора всех вошедших в них вихревых элементов, для остальных ячеек дерева эти параметры находятся путем суммирования соответствующих характеристик двух дочерних областей.

5. Вычисление скоростей вихревых элементов

При вычислении скоростей вихревых элементов последовательно рассматриваются нижние ячейки. Для каждой из них проводится обход дерева (рис. 2) с целью выявления областей, достаточно удаленных по сравнению с величиной h , равной сумме размеров по высоте и ширине соответствующей нижней ячейки и текущей ячейки обхода (в качестве h можно взять также сумму диагоналей ячеек или какой-либо другой характерный размер). Таким образом, проверяется выполнение условия $h/\rho < \vartheta$, где ρ — расстояние между центрами ячеек, ϑ — заданный параметр. Если указанное условие не выполняется, то осуществляется переход вниз по дереву. Если же условие выполняется, то вычисляются коэффициенты a , b , c и d . Эти коэффициенты при дальнейшем обходе суммируются с аналогичными коэффициентами от других ячеек, удовлетворяющих заданному условию дальности. Если при обходе достигается нижняя ячейка, но условие дальности не выполняется, ее номер запоминается. Таким образом, после обхода дерева оказываются вычисленными величины A , B , C и D , представляющие собой суммы a , b , c и d для областей, удовлетворяющих условию дальности ячеек, а также имеется список нижних ячеек, влияние от которых вычисляется непосредственно путем перебора вихревых элементов с использованием закона Био — Савара. После этого скорости всех вихревых элементов рассматриваемой нижней ячейки вычисляются по формуле

$$\mathbf{V}_i \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} + \sum_j \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{V}_\infty, \quad (5)$$

где суммирование по j проводится по вихревым элементам, принадлежащим ячейкам из указанного выше списка; $\mathbf{V}_\infty$ — скорость набегающего потока. Затем процедура повторяется для следующей нижней ячейки.

Можно показать, что вычислительная сложность быстрого метода пропорциональна $(n \lg n)$, в то время как вычислительная сложность прямого метода, использующего закон Био — Савара для вычисления влияния каждого вихревого элемента на каждый, пропорциональна n^2 . Поэтому быстрый метод тем эффективнее по сравнению с прямым, чем больше n — число вихревых элементов в задаче. Отметим, что для задач с малым числом вихревых элементов (порядка нескольких сотен) использование быстрого метода нецелесообразно, так как на практике он оказывается менее эффективным по сравнению с прямым методом.

6. Оценка вычислительной трудоемкости быстрого метода

При вычислении скоростей вихревых элементов быстрым методом количество выполняемых операций — вычислительная сложность задачи — существенно зависит не только от значения n — количества вихревых элементов, но и от таких параметров, как ϑ — параметр близости ячеек, который влияет на размер «ближней» зоны и определяет точность решения, и k — максимальный уровень дерева. Естественно, на практике приходится работать с системами, содержащими различное количество вихревых элементов; кроме того, могут предъявляться различные требования к точности решения задачи. Поэтому для различных задач оптимальные значения ϑ и k будут разными. Под оптимальными понимаются такие значения параметров, которые обеспечивают наименьшую вычислительную сложность алгоритма. В связи с этим актуальной является задача построения достаточно точной оценки трудоемкости алгоритма (т. е. количества операций, необходимых для вычисления скоростей всех вихревых элементов), в зависимости от значений n , k и ϑ . Подобные оценки построены в работах [6, 7]. Оценка в [6] построена для одного фиксированного значения параметра ϑ (в обозначениях, принятых в данной работе, для $\vartheta = 4$). Но, как показывают результаты расчетов, такая величина ϑ приводит к слишком низкой точности решения, поэтому на практике значение данного параметра представляется целесообразным выбирать из промежутка $0 < \vartheta < 2$. В работе [7] приведен более тщательный анализ вычислительной трудоемкости алгоритма, но в ряде случаев приведенная там оценка достаточно сильно расходится с результатами расчетов. Целью данной работы является уточнение известных оценок [7] за счет учета тех эффектов и особенностей алгоритма, которые ранее не были приняты во внимание.

Рассмотрим модельную задачу, в которой n вихревых элементов равномерно распределены в квадрате со стороной $2a$. Рассмотрение квадратной области позволяет упростить процедуру построения соответствующих оценок, при этом, как показывает опыт, полученные соотношения оказываются применимыми и в более общем случае. При построении дерева общее число ячеек k -го уровня равно $N_k = 2^k$. Тогда сторона квадрата k -го уровня без учета того, что при каждом делении ячейка «обрезается», равна

$$l_k = \sqrt{\frac{S}{2^k}} = \frac{2a}{(\sqrt{2})^k}.$$

Для того чтобы учесть влияние «обрезания» ячеек на каждом шаге построения дерева, оценим «зазор» между ячейками дерева: $D \approx \frac{2a}{\sqrt{n}}$, если вихревые элементы расположены равномерно и упорядоченно в узлах прямоугольной сетки. Поскольку вихревые элементы в реальных задачах чаще всего расположены в области течения неупорядоченно, обрезание ячейки происходит не на величину $D/2$, а на меньшую величину, поэтому введем безразмерный параметр α ($0 \leq \alpha \leq 1$), который будет учитывать этот эффект, тогда «зазор» между ячейками дерева примем равным

$$d = \alpha D = \alpha \cdot \frac{2a}{\sqrt{n}}.$$

В результате получаем, что для стороны ячейки дерева k -го уровня с учетом «обрезания» ячеек можно получить соотношение

$$a_k = \frac{2a}{(\sqrt{2})^k} \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right).$$

В ходе обработки результатов серии вычислительных экспериментов было установлено, что наиболее подходящим является значение $\alpha \approx 0,70$, обеспечивающее наименьшее отклонение теоретической оценки от результатов расчета.

Для каждой ячейки нижнего уровня имеется зона (далее будем называть ее ближней зоной), влияние вихревых элементов из которой вычисляется непосредственно по закону Био — Савара. Расстояния в дальнейшем для простоты рассуждений будем измерять в кубической норме. Тогда ближней зоной является квадрат с центром в центре рассматриваемой ячейки и стороной 2Δ , где $\Delta = h_0/\vartheta$, $h_0 = 4a_k$.

Площадь ближней зоны находится по формуле

$$S_{\text{бл}} = 4\Delta^2 = 4\left(\frac{4}{\vartheta}\right)^2 \left(\frac{4a^2}{2^k}\right) \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}}\right)^2,$$

число ячеек k -го (нижнего) уровня, попавших в эту зону

$$N_{\text{бл}} = \frac{S_{\text{бл}}}{l_k^2} = 4\left(\frac{4}{\vartheta}\right)^2 \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

Это соотношение справедливо только для тех ячеек, которые находятся внутри исходного квадрата, достаточно далеко от его границы, тогда как вблизи границы число ячеек ближней зоны будет меньше (рис. 4). Такими «приграничными» ячейками являются те, которые отстоят от границы на расстояние, не превышающее Δ .

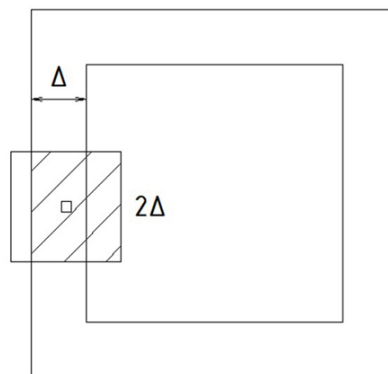


Рис. 4. Ближняя зона для «приграничных» ячеек (заштрихована)

Оценим, какая часть числа ячеек $N_{\text{бл}}$ попадает в исходный квадрат в среднем для всех «приграничных» ячеек:

$$q = \int_0^1 \frac{2(2-x)}{4} dx = \frac{3}{4}.$$

Количество «приграничных» ячеек можно оценить следующим образом:

$$N_{\text{гр}} = \frac{8a \cdot \Delta}{l_k^2} = \frac{16(\sqrt{2})^k}{\vartheta} \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right).$$

Тогда среднее число ячеек, попавших в ближнюю зону, будет таким:

$$N_{\text{бл.ср}} = \frac{(N - N_{\text{гр}})N_{\text{бл}} + N_{\text{гр}} \cdot qN_{\text{бл}}}{N} = N_{\text{бл}} \left(1 - \frac{4}{\vartheta(\sqrt{2})^k} \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Сравним полученную теоретическую оценку с результатами расчета, в котором подсчитывалось число ячеек нижнего уровня, попадающих в ближние зоны всех ячеек, а затем определялось их среднее число в расчете на одну ячейку. На рис. 5 приведен график (в логарифмическом масштабе) зависимости величины $N_{\text{бл.ср}}$ от величины ϑ , которая менялась в диапазоне $0,2 \leq \vartheta \leq 2,0$ с шагом 0,1. Расчеты проводились для $n = 175\,674$ элементов, $\alpha = 0,7$, $k = 16$.

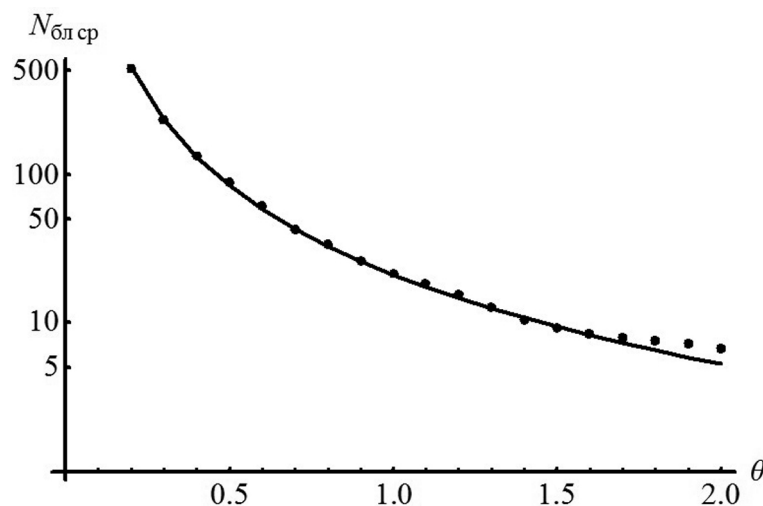


Рис. 5. Среднее число ближних ячеек. Линия — теоретическая оценка, точки — экспериментальные данные ($k = 16$)

Видно, что построенная теоретическая оценка хорошо согласуется с результатами вычислительного эксперимента. Аналогичные расчеты проводились и для других значений k (максимальная глубина дерева), во всех случаях также наблюдалось хорошее согласие результатов.

На основании этого результата построим оценку вычислительной сложности всего алгоритма быстрого метода. Вычисление влияния одного вихревого элемента на скорость другого требует выполнения 6 арифметических операций. Для каждого вихревого элемента (n штук) нужно посчитать влияние всех элементов, находящихся в ячейках ближних зон. Таким образом, влияние вихревых элементов ближних зон, рассчитываемое напрямую по закону Био — Савара, требует выполнения следующего числа арифметических операций:

$$Q_{\text{бл}} = 6N_{\text{бл.ср}} \cdot \frac{n}{2^k} \cdot n = \frac{24n^2}{2^k} \left(\frac{4}{\vartheta} \right)^2 \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(1 - \frac{4}{\vartheta(\sqrt{2})^k} \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

Как видно из графика на рис. 6, теоретическая оценка $Q_{\text{бл}}$ хорошо согласуется с результатами расчета, в котором подсчитывалось количество выполненных операций умножения и деления.

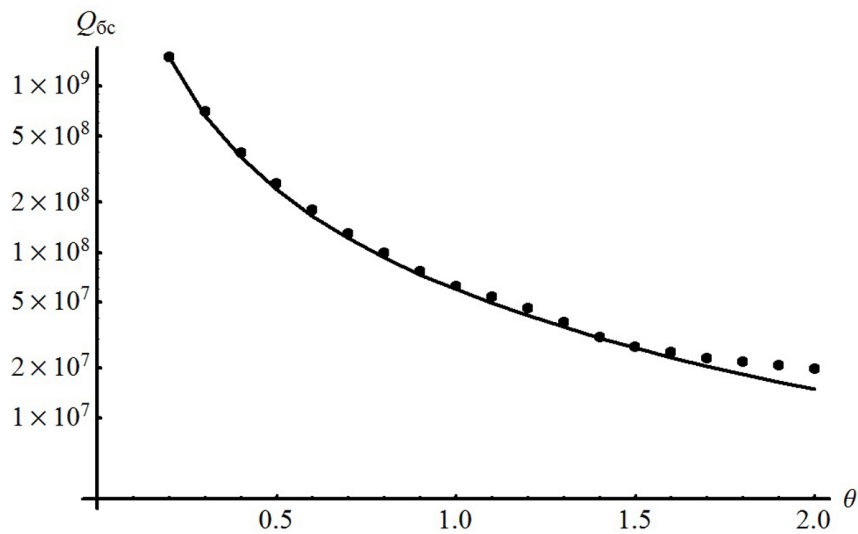


Рис. 6. Количество операций, требуемое для вычисления влияния вихревых элементов из ячеек ближней зоны. Линия — теоретическая оценка, точки — результат вычислительного эксперимента ($k = 16$)

Теперь оценим количество операций, требуемое для вычисления влияния вихревых элементов, находящихся в дальней зоне. Пусть j — расстояние, выражаемое в длинах стороны ячейки k -го (нижнего) уровня, при котором квадрат s -го уровня попадает в дальнюю зону (т. е. относится к ячейкам, влияние вихревых элементов из которых вычисляется быстрым методом), тогда

$$j = \frac{2}{\vartheta} (1 + (\sqrt{2})^{k-s}),$$

значит, на расстоянии j от ячеек k -го уровня к дальней зоне будут относиться ячейки уровня

$$s = k + 2 - 2 \log_2 (\vartheta j - 2).$$

Радиусы ближней зоны и всей исходной области, выраженные в длинах стороны ячейки k -го уровня, равны соответственно $p_k = 4/\vartheta$ и $P_k = (\sqrt{2})^{k-2}$ (данная оценка строится для ячейки, расположенной в центре). Тогда число ячеек максимально высокого уровня, находящихся в дальней зоне, можно приближенно оценить:

$$\begin{aligned} N_{\text{дал}} &= \sum_{j=p_k+1}^{P_k} \frac{8j \cdot l_k^2}{l_s^2} = \sum_{j=p_k+1}^{P_k} \frac{32j}{(\vartheta j - 2)^2} \approx 32 \int_{4/\vartheta+1/2}^{(\sqrt{2})^{k-2}} \frac{y}{(\vartheta y - 2)^2} dy = \\ &= \frac{32}{\vartheta^2} \left(4 \left(\frac{1}{4 + \vartheta} + \frac{1}{4 - (\sqrt{2})^k \vartheta} \right) - \ln(4 + \vartheta) + \ln \left((\sqrt{2})^k - 4 \right) \right). \end{aligned}$$

Вычисление четырех коэффициентов влияния от каждой ячейки дальней зоны требует 28 операций, таким образом, общее число операций

$$Q_{\text{дал}} = \beta \cdot 28N_{\text{дал}} \cdot 2^k = \frac{896 \cdot 2^k \cdot \beta}{\vartheta^2} \left(4 \left(\frac{1}{4 + \vartheta} + \frac{1}{4 - (\sqrt{2})^k \vartheta} \right) + \ln \left(\frac{(\sqrt{2})^k - 4}{4 + \vartheta} \right) \right),$$

где β — коэффициент, учитывающий то, что для ячеек, отличных от центральной, число $N_{\text{дал}}$ будет несколько отличаться от приведенного выше значения. В результате обработки проведенных вычислительных экспериментов было установлено, что выбор значения $\beta \approx 1,30$ позволяет достаточно точно учесть этот эффект. Из графика, изображенного на рис. 7, видно, что данная оценка хорошо согласуется с результатами расчетов.

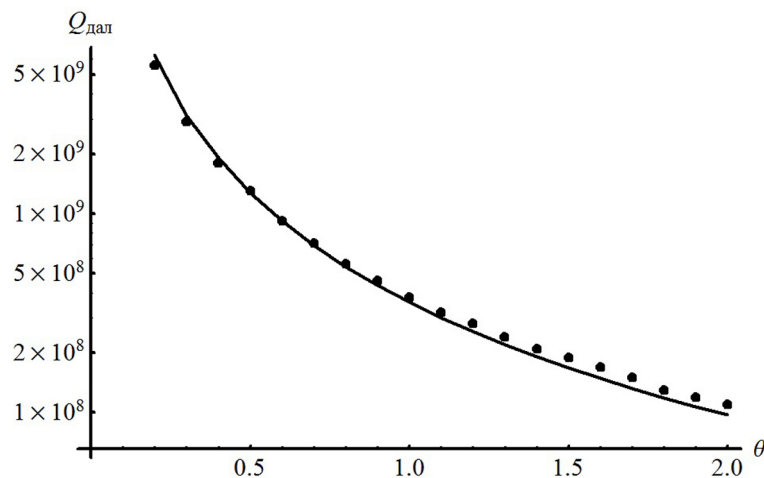


Рис. 7. Количество операций, требуемое для вычисления влияния вихревых элементов, относящихся к дальней зоне. Линия — теоретическая оценка, точки — результат вычислительного эксперимента ($k = 16$)

Вычисление скоростей вихревых элементов, находящихся внутри ячеек нижнего уровня, через рассчитанные коэффициенты требует выполнения $Q_{\text{ниж}} = 4n$ операций.

Итак, общее число операций, необходимое для вычисления скорости на одном шаге расчета, составляет

$$\begin{aligned} Q &= Q_{\text{бл}} + Q_{\text{дал}} + Q_{\text{ниж}} = \\ &= \frac{24n^2}{2^k} \left(\frac{4}{\vartheta} \right)^2 \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right)^2 \left(1 - \frac{4}{\vartheta (\sqrt{2})^k} \left(1 - \alpha \frac{(\sqrt{2})^k - 1}{\sqrt{n}} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{896 \cdot 2^k \cdot \beta}{\vartheta^2} \left(4 \left(\frac{1}{4 + \vartheta} + \frac{1}{4 - (\sqrt{2})^k \vartheta} \right) + \ln \left(\frac{(\sqrt{2})^k - 4}{4 + \vartheta} \right) \right) + 4n. \quad (6) \end{aligned}$$

График на рис. 8 показывает, что данная оценка хорошо согласуется с результатами вычислительного эксперимента.

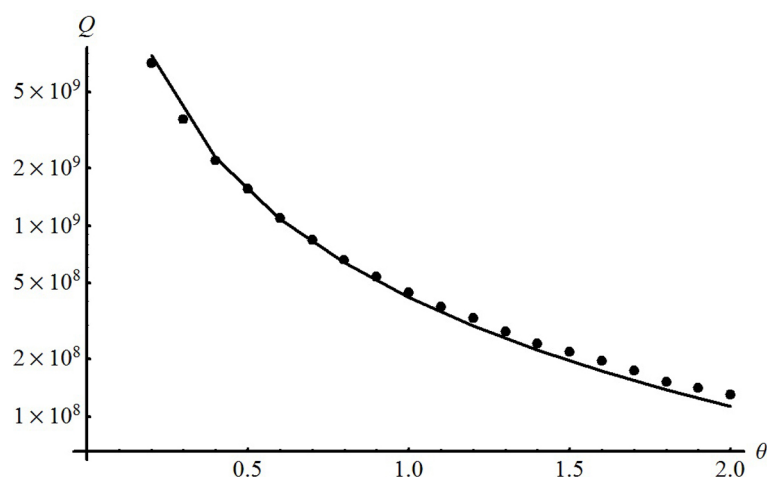


Рис. 8. Общее количество операций, требуемое для выполнения одного шага в зависимости от времени. Линия — теоретическая оценка, точки — результат вычислительного эксперимента ($k = 16$)

7. Оптимизация параметров алгоритма быстрого метода

Построенные оценки позволяют подобрать такие параметры алгоритма быстрого метода, которые обеспечивают наименьшую вычислительную трудоемкость. В частности, актуальной является задача оптимального выбора максимальной глубины дерева, т. е. такого значения параметра k при котором общее число операций умножения/деления в алгоритме будет наименьшим. В связи с достаточной сложностью оценки (6) аналитическое определение оптимального значения k затруднительно. Более рациональным представляется метод перебора, когда при известных значениях n и ϑ вычисляется число операций для различных k и выбирается наилучший вариант. К примеру, график зависимости Q от k для $\vartheta = 0,6$ в сравнении с результатами вычислительного эксперимента приведен на рис. 9.



Рис. 9. Зависимость общего числа операций от максимальной глубины дерева k для $\vartheta = 0,6$. Линия — теоретическая оценка, точки — результат вычислительного эксперимента

Из графика на рис. 9 видно, что оптимальной в данном случае является глубина дерева $k = 15$, что хорошо согласуется с результатами расчетов: при $n = 175\,674$, $\vartheta = 0,6$ и $k = 15$ количество операций составляет $1,0 \cdot 10^9$, что меньше, чем при $k = 14$ и $k = 16$, для которых Q близко к $1,6 \cdot 10^9$ и $1,1 \cdot 10^9$ соответственно. Отметим, что даже небольшое отклонение параметра k от оптимального значения (на 1–2 уровня) может приводить к существенному снижению эффективности быстрого метода; количество выполняемых операций умножения и деления может при этом возрастать в два и более раза.

Полученная оценка для общей трудоемкости алгоритма быстрого метода лучше согласуется с экспериментальными данными по сравнению с оценкой из работы [7], особенно в диапазоне $0,2 \leq \vartheta \leq 1,0$, который наиболее интересен с практической точки зрения. Это видно из графика, изображенного на рис. 10.

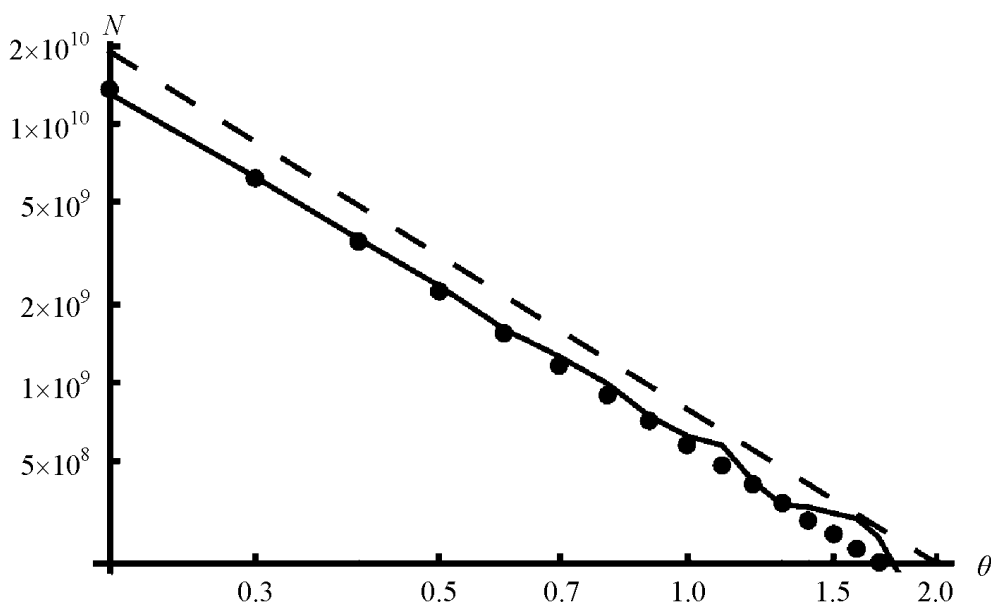


Рис. 10. Количество операций в зависимости от ϑ . Пунктир — оценка из [7], точки — оценка, полученная в данной работе, сплошная линия — результат вычислительного эксперимента ($k = 14$, $n = 175\,674$)

Таким образом, при $k = 15$ для вычисления конвективных скоростей вихревых элементов быстрым методом требуется выполнить порядка $1,0 \cdot 10^9$ операций, в то время как для решения этой же задачи прямым методом необходимо выполнить $6(175\,674)^2 \approx 185,2 \cdot 10^9$ операций. Следовательно, использование быстрого метода позволяет сократить время счета почти в 200 раз, что существенно расширяет возможности и область применимости вихревых методов вычислительной аэрогидродинамики.

Отметим, что время выполнения расчетов может быть сокращено еще сильнее за счет использования параллельных вычислительных технологий [8], при этом расчеты показывают, что алгоритм быстрого метода обладает хорошей распараллеливаемостью, лишь немного проигрывая по этому показателю прямому методу.

Заключение

Для модельной задачи построена оценка трудоемкости алгоритма быстрого метода вычисления конвективных скоростей вихревых элементов. Полученная оценка хорошо согласуется с результатами вычислительных экспериментов и является более точной, чем известные в литературе оценки. Данная оценка позволяет определить оптимальную глубину дерева, и тем самым использовать быстрый метод максимально эффективно.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-6482.2012.8) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-255.2012.8).

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 846 с.
2. Дынникова Г.Я. Аналог интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 1. С. 31–41.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 536 с.
4. Barnes J., Hut P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm // Nature. 1986. Vol. 324, no. 4. P. 446–449.
5. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения «задачи N тел» при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1456.
6. Гирча А.И. Быстрый алгоритм решения «Задачи N тел» в контексте численного метода вязких вихревых доменов // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 1. С. 47–52.
7. Морева В.С. Способы ускорения вычислений при решении плоских задач аэродинамики методом вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 83–95.
8. Лукин В.В., Марчевский И.К., Морева В.С., Попов А.Ю., Шаповалов К.Л., Щеглов Г.А. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч. 2. Примеры решения задач // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2012. № 4. С. 82–102.

**Estimation of computational complexity
of the fast numerical algorithm for calculating vortex influence
in the vortex element method**

10, October 2013

DOI: 10.7463/1013.0604030

Kuzmina K. S., Marchevsky I. K.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federationkuz-ksen-serg@yandex.ruiliamarchevsky@mail.ru

In this paper the authors consider a fast numerical algorithm for calculating convective velocities in the vortex element method. This algorithm is based on derivation of a tree of rectangular regions which contain vortex elements. Influence of parameters of the fast method on computational complexity of the algorithm was analyzed. The number of arithmetic operations required for calculating velocities of all vortex elements was evaluated for modeling an evolution of vortex motion in an ideal incompressible liquid. This theoretical estimation is in good agreement with the results of the numerical experiment. The developed approach could be useful in practice because it allows to select optimal values of the algorithm parameters a priori.

References

1. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Mechanics]. Moscow, Drofa, 2003. 846 p.
2. Dynnikova G.Ya. Analog integralov Bernulli i Koshi-Lagranzha dlya nestatsionarnogo vikhrevogo techeniya ideal'noy neszhimayemoy zhidkosti [An analog of the Bernoulli and Cauchy-Lagrange integrals for a time-dependent vortex flow of an ideal incompressible fluid]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2000, no. 1, pp. 31–41. (English Translation: *Fluid Dynamics*, January-February 2000, vol. 35, iss. 1, pp. 24–32. DOI: 10.1007/BF02698782).
3. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. V 2 t. T. 1* [Mechanics of continuum. In 2 vols. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1976. 536 p.
4. Barnes J., Hut P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 1986, vol. 324, no. 4, pp. 446–449. DOI: 10.1038/324446a0.

5. Dynnikova G.Ya. Ispol'zovanie bystrogo metoda resheniya "zadachi N tel" pri vikhrevom modelirovanii techeniy [Fast technique for solving the N-body problem in flow simulation by vortex methods]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2009, vol. 49, no. 8, pp. 1458–1456. (English Translation: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, August 2009, vol. 49, iss. 8, pp. 1389–1396. DOI: 10.1134/S0965542509080090).
6. Gircha A.I. Bystryy algoritm resheniya "Zadachi N tel" v kontekste chislennogo metoda vyazkikh vikhrevykh domenov [Fast algorithm for solving the N-body problem in context of numerical method of viscous vortex domains]. *Informatsionnye tekhnologii modelirovaniya i upravleniya* [Information technology of modeling and control], 2008, no. 1, pp. 47–52.
7. Moreva V.S. Sposoby uskoreniya vychisleniy pri reshenii ploskikh zadach aerodinamiki metodom vikhrevykh elementov [Ways for calculation speed-up in solving 2D aerodynamics problems by vortex element method]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2011, spets. vyp. "Prikladnaya matematika" [spec. iss. "Applied mathematics"], pp. 83–95.
8. Lukin V.V., Marchevskiy I.K., Moreva V.S., Popov A.Yu., Shapovalov K.L., Shcheglov G.A. Uchebno-eksperimental'nyy vychislitel'nyy klaster. Ch. 2. Primery resheniya zadach [Computing cluster for training and experiments. Part 2. Examples of solving problems]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2012, no. 4, pp. 82–102.