

О тензорной нелинейности сред, проявляющих существенное различие в сопротивлении растяжению и сжатию

05, май 2013

DOI: 10.7463/0513.0571202

Комков К. Ф.

УДК 539.374.376

Россия, Балашиха, Военно-технический университет

06kfk38@mail.ru

Информацию о том, что деформация многих изотропных сред может проходить с отклонением от закона пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций, можно найти в работе [1]. Проводя анализ результатов своих экспериментальных работ [2], [3] и [4] с разрыхляющимися материалами, авторы обнаруживают заметное проявление нелинейных эффектов и отмечают необходимость применения наиболее общего закона формоизменения. Однако, несмотря на эти выводы они для отражения разрыхления, сохраняя свои подходы, ограничиваются приближенными выражениями, косвенно связанными с физическими уравнениями. Математические трудности, которые возникают из-за необходимости учета больших изменений модулей упругости для разных напряженных состояний, разрешаются введением дополнительных сложных параметров, зависящих от касательных напряжений, что приводит к квадратичной зависимости деформаций от напряжений, но позволяет им добиться удовлетворительного описания опытных кривых.

Переход к более общему математическому аппарату [1], а именно к учету тензорной нелинейности, показывает необходимость обоснования нового более общего подхода к обработке результатов испытаний, согласованного с теорией. Цель данной работы направлена на создание такой методики определения характеристик, которая учитывает достоинства тензорно-нелинейных уравнений для описания особенностей механических свойств отмеченных материалов. Методика использует результаты экспериментальных исследований [2], [3] и [4], прежде всего серого чугуна во всем диапазоне плоского напряженного состояния. Она включает в себя так же опыт работ [5] и [6], проведенных для изучения тензорной нелинейности наполненных полимерных и пластических материалов.

Разработанная модель сложной среды позволила более естественно разделить процессы формоизменения и изменения объема в соответствии с предложенными уравнениями. Формоизменение по-прежнему описывается двумя материальными функциями. Последние могут быть приведены, в соответствии с работой [1], к обобщенному

модулю и фазе подобия девиаторов. В общем случае значения этих жесткостей заметно изменяются не только с ростом деформации, но и с изменением вида напряженного состояния. Каждому состоянию соответствуют три, отличающиеся между собой модуля сдвига, принадлежащих площадкам с главными касательными напряжениями. Среднее и среднеквадратическое значения этих модулей являются отмеченные материальные функции при тензорных аргументах, которые после их восстановления используются как характеристики среды. Для рассматриваемых в этой работе сред они представляют сопоставимые по своим значениям жесткости, что отражает существенную особенность рассматриваемых материалов.

Вторая (среднеквадратическая) функция входит в уравнение, полученное в работе [5], для шаровых частей тензоров напряжений и деформаций, позволяя описывать эффекты, связанные со склонностью среды к дилатансии в обобщенном смысле - разрыхление, наблюдаемое при свободном деформировании, и дополнительное гидростатическое сжатие при деформации среды в замкнутом объеме. Первое связывают с опытами О. Рейнольдса, второе с опытами Р. Ривлина.

Работа состоит из введения, пяти глав и заключения. Во введении показан новый подход, не используемый ранее в практике обработки результатов экспериментов и для определения деформационных характеристик, а именно «экстраполяцию» опытных данных, как по простому растяжению, так и других состояний до сжатия, за предельную деформацию. Первая глава посвящена описанию методики восстановления дискретных значений материальных функций, описывающих формоизменение любого напряженного состояния. Во второй главе представлены результаты расчетов в графиках, иллюстрирующих возможности математической модели на основе этой методики и проведен анализ поведения коэффициентов при обобщенном модуле, который позволил найти выводы о единственности результатов по определению материальных функций. В третьей главе описан вывод связи тензорной нелинейности с разномодульностью. В четвертой главе дано сравнение теории с результатами испытаний, показана возможность описания эффектов, отражающих их взаимосвязь с тензорной нелинейностью.

Пятая глава посвящена определению деформации разрыхления. С этой целью используются упомянутые уравнения [5] с представлением результатов расчетов по определению деформации от разрыхления и гидростатического напряжения при стесненной деформации. Показана необходимость введения параметра разрыхления и установлено, что накопленную деформацию от разрыхления можно принять в качестве критерия прочности. Дано сравнение этого критерия с результатами испытаний, проведенных в работах [2], [3] и [4]. Оно позволило дать оценку тензорной нелинейности в поведении среды в первом и третьем квадрантах плоского напряженного состояния. В заключении приведены основные выводы.

Введение

Методика восстановления материальных функций формоизменения основывается на сравнении модулей сдвига или податливостей, найденных по трем диаграммам $S_0 \sim e_0$ при

постоянных значениях интенсивности деформации. Характерная особенность рассматриваемых материалов состоит в том, что предельная деформация при растяжении значительно меньше предельной деформации при сжатии. Методика предыдущих наших работ [5], [6] позволяла восстанавливать характеристики в диапазоне деформаций, не превышающих ϵ_{0p} - предельной деформации при растяжении. За этим пределом информация о поведении материала при растяжении отсутствует, а при сжатии остается не востребованной большая часть диаграммы.

Эта трудность может быть преодолена, если изыскать путь «экстраполяции» интенсивности напряжений S_0 за предел прочности при растяжении $\sigma_{сп}$. Необходимость «экстраполяции» возникла после проведения расчетов по результатам обработки испытаний и других материалов [5]. На рис. 1 а) приведены три диаграммы в координатах $S_0 \sim \epsilon_0$ (по исследованиям серого чугуна в работах [2], [3] и [4], близкого по составу к СЧ15-32): кривая 1 относится к испытанию на сжатие, кривая 2 – чистый сдвиг при кручении и кривая 3 – на растяжение. Вертикальные штриховые линии отмечают предельные деформации при растяжении и кручении.

Располагая диаграммами для растяжения и сжатия при деформациях, не превышающих предельного для растяжения, были проведены вычисления секущих модулей сдвига G_c , графически представленных на рис. 1 б) кривой 2 для сжатия и кривой 3 для растяжения. Их отношение дано кривой 1, представляющей переменный параметр разномодульности $\chi = G_c/G_p$.

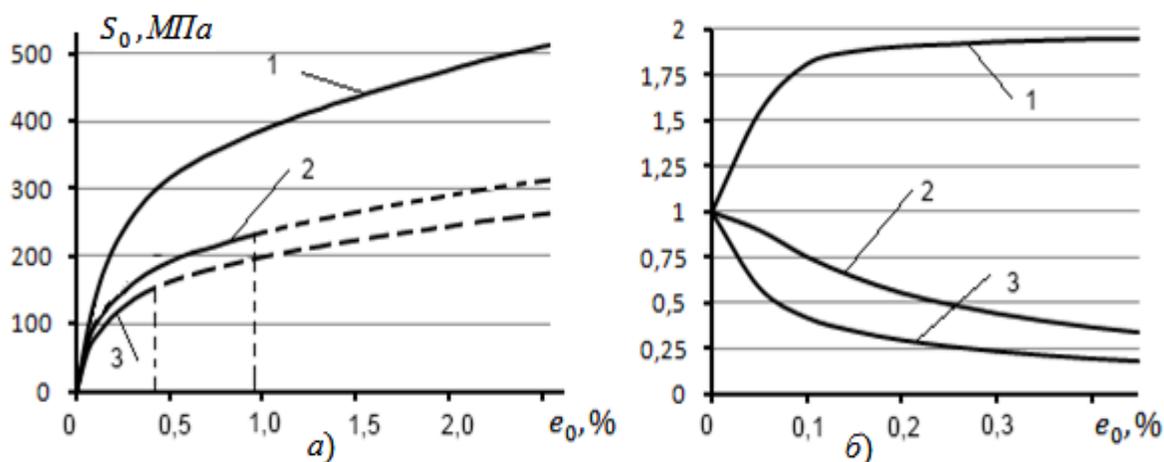


Рис. 1. Диаграммы $S_0 \sim \epsilon_0$ с учетом «экстраполяции»: кривая 1 - при сжатии, 2 - сдвиге, 3 – растяжении; б) зависимости параметра разномодульности - кривая 1, модуля сдвига для сжатия – кривая 2 и – кривая 3 для растяжения от интенсивности деформации.

Кривая 1 показывает, что приближаясь к деформации e_{0p} , значение параметра стремится к постоянной величине, которая и была принята для «экстраполяции» двух других диаграмм по диаграмме для сжатия. «Экстраполяция» предполагает, что за предельной деформацией сопротивление продолжается при напряжениях $S_{0p} = S_{0c}/\chi$, а при сдвиге при $S_{0\tau} = (S_{0c} + S_{0p})/(\chi + 1/\chi)$, где S_{0p} , $S_{0\tau}$ и S_{0c} — интенсивности напряжений при растяжении, чистом сдвиге и сжатии. Результаты испытаний на кручение работы [3] и расчет по этому выражению для напряжения $S_{0\tau}$ по данным о растяжении и сжатии практически совпадают и приведены кривой 2 рис. 1 а). Алгоритму определения $S_{0\tau}$ будет дано пояснение ниже. В общем случае параметр разномодульности может быть и не постоянной величиной, изменяясь, например, по наклонной прямой линии, фиксируя закономерность изменения χ в конце кривой 1 рис. 1 б). Штриховые линии соответствуют участкам диаграмм после «экстраполяции».

Если три кривые рис. 1 а) для растяжения, чистого сдвига и сжатия с учетом «экстраполяции» принять как исходные данные, то для описания формоизменения можно было бы воспользоваться методикой, описанной в работе [6] для пластических материалов. С той разницей, что для них нет необходимости определять пределы текучести.

1. Методика восстановления материальных функций

Изложение теоретического материала не следует считать повтором того, что представлено в [6] по этому вопросу, поскольку учет особенностей рассматриваемых материалов требует иного подхода, необходимого для обработки опытных данных. Эта задача связана с подробным анализом тензорно-нелинейных уравнений связи девиаторов напряжений и деформаций:

$$e_{ij} = (\Phi_m/2)S_{ij} + \Phi_d(S_{i\alpha}S_{\alpha j} - 2/9S_0^2\delta_{ij})/S_0, \quad (1)$$

$$S_{ij} = 2G_m e_{ij} - G_d(e_{i\alpha}e_{\alpha j} - 1/2e_0^2\delta_{ij})/e_0; \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где S_{ij} , e_{ij} — компоненты девиатора напряжений и деформаций, соответственно, S_0 , e_0 — интенсивности напряжений и деформаций, определяемые по соотношениям

$$S_0 = (3/2S_{ij}S_{ij})^{1/2}, \quad e_0 = (2/3e_{ij}e_{ij})^{1/2}, \quad (3)$$

а Φ_m и Φ_d в уравнениях (1), G_m и G_d в уравнениях (2) - материальные функции при тензорных аргументах, представляющие собой среднюю и среднеквадратическую, первые - податливость, а вторые - жесткость после их восстановления в качестве характеристик по результатам испытаний образцов конкретного материала

$$\Phi_m = \phi_i / 3 = \Phi_\theta \sin(2\theta + \vartheta) / \sin 3\theta, \quad (4)$$

$$\Phi_d = \{[(\phi_j - \phi_\alpha)^2] / 8\}^{1/2} = 3\Phi_\theta \sin(\theta - \vartheta) / (2 \sin 3\theta), \quad (5)$$

$$G_m = G_i / 3 = G_\theta \sin(2\vartheta + \theta) / \sin 3\theta, \quad (6)$$

$$G_d = \{(8/9)[(G_j - G_\alpha)^2]\}^{1/2} = 4G_\theta \sin(\theta - \vartheta) / \sin 3\theta; (i, j, \alpha = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Первые равенства в приведенных выражениях не только оправдывают название этих функций, но и они позволяют сделать начальный шаг к их определению по результатам испытаний. В уравнениях В. В. Новожилова [1] они представляются в виде произведения двух величин: $\Phi_m = \Phi_\theta \varphi_m$, $\Phi_d = \Phi_\theta \varphi_d$, а $G_m = G_\theta g_m$, $G_d = G_\theta g_d$, где $G_\theta = S_0 / 3e_0$ - обобщенный модуль сдвига, а $\Phi_\theta = 3e_0 / S_0$ - обобщенная податливость. Значения последних характеристик при одном и том же угле θ связаны равенством $G_\theta = 1 / \Phi_\theta$. Но податливость является функцией инвариантов тензора напряжений, а модуль - инвариантов тензора деформаций. Эти функции определяются через средние и среднеквадратические величины по соотношениям:

$$\Phi_\theta = [\Phi_m^2 + (4/3)\Phi_m \Phi_d \cos 3\theta + (4/9)\Phi_d^2]^{1/2}, \quad (8)$$

$$G_\theta = [G_m^2 - (1/2)G_m G_d \cos 3\vartheta + G_d^2 / 16]^{1/2}. \quad (9)$$

Из последних следуют условия, которым должны подчиняться значения тригонометрических коэффициентов, но в работе [6] не использовались:

$$[\varphi_m^2 + (4/3)\varphi_m \varphi_d \cos 3\theta + (4/9)\varphi_d^2]^{1/2} = 1, \quad (10)$$

$$[g_m^2 - (1/2)g_m g_d \cos 3\vartheta + g_d^2 / 16]^{1/2} = 1. \quad (11)$$

Функции $\phi_i = \gamma_i / \tau_i$ и $G_i = \tau_i / \gamma_i$ являются податливостями и модулями сдвига в направлении главных касательных напряжений, которые связаны со своими средними и среднеквадратическими характеристиками формулами:

$$\phi_i = \Phi_m - 2\Phi_d c_i/3 = \Phi_\theta(\varphi_m - 2\varphi_d c_i/3), \quad (12)$$

$$G_i = G_m + G_d d_i/4 = G_\theta(g_m + g_d d_i/4), \quad (13)$$

из которых достаточно отчетливо видно, что эти функции отличаются по своим значениям, если среднеквадратические характеристики Φ_d и G_d или коэффициенты φ_d и g_d не равны нулю. Именно эти характеристики или коэффициенты несут информацию об анизотропии сопровождающую нелинейную деформацию, то есть о тензорной нелинейности.

Тригонометрическим коэффициентам φ_i и g_i , а так же g_m и g_d , исходя из определений для $\tau_i = (G_j - G_\alpha)/2$ — главных касательных напряжений и $\gamma_i = e_j - e_\alpha$ — главных сдвигов и определений (6) и (7), можно придать следующие выражения:

$$\begin{aligned} g_i &= (c_j - c_\alpha)/(d_j - d_\alpha) = G_i/G_\theta, \\ g_m &= g_i/3, \quad g_d = \{(8/9)[(g_j - g_\alpha)^2]\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Их значения так же при одном и том же угле θ можно найти из равенства $g_i = 1/\varphi_i$.

Величины c_i используются для удобства преобразований:

$$c_1 = 2 \cos \theta, \quad c_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta, \quad c_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) \quad (15)$$

а d_i имеют аналогичную связь с углом ϑ . Углы вида напряженного и деформированного состояний определяются из соотношений:

$$\vartheta = \theta - \omega = 1/3 \arccos [4e_{ij}e_{j\alpha}e_{\alpha i}/(3e_0^3)], \quad (16)$$

$$\theta = 1/3 \arccos [27S_{ij}S_{j\alpha}S_{\alpha i}/(2S_0^3)], \quad 0 \leq \theta \text{ и } \vartheta \leq \pi/3. \quad (17)$$

Используя (4), (5), (6) и (7) находим соотношение

$$tg \omega = [2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta)] = G_d \sin 3\vartheta / (4G_m - G_d \cos 3\vartheta), \quad (18)$$

из которого следует, что при наличии Φ_d и Φ_m или G_d и G_m можно найти фазу подобия девиаторов. Равенства $G_\theta = 1/\Phi_\theta$ и соотношение (18) используются ниже для проверки вычислительного процесса после восстановления функций.

Методика определяет дискретные значения материальных функций, используя диаграммы $S_0 \sim e_0$, которые далее называются базовыми диаграммами, в следующей

последовательности. Для каждого значения деформации e_0 , отстоящих друг от друга на расстояние отрезка Δe_0 , по экспериментальным кривым рис.1 а) определяются напряжения S_0 и податливости $\Phi_{\theta j} = 3e_0/S_0$. Индекс j изменяется в пределах двух – трех десятков. Расчет проводится в два этапа. Анализ соотношения (12) для податливостей при сдвиге Φ_i позволил принять равенства:

$$\Phi_1 \approx \Phi_c, \Phi_2 \approx \Phi_\tau, \Phi_3 \approx \Phi_p, \quad (19)$$

при этом учитывалось, что соотношения (8) для состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ принимает вид $\Phi_\theta = \Phi_m \pm 2\Phi_d/3$, а для $\theta = \pi/6$, $\Phi_\theta = [\Phi_m^2 + 4\Phi_d^2/9]^{1/2}$.

При этих углах θ обобщенная податливость Φ_θ имеет значения Φ_p, Φ_c и Φ_τ , соответственно, при каждом j . На первом этапе, предполагая существование напряженного состояния, в котором в направлении главных касательных напряжений проявляются эти же податливости Φ_p, Φ_c и Φ_τ , согласно первым равенствам в (4) и (5) устанавливаются средние значения функций, используемые для всех углов θ :

$$\Phi_{mcp} = \Phi_{ij}/3, \quad \Phi_{dcp} = \{[(\Phi_c - \Phi_\tau)^2 + (\Phi_\tau - \Phi_p)^2 + (\Phi_p - \Phi_c)^2]/8\}^{1/2}. \quad (20)$$

При вычислении этих функций индекс податливостей Φ_i можно не уточнять, достаточно, чтобы сами Φ_i отличались между собой. При известных значениях угла θ , а так же Φ_{mcp} и Φ_{dcp} определяется предварительно угол фазы подобия девиаторов по первому равенству соотношения (18) и угол вида деформированного состояния, $\vartheta = \theta - \omega$.

Равенства (19) позволяют найти обобщенную податливость при любом значении θ по соотношению

$$\Phi_\theta = a_1 + a_2 \cos 3\theta + a_3 (\cos 3\theta)^2, \quad (21)$$

которое при коэффициентах $a_1 = \Phi_\tau$, $a_2 = (\Phi_p - \Phi_c)/2$, $a_3 = (\Phi_c + \Phi_p - 2\Phi_\tau)/2$ распределяет положение податливостей Φ_p, Φ_τ и Φ_c по своим значениям угла θ .

Соотношение (21) является плавной аппроксимацией Φ_θ по оси θ . Оно уменьшает число итераций по сравнению с (8), которое тоже можно использовать с этой целью. Следует отметить, что для аппроксимации данных по оси θ использовались и другие функции,

например, квадратичная парабола, но заметного влияния на конечные результаты не было обнаружено.

На втором этапе каждый цикл вычислений проводится при $\theta = const$. Изменяется только деформация e_0 от нулевого значения до предельного при сжатии с постоянным шагом. А затем восстанавливаются характеристики Φ_m по соотношению (4), Φ_d по (5) и G_m по (6) и G_d по (7), то есть по их вторым равенствам перечисленных формул с тригонометрическими множителями. Предварительно необходимо вычислить Φ_θ (по 21) и $G_\theta = 1/\Phi_\theta$. Опыт расчетов показывает, что вторая итерация дает практически те же значения. Далее для последующих циклов значение угла θ изменяется на $\Delta\theta$, которое принималось равным 5 градусам.

Цикл заканчивается упомянутой проверкой. Для напряженных состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ все перечисленные характеристики вычислялись при смещениях от точных значений на одну десятую градуса. При отработке программы необходимы расчеты коэффициентов по соотношениям (14) и проверка их значений по условиям (10) и (11). Тем самым устанавливается точность определения углов ω и ϑ .

2. Результаты расчетов характеристик формоизменения и коэффициентов

О поведении восстановленных функций G_m , G_d , Φ_m , Φ_d и фазы ω по данной методике можно представить по графикам на рис. 2. Поскольку характеристики жесткости серого чугуна G_m , G_d (кривые 1 и 4) и G_θ являются быстро снижающимися функциями от e_0 , поэтому графики на рис. 2 а) приведены после логарифмирования их значений. Кривая для обобщенного модуля G_θ накладывается на кривую 1 для среднего, G_m . Для сравнения жесткостей и податливостей удобно последние приводить к обратным функциям, то есть к $1/\Phi_m$ и $1/\Phi_d$. Они на рис. 2 а) показаны кривыми 2 и 3 так же после логарифмирования. Характеристики Φ_m , G_m , G_d , Φ_d , G_d и $tg\omega$ (с постоянными множителями) иллюстрируют деформационные свойства, проявляющиеся в процессе формоизменения. Графики для функций $\ln G_m$ и $\ln(1/\Phi_m)$ (кривые 1 и 2 рис. 2 а)) различаются незначительно.

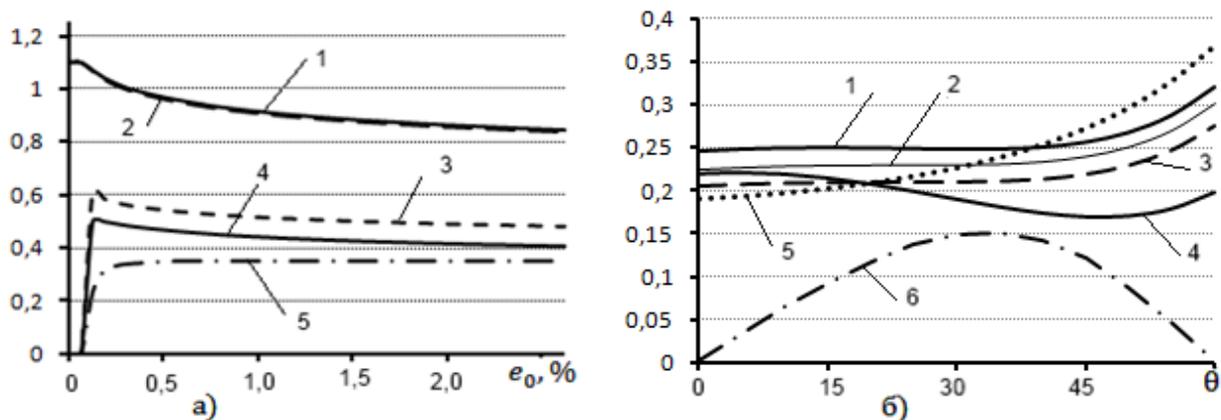


Рис. 2. Изменение характеристик в зависимости: а) от деформации e_0 при $\theta = 35,4^\circ$. Кривая 1 представляет $\text{Ln}G_m/10$, 2 - $\text{Ln}(1/\Phi_m)/10$, 3 - $\text{Ln}(1/\Phi_d)/20$, 4 - $\text{Ln}G_d/20$ и 5 - $\omega/30$; б) от угла θ при $e_0 = 0,48\%$. Кривая 1 - G_θ/μ , 2 - $(1/\Phi_m)/\mu$, 3 - $(1/\Phi_d)/4\mu$, 4 - G_d/μ , 5 - G_θ/μ и кривая 6 - $\omega/70$.

Обращаясь к определениям (4) и (6) этих функций и учитывая равенство $G_\theta = 1/\Phi_\theta$, можно отметить, что разница между углами θ и ϑ незначительно проявляется в расчетах Φ_m и G_m , хотя фаза ω достигает более 10 градусов (кривая 5). При вычислениях среднеквадратических характеристик ее влияние становится заметным и разница в значениях G_d и $1/\Phi_d$ составляет более 18%.

Программа может выполнять так же циклы вычислений при деформации $e_0 = \text{const}$ с изменением угла θ от нулевого значения до $\theta = \pi/3$. На рис. 2 б) приведены графики зависимости всех перечисленных характеристик без предварительного логарифмирования от угла θ при постоянной деформации равной предельной в испытаниях на растяжение. Обобщенный модуль G_θ (кривая 5) монотонно возрастает в соответствии с ростом напряжения при данной деформации для каждой последующей диаграммы $S_0 \sim e_0$ от растяжения к сжатию. Средний модуль G_m (кривая 1) интенсивно растет только при напряженных состояниях близких к сжатию.

Кривая 2, конгруэнтная предшествующей, относится к функции $1/\Phi_m$. Кривая 6 дает представление об изменении фазы подобия девиаторов. Кривые 3 и 4 показывают изменение среднеквадратических характеристик, G_d и $1/\Phi_d$. Все характеристики приведены с постоянным множителем $1/\mu$, лишь для функции $1/\Phi_d$ множитель равен $1/4\mu$. Последние

различаются как по величине, так и по форме. И это вполне объяснимо: исходя из равенства (18), можно найти, что при допущении $G_m \cong 1/\Phi_m$, сравнимы только величины, найденные по следующему равенству

$$1/\Phi_d \cong 2[4G_m - G_d(\cos 3\vartheta + \sin 3\vartheta / \operatorname{tg} 3\vartheta)]G_m \sin 3\vartheta / G_d \sin 3\vartheta$$

При наличии сведений о модулях G_m и G_d по соотношению (13) можно определить модули в направлении главных касательных напряжений: G_i . Графики этих модулей на рис. 3 а) приведены кривыми 1, 2 и 3, показывающие различие значений и нелинейную зависимость от угла ϑ . Пунктирная кривая для напряжения S_0 подчеркивает особенность данного материала, состоящая в том, что при постоянном значении интенсивности деформации e_0 интенсивность напряжений изменяется в весьма большом диапазоне. Следует отметить, что среди модулей G_i на рис. 3 а) только три имеют связь с опытными данными - это G_p в точке А, G_c в точке В и G_τ в точке С. Остальные приобретают свои значения с помощью алгоритма (13).

Вертикальная штриховая линия отмечает напряженное состояние, соответствующее предполагаемому состоянию при вычислении $\Phi_{m\text{ср}}$ и $\Phi_{d\text{ср}}$. Это состояние или близкое к нему можно выявить путем сравнения относительных значений G_i/G_c с относительными значениями величин: $\phi_1/\Phi_c = 1$, ϕ_2/Φ_c , ϕ_3/Φ_c , относящихся к равенству (19). Здесь G_c – секущий модуль упругости на диаграмме сжатия, соответствующий предельной деформации при растяжении. Величины $1/\Phi_p$, $1/\Phi_\tau$ и $1/\Phi_c$, где $\Phi_c = 1/G_c$, найденные по исходным данным, относятся к разным напряженным состояниям.

В качестве добавления следует отметить, что описанная методика использует податливости простых напряженных состояний, чтобы определить наибольшее значение фазы подобия девиаторов по равенству (18). В методике эта фаза распределяется по другим ϑ , что позволяет определить угол ϑ и все податливости и модули. Если аналогичные графики построить для деформации, например, соответствующей предельной при испытаниях на кручение $e_{0\tau}$, то начальные значения для характеристик G_ϑ , Φ_m , G_m , Φ_d и G_d (кривые рис. 2 б)) поднимутся примерно в 1,4 раза, но форма их существенно не изменится.

На рис. 3 б) кривыми 1, 2 и 3 (сплошные линии) иллюстрируется изменение главных касательных напряжений τ_i и кривыми 1, 2 и 3 (штриховые линии) изменение главных сдвиговых деформаций γ_i , которые по каждому индексу различаются по форме, подчеркивая их явную непропорциональность, а, следовательно, и тензорную нелинейность. Особенно это касается кривых с номером 2, соответствующим $I_{\tau_{max}I}$ и $I_{\gamma_{max}I}$.

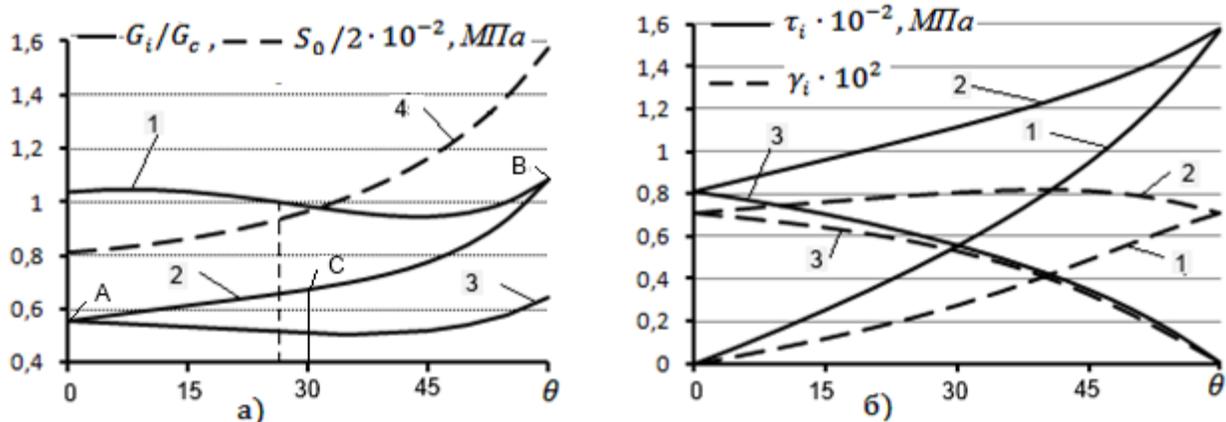


Рис. 3. а) Зависимость модулей в направлении главных касательных напряжений G_i/G_c от угла θ : кривые 1, 2 и 3 в соответствии с индексами при модулях G_i и кривая 4 для напряжения $S_0/2 \cdot 10^{-2}$; б) зависимость главных касательных напряжений τ_i и главных деформаций сдвига γ_i от угла θ .

Объединение двух величин в одно, например, $G_m = G_\theta g_m$, $G_d = G_\theta g_d$, дало возможность понять физическую сущность каждого и упростить формулировку уравнений (1) и (2). Графики на рис. 4 а) б) и в) дают объемное представление о поведении трех характеристик как по оси e_0 , так и θ (штриховые участки кривых относятся к «экстраполяции» характеристик). Принципиальное отличие кривых для обобщенного модуля $G_\theta = S_0/3e_0$ от аналогичных для модулей G_m и G_d , состоит в том, что они строятся после обработки базовых диаграмм $S_0 \sim e_0$, полученных по результатам испытаний. Обработка выполняется для ограниченного числа напряженных состояний, например растяжения, чистого сдвига и сжатия. Кривые 1, 2 и 3 на рис. 4 а) отображают данные по модулю G_θ .

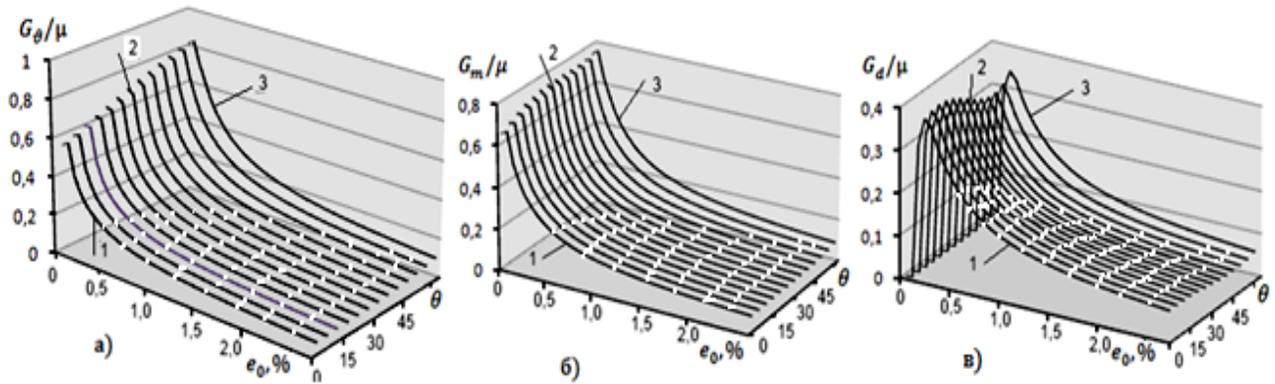


Рис. 4. Зависимость модулей: а) G_{θ} ; б) G_m ; $G_{dв}$) от деформации e_0 и угла θ . Кривая 1 – растяжение, 2 – чистый сдвиг и 3 – сжатие (штриховые участки кривых относятся к «экстраполяции» характеристик).

Кривые рис. 4 б) и в) получены в процессе численной обработки (восстановления) первых по соотношениям (6) и (7). Если предварительно вычислить модули в направлении главных касательных напряжений G_i , и дать объемное им представление, то получим аналогичные, но трехслойные графики. Поперечные сечения последних имеют графики, которые приведены кривыми 1, 2 и 3 на рис. 3 а). Средние значения и среднеквадратические отклонения модулей G_i (с постоянным множителем 8/9) дают для каждого напряженного состояния функции формоизменения, названные выше модулями G_m и G_d , показанные на рис. 4 б) и в). Последние, G_d , хотя и имеют похожий характер изменений по e_0 , но зависимость от угла θ проявляется заметнее. Здесь и ранее μ - постоянная величина, представляющая модуль упругости при сдвиге, определяемый для серого чугуна по начальному участку диаграммы сжатия. При вычислениях для напряженных состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ от точных значений этих углов приходится отказаться, чтобы обойти неопределенность типа 0/0. Выше подробно описано определение модулей, но аналогичный процесс проводится для восстановления податливостей Φ_m и Φ_d .

Восстановление характеристик формоизменения можно проводить и по значениям коэффициентов $g_i = (c_j - c_a)/(d_j - d_a)$, но это не позволяет повысить точность или снизить процедуры вычислительного процесса, поскольку не избавляет от необходимости определения углов ω и ϑ . Однако их анализ, как уже отмечено выше, дал подход к исследованию единственности результатов и проверке на непротиворечивость найденных характеристик формоизменения.

Коэффициенты g_i показывают сколь значительно модули в направлении главных касательных напряжений G_i , отличаются между собой и от обобщенного модуля. На рис. 5 а) сплошными линиями приведены кривые для коэффициента g_1 до предельных значений деформаций, штриховые участки кривых относятся к их «экстраполяции». На рис. 5 б) дано поперечное сечение кривых для коэффициента g_1 и таких же для g_2 и g_3 , графики которых здесь отсутствуют. Кривая 1 представляет коэффициент g_1 , который при $\theta = \pi/3$ равен единице, а с уменьшением угла его значения быстро возрастают до максимального. Коэффициент g_2 изменяется от единицы до единицы по гармоническому закону с незначительными отклонениями от нее. Коэффициент g_3 равен единице при угле $\theta = 0$, а затем уменьшается до значения в токе b. При тензорной линейности все эти коэффициенты равны единице.

Анализ, проведенный путем сравнения зависимостей коэффициентов g_1 в точке **a** и g_3 в точке **b** рис. 5 б), где они при точных значениях углов $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ имеют неопределенность типа 0/0, показал их связь с величиной $\chi = G_c/G_p$, представляющей «текущую разномодульность». Далее он называется параметром разномодульности χ , изменяющимся с ростом деформации. С его помощью установлены в работе [5] предельные значения для коэффициентов g_1 и g_3 .

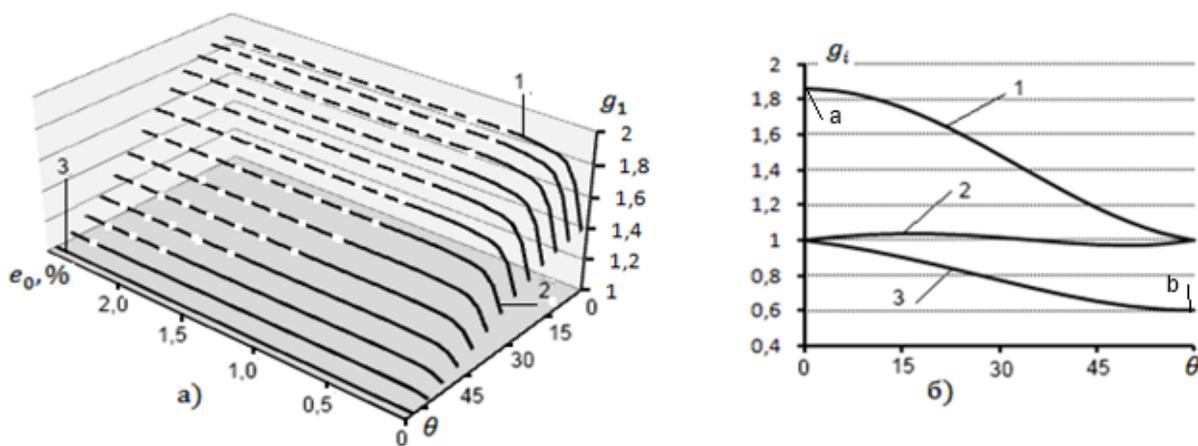


Рис. 5. а) Зависимость коэффициента g_1 от деформации e_0 и угла θ , кривая 1 – растяжение, 2 – чистый сдвиг и 3 – сжатие (штриховые участки кривых относятся к «экстраполяции» коэффициента); б) зависимость коэффициентов g_1 , g_2 и g_3 от угла вида θ при деформации $e_0 = 0,48\%$.

Из этого анализа следует, что коэффициенты связаны с отношением модулей

$$g_1 \leq G_c/G_p = \chi > 1, \quad g_3 \geq G_p/G_c = 1/\chi < 1. \quad (22)$$

Принимая для угла $\theta = 0$ приближенное равенство $g_1 \approx \chi$ и $G_1 \approx \chi G_p$, а $G_2 = G_3 = G_p$, по первым равенствам соотношений (6) и (7) имеем значения для среднего и среднеквадратического модулей:

$$G_m \approx G_p(2 + \chi)/3, \quad G_d \approx 4G_p(\chi - 1)/3. \quad (23)$$

Если разделить полученное на модуль $G_\theta = G_p$, то получим

$$g_m \approx (2 + \chi)/3, \quad g_d \approx 4(\chi - 1)/3. \quad (24)$$

Проверка показывает, что эти значения коэффициентов по соотношению (11) дают точное равенство, которое при угле $\theta = 0$ принимает вид $g_m - g_d/4 = 1$.

Подобные действия для угла $\theta = \pi/3$ и $G_\theta = G_c$, используя второе приближенное равенство $g_3 \approx 1/\chi$ и $G_3 = G_c/\chi$, а $G_1 = G_2 = G_c$ (рис. 3 а)), позволяют найти по соотношениям (6) и (7) значения коэффициентов при сжатии

$$g_m \approx (2\chi + 1)/3\chi, \quad g_d \approx 4(\chi - 1)/3\chi. \quad (25)$$

При этих значениях так же выполняется условие (11), а именно $g_m + g_d/4 = 1$. Полученные выражения для коэффициентов (24) и (25) следует рассматривать не только как оценочные формулы для определения характеристик формоизменения для состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$.

Основное их достоинство заключается в том, что они дают возможность ответить на вопрос о существовании тензорной нелинейности для данных напряженных состояний, поскольку эта нелинейность часто отождествляется с подобием девиаторов напряжений и деформаций. Из соотношений (22) следует весьма значимый вывод: модуль $G_d \neq 0$, если есть различие значений модулей G_p и G_c при простых испытаниях на растяжение и сжатие. Угол ω при состояниях $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ равен нулю по его определению (18).

Как изменяются коэффициенты g_m и g_d при всех других θ и ростом деформации e_0 можно проследить по графикам рис. 6 а) и б). Форма кривых $g_m \sim e_0$ рис 6 а) зависит от

значения угла θ . Начальная деформация, соответствующая линейной зависимости $S_0 \sim e_0$, не проявляет тензорной нелинейности, поэтому здесь коэффициент $g_m = 1$. С ростом деформации до e_{0p} , в пределах $0 < \theta \leq \pi/6$ кривые выпуклые, вначале быстро возрастают до постоянного значения. При углах $\theta > \pi/6$ коэффициент g_m принимает значения меньше единицы, кривые убывают, а далее после e_{0p} принимают постоянное значение, поскольку диаграммы, секущие модули и податливости пропорциональны друг другу, согласно принятой «экстраполяции». При угле $\theta = 0$ этот коэффициент стремится к величине $g_{m \max}$, когда параметр разномодульности χ достигает максимальной величины.

Поведение кривых $g_d \sim e_0$ аналогичное. Они не меняют кривизну (рис. 6 б)), как кривые для коэффициента g_m . С увеличением деформации от нулевой до предельной e_{0p} , значения g_d растут. Максимальное значение $g_{d \max}$ находится на кривой 1, которая соответствует растяжению. Выход коэффициентов на постоянные значения g_m и g_d объясняется их определениями (6) и (7) при пропорциональных секущих модулях. При всех значениях угла θ , в том числе $\theta = 0,1^\circ$ и $\theta = 59,9^\circ$, проверка по условию (11) дает в правой части целую единицу, что тем самым подтверждает достаточную точность определения углов ω , θ и так же значений восстановленных характеристик, а, следовательно, и их единственность.

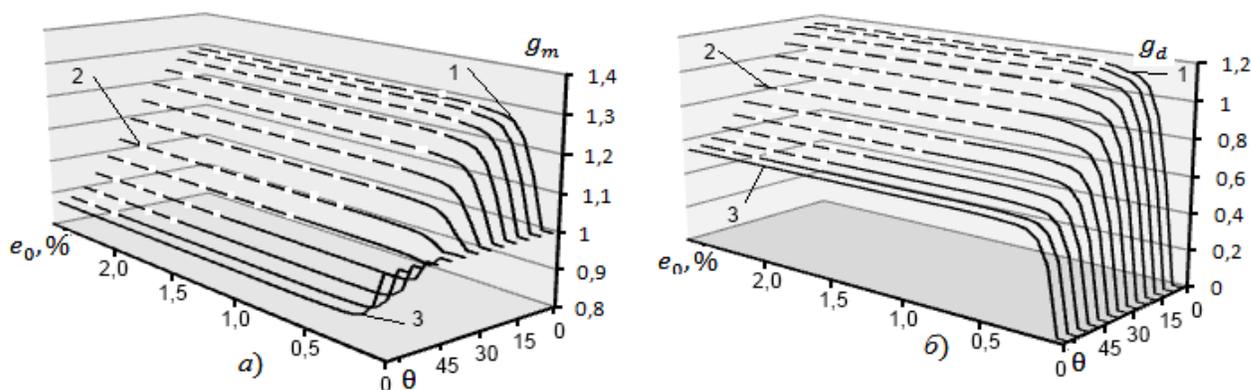


Рис. 6. Зависимость для серого чугуна коэффициентов: а) g_m и б) g_d от деформации e_0 и угла θ . Кривая 1 – растяжение, 2 – чистый сдвиг и 3 – сжатие. Штриховые участки кривых относятся к «экстраполяции» коэффициентов.

Основным показателем тензорной нелинейности является коэффициент g_d , что отмечалось и ранее в [5]. Тензорная нелинейность серого чугуна по сравнению с стабильными металлами отличается прежде всего значением $g_{d \max}$, которое превышает единицу. Оно зависит от степени различия секущих модулей для растяжения и сжатия. Эту особенность и отражает определение (7). Тензорная нелинейность может проявляться и на начальных участках кривых $S_0 \sim e_0$, если имеется начальная разномодульность, возможность описания которой рассмотрена в работе [5].

3. Связь тензорной нелинейности с разномодульностью

На рис. 7 а) кривыми 1 и 2 показана зависимость коэффициентов g_m и g_d от угла θ . Эти кривые представляют собой поперечные сечения кривых рис. 6 а) и б) при деформации $e_0 = e_{0p}$. График 2 для коэффициента g_d позволяет проследить за его изменением, а, следовательно, и изменением тензорной нелинейности. Для растяжения она имеет максимальное значение, а для сжатия минимальное, отражая это свойство серого чугуна при формоизменении.

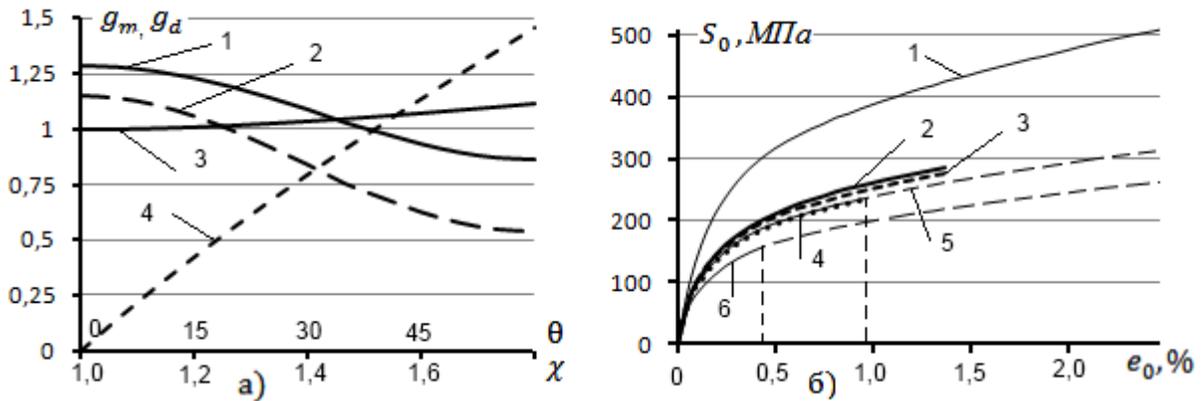


Рис. 7. а) Зависимость коэффициентов g_m и g_d , кривые 1 и 2 от угла θ и кривые 3 и 4 - от параметра разномодульности χ ; б) сравнение диаграмм испытаний серого чугуна: 1 - при сжатии, 2 - сжатия с кручением при $\theta = 35,5^\circ$, 4 - кручении, 6 - растяжении, с расчетными кривыми 3 для сжатия с кручением и 5 для кручения.

Если воспользоваться проведенным выше анализом и принять для состояний $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/3$ приближенные значения для коэффициентов:

$$g_1 \approx \chi, \quad g_2 \approx 1, \quad g_3 \approx 1/\chi, \quad (26)$$

то используя соотношения (14), можно найти приближенные выражения коэффициентов,

$$g_m \approx (\chi^2 + \chi + 1)/3\chi, \quad (27)$$

$$g_d \approx 4(\chi - 1)(\sqrt{\chi^2 + \chi + 1})/3\chi. \quad (28)$$

зависящих от параметра разномодульности χ .

Их можно рассматривать как безразмерные характеристики, по которым можно проводить оценку максимальной жесткости по одной величине χ для вновь создаваемого материала. На рис. 7 а) кривыми 3 и 4 показана зависимость коэффициентов g_m и g_d , найденных по формулам (27) и (28) от возрастающего параметра разномодульности χ . Коэффициент g_d растет значительно быстрее, чем g_m . При значении $\chi \cong 1,53$ коэффициенты равны.

Для серого чугуна $\chi_{max} = 1.94$. При этом $g_{m max} \approx 1,2$, что примерно соответствует начальной точке кривой 1 рис. 7 а). По кривой 4 коэффициент $g_{d max} > 1,5$, что является несколько завышенным значением по сравнению с начальной точкой кривой 2 со значением $g_{d max} = 1,15$. Несмотря на это расхождение значений для $g_{d max}$, формулы (27) и (28) должны найти применение для оценки тензорной нелинейности по испытаниям на растяжение и сжатие вновь исследуемых материалов. Приближенными соотношениями (26), (27) и (28) можно воспользоваться при отсутствии полноты исходных данных. Допуская пропорциональность коэффициентов g_i с интенсивность напряжений, можно принять для чистого сдвига следующее выражение

$$S_{0\tau} = (S_{0c} + S_{0p})/(\chi + 1/\chi). \quad (29)$$

Опыт вычислительных работ показал, что по данному соотношению можно получить приближенную диаграмму для чистого сдвига по исходным данным о напряжениях S_{0p} и S_{0c} . В работе [3] имеются результаты испытаний на кручение. На рис. 7 б) для этого напряженного состояния представлены две кривые. Под номером 4 – опытная (точки) и 5 – (сплошная линия) до предельной деформации при чистом сдвиге, получена расчетом по (29) (штриховая, относится к «экстраполяции»). Кривая 2 (сплошная линия), представляет испытание на сжатие с кручением при угле $\theta = 35,5^\circ$, а кривая 3 получена расчетом с использованием вышеописанной методики. Кривые 4 и 5 тоже сопоставлялась с расчетными

данными по методике, но они совпадают. Кривые 1 и 6 (сплошные не жирные линии) представляют исходные данные для сжатия и растяжения.

Таким образом, подробный анализ коэффициентов G_m и G_d дал обоснование практической полезности принятой «экстраполяции», позволившей восстановить все материальные функции до предельной деформации при сжатии, хотя и с некоторым приближением на участке, относящемуся к «экстраполяции», а так же показал связь этих коэффициентов с параметром разномодульности. Представляется, что этот подход может быть использован для описания свойств таких нестабильных сред, как асфальты, горные породы, грунты и другие.

В качестве примечания следует отметить, что стабильные материалы, как никель, медь и некоторые сорта сталей имеют при малых деформациях разномодульность близкую к единице. Эти экспериментальные данные послужили авторам работы [8] выдвинуть гипотезу о независимости пластической деформации от знака параметра Лоде. Однако эти же исследователи выявили заметное расхождение в сопротивлении пластической деформации в зависимости от вида напряженного состояния (или параметра Лоде), что, в частности, проявляется отличием секущих модулей при чистом сдвиге, растяжении и сжатии, поскольку $S_{0\tau} < S_{0c} \geq S_{0p}$ при деформации $e_0 = const$.

4. Сравнение теории с результатами испытаний [3]

В работе [6] выполнено преобразование тензорно-нелинейных уравнений связи деформаций с напряжениями в общей форме (уравнения Рейнера), которое привело и к уравнениям (1) и (2), и к уравнениям связи объемной (средней) деформации $\varepsilon_0 = \varepsilon_i / 3$, со средним напряжением $\sigma_0 = \sigma_i / 3$, и среднего напряжения с объемной деформацией в виде:

$$\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3 + 2\Phi_d S_0 / 9, \quad \sigma_0 = 3K_\varepsilon \varepsilon_0 - G_d e_0. \quad (30)$$

При отработке математической модели разрыхляющегося материала найден другой вариант этих уравнений, более удобный с практической точки зрения, а именно:

$$\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3 + 2\alpha_s \Phi_d S_0 / 9, \quad \sigma_0 = 3K_\varepsilon \varepsilon_0 - \alpha_\sigma G_d e_0. \quad (31)$$

Оба уравнения (31) становятся эмпирическими формулами после включения параметров α_s и α_σ , однако они позволяют уточнить склонность материалов к дилатансии - разрыхлению, при свободном деформировании, и дополнительному гидростатическому сжатию при деформации в замкнутом объеме.

Проведенное выше сравнение результатов расчетов с результатами испытаний образцов серого чугуна при кручении и сжатия с кручением, представленное на рис. 7 б), было

проведено с помощью уравнений (1) и (2), представляющих только формоизменение. Для более полного описания процесса деформирования при данных напряженных состояниях необходимы уравнения связи тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , включающие в себя уравнения (1) и уравнения (31), которые можно найти в [6]. Для свободного кручения с исходными данными: $S_1 = \sigma$, $S_2 = 0$, $S_3 = -\sigma$, $S_0 = \sqrt{3}\sigma$, $\sigma_0 = 0$, $\theta = \pi/6$, $c_1 = |c_3| = \sqrt{3}$, $c_2 = 0$ эти уравнения для главных деформаций и средней деформации имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sigma[\Phi_m/2 + \Phi_d(1 + 2\alpha_s)/3\sqrt{3}], \quad \varepsilon_3 = \sigma[-\Phi_m/2 + \Phi_d(1 + 2\alpha_s)/3\sqrt{3}], \\ \varepsilon_2 &= \sigma[\Phi_d(\alpha_s - 1)/3\sqrt{3}], \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_g = 2\Phi_d\alpha_s\sigma/3\sqrt{3}, \end{aligned} \quad (32)$$

где ε_g - деформация разрыхления.

На рис. 8 а) кривыми 1, 3 (сплошными линиями), 2 (большой штрих) и 4 (мелкий штрих) показаны в соответствии с индексами перечисленные деформации в зависимости от напряжения σ .

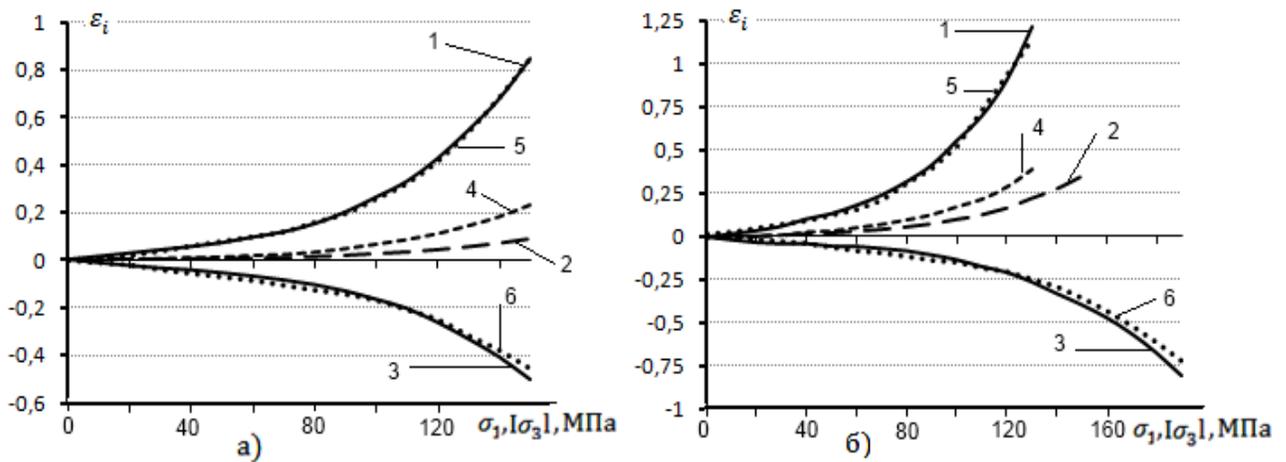


Рис. 8. Изменение деформаций в зависимости от напряжения σ : а) при чистом сдвиге (свободное кручение); б) сжатие с кручением при угле $\theta = 35,5^\circ$. Кривые 1, 2 и 3 - расчет, кривые 5 и 6 – по результатам испытаний, кривая 4 для $\varepsilon_0 = \varepsilon_g$.

Кривые 5 и 6 представляют результаты испытаний трубчатых образцов серого чугуна [3]. Удовлетворительное согласие расчетных кривых с опытными получено при значении параметра $\alpha_s = 1,5$. Расчет потребовал графической перестройки графиков для характеристик Φ_m и Φ_d , как функций аргумента e_0 , полученных с помощью вышеописанной методики, к графикам этих характеристик в зависимости от напряжения σ с постоянным шагом. Такой переход можно выполнить при наличии кривой $S_0 \sim e_0$ для данного напряженного состояния. Поперечная деформация $\varepsilon_2 > 0$, поскольку $\alpha_s > 1$. Из условия, что $(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) > 0$, следует минимальное значение параметра $\alpha_s > -0,5$.

Проведенное сравнение теории и результатов испытаний выявило эффекты присутствия объемной и осевой деформаций при кручении, которые исследовал еще Пойнтинг и замечены автором испытаний [3] серого чугуна. Теория выявляет и поперечную деформацию.

Для сжатия с кручением при исходных данных: $I\sigma_3 I / \sigma_1 = k$, $I\sigma_3 I = \sigma$, $I\sigma_3 I = \sigma$, $\sigma_1 = \sigma/k$, $\sigma_2 = 0$, $k = 1,4$, $\theta = 35,5^\circ$, $\sigma_0 = \sigma(1 - k)/3k$, $S_1 = \sigma(k + 2)/3k = \sigma s_1$, $S_2 = \sigma(k - 1)/3k = \sigma s_2$, $S_3 = -\sigma(2k + 1)/3k = \sigma s_3$, $S_0 = \sigma\sqrt{(k^2 + k + 1)}/k = \sigma s_c$ эти уравнения для главных деформаций и средней деформации имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{0y} + \sigma[\Phi_m s_1/2 + \Phi_d/s_c[s_1^2 + 2(\alpha_s - 1)s_c^2/9]], \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{0y} + \sigma[\Phi_m s_2/2 + \Phi_d/s_c[s_2^2 + 2(\alpha_s - 1)s_c^2/9]], \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{0y} + \sigma[\Phi_m s_3/2 + \Phi_d/s_c[s_3^2 + 2(\alpha_s - 1)s_c^2/9]], \end{aligned} \quad (33)$$

где K - модуль упругости при объемном сжатии.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0y} + \varepsilon_g, \quad \varepsilon_{0y} = \sigma_0/3K, \quad \varepsilon_g = 2\Phi_d\alpha_s\sigma/3\sqrt{3}. \quad (34)$$

На рис. 8 б) кривые, обозначенные так же, как и при чистом кручении показано изменение деформаций в зависимости от напряжения σ и $I\sigma_3 I$ при сжатии с кручением. Расчет потребовал графической перестройки графиков для характеристик Φ_m и Φ_d , как функций аргумента e_0 , полученных с помощью вышеописанной методики, к графикам этих характеристик в зависимости от напряжения σ с постоянным шагом. Расчет так же потребовал приведения характеристик Φ_m и Φ_d , как функций аргумента e_0 , к их зависимости

от напряжения σ , что выполнялось с помощью кривой $S_0 \sim e_0$ для данного напряженного состояния. Из такого же условия, что и выше $(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) > 0$, найдено минимальное значение параметра $\alpha_s \approx 0,2$. Верхнее значение этого параметра устанавливалось путем поиска согласия расчетных кривых с результатами испытаний. Оно было достигнуто при значении $\alpha_s = 1,3$.

Коротко остановимся на деформации в замкнутом объеме. Для этого рассмотрим одно состояние – стесненное кручение с исходными данными: $\varepsilon_0 = 0$, $\vartheta = \pi/6$, $d_1 = |d_3| = \sqrt{3}$, $d_2 = 0$, $e_0 = \gamma/\sqrt{3}$, $e_i = e_0 d_i/2$, $e_1 = |e_3| = \sqrt{3}e_0/2$, $e_2 = 0$. Уравнения связи главных напряжений с главными деформациями при этом принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= e_0[\sqrt{3}G_m - G_d/4(1 + 2\alpha_e)], \quad \sigma_3 = -e_0[\sqrt{3}G_m + G_d/4(1 + 2\alpha_e)], \\ \sigma_2 &= -e_0[G_d/4(\alpha_e - 1)], \quad \sigma_0 = \sigma_g = -G_d e_0 \alpha_e/2. \end{aligned} \quad (35)$$

где σ_g - дополнительное гидростатическое сжатие, описание которой становится возможным при учете тензорной нелинейности.

Напряжение σ_2 тоже отлично от нуля, поскольку поперечная деформация должна отсутствовать согласно исходным данным. Оно принимает отрицательное значение, если параметр $\alpha_e > 1$. Из условия, что $(\sigma_1 + \sigma_3) < 0$, следует минимальное значение $\alpha_e > -0,5$. Характеристики G_m и G_d не требуют приведения к другому аргументу, поскольку они определены методикой как функции деформации e_0 . Из-за отсутствия опытных данных графики по соотношениям (35) не приводятся. В качественном отношении они по форме незначительно отличаются от диаграммы $S_0 \sim e_0$.

Анализ результатов испытаний при простом растяжении и сжатии потребовал преобразования уравнений связи тензора деформаций ε_{ij} с тензором напряжений σ_{ij} , приведенных к виду, характерному для уравнений, описывающих деформацию анизотропной среды, что выполнено в работе [6]. При этом коэффициенты деформации в этих уравнениях связаны с техническими характеристиками следующим образом:

$$a_{ii} = E_i^{-1} = (\Phi_k + 3\Phi_m + \Phi_d c_i)/9, \quad (36)$$

$$a_{ij} = -\nu_{ij} E_i^{-1} = -(3\Phi_m/2 - \Phi_k - \Phi_d c_{ij})/9, \quad (37)$$

$$c_{ii} = c_i(1 + \alpha_s), \quad c_{ij} = c_\alpha + \alpha_s c_i, \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3, \quad i \neq j \neq \alpha. \quad (38)$$

Здесь E_i модули упругости (номер индекса совпадает с направлением главных напряжений), а ν_{ij} коэффициенты поперечной деформации. Наличие характеристик Φ_m, Φ_d , как функций от деформации e_0 , и постоянной величины $\Phi_k = 1/3K$, дает возможность найти технические характеристики в виде зависимостей от этого же аргумента для любого напряженного состояния.

Анализ состояний при угле $\theta = \pi/6$, а так же простого растяжения и сжатия серого чугуна показал, что параметр разрыхления является величиной переменной, зависящей от угла θ . Ее можно выразить следующей, достаточно плавной функцией

$$\alpha_s = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2, \quad (39)$$

где коэффициенты a_i определяются подбором значений α_s при простых напряженных состояниях

$$a_1 = \alpha_p, \quad a_2 = 3(4\alpha_t - 3\alpha_p - \alpha_c)/\pi, \quad a_3 = 18(\alpha_p - 2\alpha_t + \alpha_c)/\pi^2.$$

На рис. 9 а) приведены результаты расчетов по соотношениям (35)÷(39) для простого растяжения. Кривая 1 (сплошная линия до предельной деформации) представляет поведение модуля упругости E_1 , относящегося к площадкам перпендикулярным напряжению σ_1 . Для сравнения кривая 2 (пунктирная линия) построена по результатам испытаний [3]. Кривая 3 представляет модуль упругости $E_2 = E_3$ (расчет) относящийся к площадкам, параллельным напряжению σ_1 .

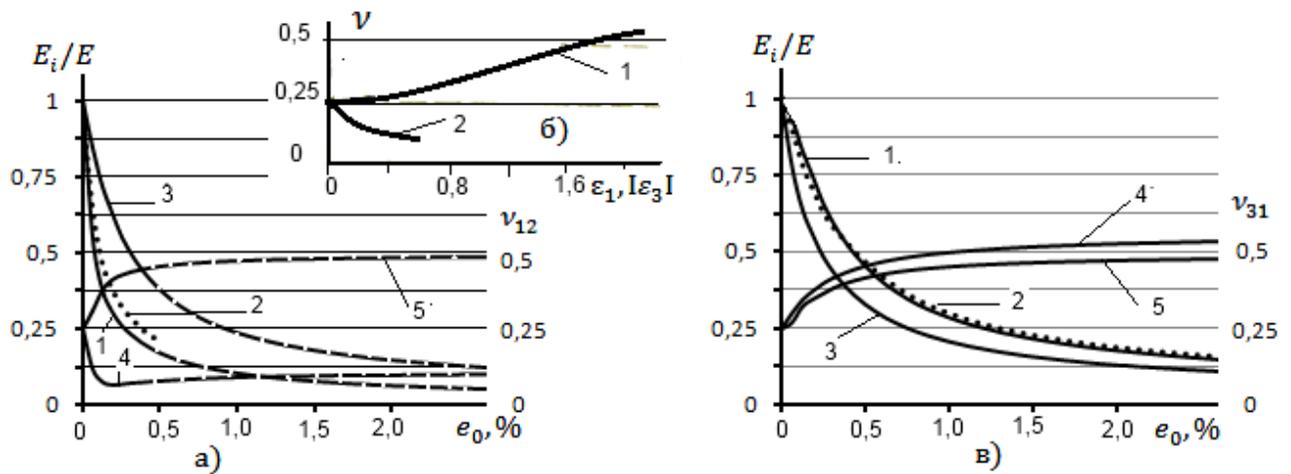


Рис. 9. Зависимость характеристик от деформации e_0 : а) растяжение, кривая 1 - E_1 и кривая 3 - $E_2 = E_3$ - теория, а кривая 2 - E_1 - опыт (пунктирная линия), кривые 4 и 5 для коэффициента v_{12} ; б) зависимость коэффициента v от деформации, кривая 2 - растяжение и кривая 1 - сжатие по опытным данным [4], [9]; в) сжатие - кривая 1 - E_3 и кривая 3 - $E_1 = E_2$ - теория, а кривая 2 - E_3 - опыт (пунктирная линия), кривые 4 и 5 для коэффициента v_{31} . Штриховые участки кривых относятся к «экстраполяции»

На рис. 9 в) кривые с теми же номерами отражают поведение модуля E_3 , относящегося к площадкам перпендикулярным напряжению σ_3 и $E_1 = E_2$ в площадках, параллельных напряжению σ_3 .

Экспериментальные сведения о поведении коэффициента поперечной деформации для серых чугунов можно найти, например, в работах [4] и [9]. В этих и других работах, выполненных по испытаниям на растяжение и сжатие образцов из серых чугунов различных марок, подчеркивается основная особенность кривых $v \sim \varepsilon$, заключающаяся в том, что при растяжении коэффициент быстро снижается, а при сжатии возрастает, так как показано на рис. 9 б). Кривыми 4 на рис. 9 а) и 9 в) представлено поведение («измеряемых») коэффициентов v_{12} при растяжении и v_{31} при сжатии. Кривые 5 отражают поведение материалов при учете только линейной упругой объемной деформации. В соответствии с соотношением (39) параметр разрыхления серых чугунов является величиной переменной: при растяжении $\alpha_s = 2,25$, а при сжатии $\alpha_s = 0,2$, что отражается на расстоянии между кривыми 4 и 5. Благодаря «интерполяции» технические характеристики для сжатия, рис. 9 б), найдены при всех деформациях, от нулевой до предельной.

5. Результаты расчетов по определению объемной деформации разрыхления

Описание деформации формоизменения по уравнениям (1), (2) серого чугуна при простом нагружении проводится без разделения ее на части: упругую, пластическую и разрыхления, как в работах [2], [3] и [4], поскольку это деление было бы внедрением в разработанную теорию [1]. Объемная деформации и среднее напряжение в данной работе делятся на части, исходя из структуры уравнений (30) или (31), представляющих связь шаровых частей тензоров деформаций и напряжений. Они должны отражать реальное поведение разрыхляющихся сред, проявляющих дилатансию в обобщенном смысле, что и послужило введению параметров α_s и α_e . Чтобы точнее согласовать экспериментальные сведения о поведении коэффициента поперечной деформации при растяжении, сжатии и при кручении, параметр α_s необходимо принять величиной переменной, изменяющейся по соотношению (39). На рис. 10 а) верхняя кривая (штрихпунктирная линия), обозначенная символом α_s , показывает изменение его (с множителем 1/200) от растяжения до сжатия.

Кривые 1, 2 и 3 показывают изменение объемной деформации (разрыхления) $\varepsilon_0 = \varepsilon_g$ от угла θ при деформации $e_0 = const$, которые соответствуют предельным деформациям при растяжении, чистом сдвиге и сжатии. Они представляют собой сечения кривых рис. 10 б), которые иллюстрируют изменение этой деформации от угла θ . Графики рис. 10 б) отчетливо показывают, что разрыхление возрастает, как с изменением угла θ , так и с ростом деформации e_0 . Графики $\varepsilon_0 = \varepsilon_g$ в виде прямых линий следуют от сжатия к простому растяжению. Угол $\theta = const$, изменяясь с шагом в 5° . Заимствованные сведения из работ [2], [3] и [4] и полученные расчетом о деформации от разрыхления дают основание провести проверку применимости критерия прочности серого чугуна по величине этой деформации. Предлагается наиболее простая гипотеза, состоящая в том, что накопленная деформации от разрыхления является постоянной величиной при разрушении для состояний от растяжения до сжатия, то есть

$$\varepsilon_g^* = 2\alpha_s \Phi_d S_0 / 9 = const \quad (40)$$

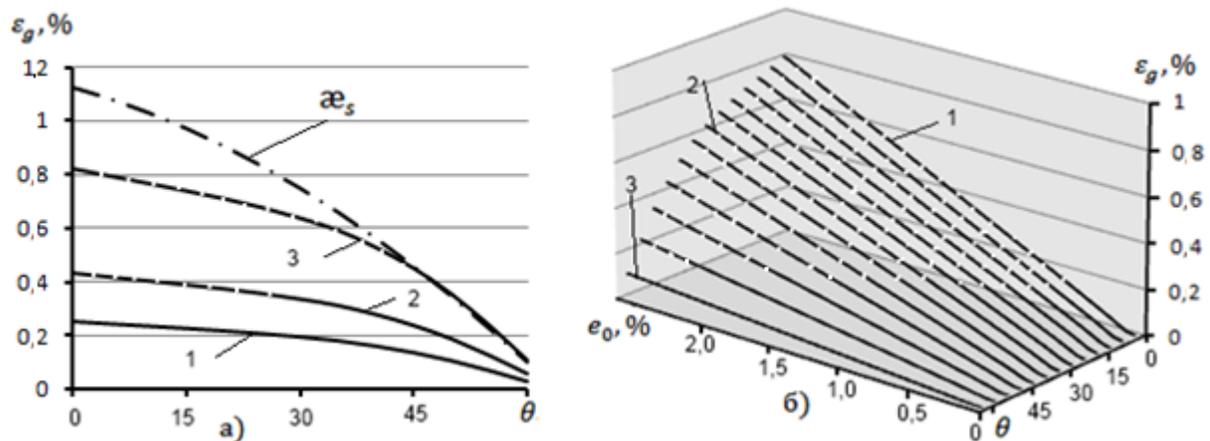


Рис. 10 а). Зависимость параметра α_s (верхняя кривая) и деформации от разрыхления ϵ_g кривые 1, 2 и 3 от угла θ (расчет); б) зависимость деформации разрыхления $\epsilon_0 = \epsilon_g$ от деформации ϵ_0 и от угла θ . Кривые 1, 2 и 3 относятся к растяжению, чистому сдвигу и сжатию, штриховые участки кривых являются «экстраполяцией».

Для рассматриваемого чугуна этой величине найдено конкретное значение: $\epsilon_g^* = 0,177\%$. На рис. 11 кривая 1 (пунктирная линия) представляет предложенный критерий, штриховая линия 2 критерий Мора. Пронумерованные точки в виде ромба расставлены в соответствии с таблицей, составленной по результатам испытаний образцов серого чугуна, опубликованных в упомянутых работах [2], [3] и [4]. Точки в виде звездочек, хотя и относятся к другому чугуну, внесены на данный рисунок, из-за отсутствия необходимых данных о двухосном сжатии, с учетом пропорциональности их пределов прочности при сжатии. Эти результаты испытаний взяты из книги [10], как ориентировочные и для расчетов не использовались.

Пунктирная линия построена по дискретным расчетным данным после восстановления среднеквадратической податливости Φ_d и определения значений констант в соотношении (39) для параметра разрыхления α_s . Критерий (40) следует рассматривать как элемент математической модели и его практическое использование в отрыве от этой модели невозможно без упрощений. Тот факт, что опытные точки, нанесенные по предельным напряжениям, достаточно близко находятся около кривой 1 или лежат на ней, говорит как о приемлемости данного критерия для рассматриваемых материалов, отражающего механизм деформации разрыхления, так и достоинства уравнений, учитывающих тензорную нелинейность.

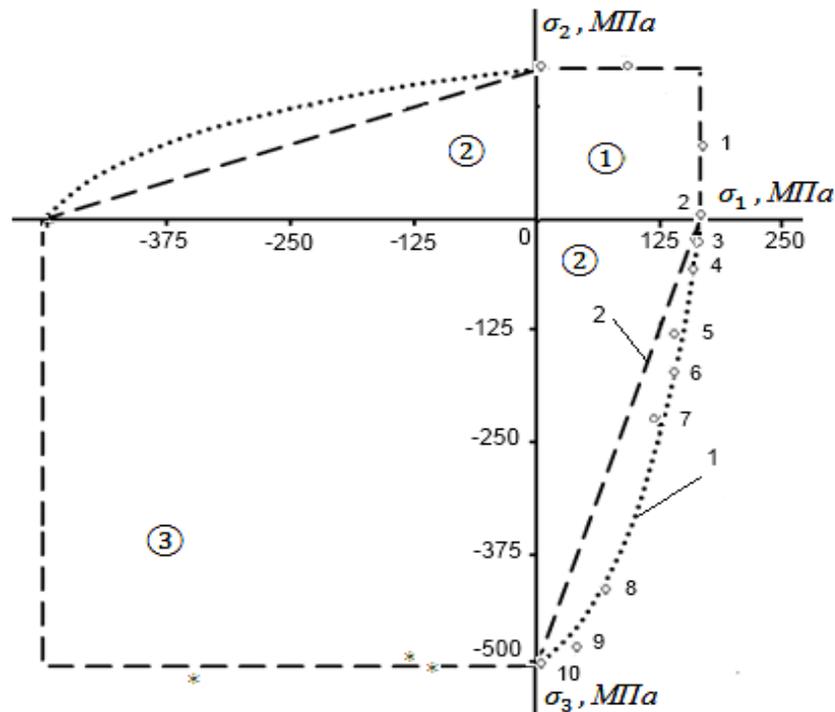


Рис. 11. Сравнение опытных данных (пронумерованные точки в виде ромба) с критерием (40) (кривая 1, пунктирная линия) и критерием Мора (прямая 2, штриховая линия).

Результаты испытаний четырех напряженных состояний представлены на рис. 12 а) в координатах S_0 и e_0 под теми же номерами, что и в таблице. Все диаграммы $S_0 \sim e_0$ почти накладываются друг на друга. По форме отличие от других имеет кривая 1 - для двухосного растяжения (штриховая линия). Все четыре состояния, отличающиеся углом θ и имеющие почти одинаковые деформации разрыхления, подтверждают критерий (40). Их опытные точки по предельным напряжениям, приведенным в таблице, ложатся на кривую 1 рис. 11. Диаграммы 1 и 2 рис. 12 а), соответствующие двухосному и простому растяжению, относятся к квадранту ① рис. 11. Опытные данные по состояниям 2 ÷ 10 к квадранту ②, а 10 и обозначенные звездочками к квадранту ③. Основное содержание данной работы посвящено напряженным состояниям, относящимся к квадранту ②.

Анализ состояний первого квадранта в совокупности с третьим и четвертым состоянием ② - го приводят к неожиданным выводам. Диаграммы $S_0 \sim e_0$, показанные на рис. 12 а), могут быть объединены «единой кривой». Ее можно отнести к углу $\theta = 0$. Не располагая результатами других испытаний, принадлежащих к квадранту ①, можно предположить, что поведение их такое же. Такой вывод не означает отсутствия проявления тензорной нелинейности, разрыхления и других эффектов, их сопровождающих. «Единая кривая» сводит здесь все напряженные состояния к одному, $\theta = 0$, для упрощения описания этой нелинейности.

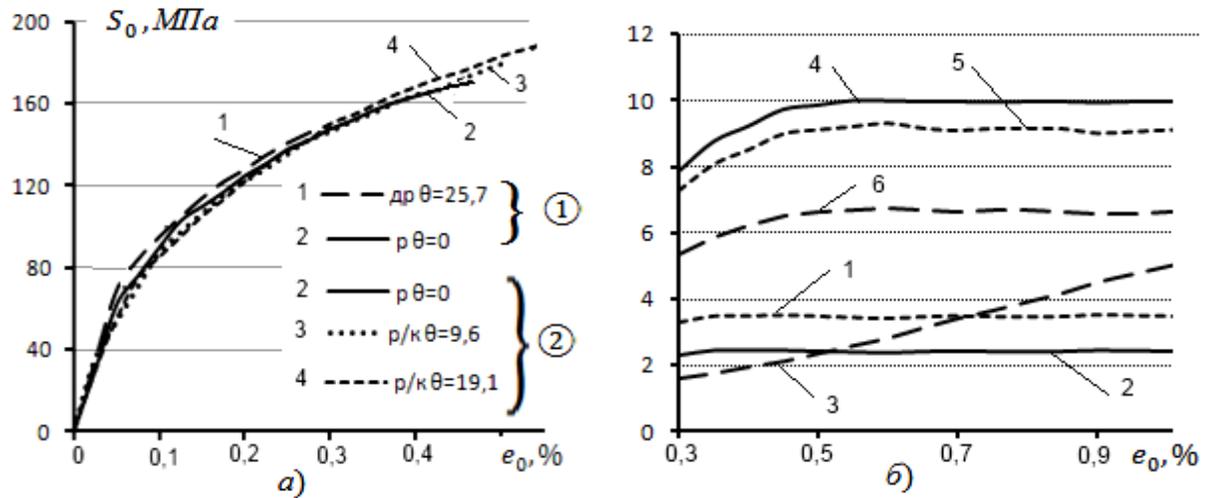


Рис. 12. Сравнение: а) опытных данных для напряженных состояний ① - го и ② - го квадрантов; б) результатов расчетов: фазы ω - кривая 1, коэффициента g_a - кривая 2 и деформации ϵ_g кривая 3, относящимся к напряженным состояниям ③ -го квадранта и отношений: g_{a2}/g_{a3} - кривая 4, ω_2/ω_3 - кривая 5 и $\epsilon_{g2}/\epsilon_{g3}$ кривая 6 ② - го и ③ -го квадрантов.

Таблица

№ п/п	Напряженное состояние	Соотношение напряжений	θ , град.	Предельные напряжения, МПа	Автор
1.	Двухосное растяжение	$\sigma_1/\sigma_2 = 2,3$	25,7	$\sigma_1 = 170, \sigma_2 = 73,9$	[3]
2.	Простое растяжение	$\sigma_1 \neq 0$	0	$\sigma_1 = 166$	[3]
3.	Растяжение с кручением	$\sigma_1/ \sigma_3 = 4,6$	9,63	$\sigma_1 = 157, \sigma_3 = 34$	[3]
4.	Растяжение с кручением	$\sigma_1/ \sigma_3 = 2$	19,1	$\sigma_1 = 146, \sigma_3 = 72$	[3]
5.	Кручение	$\sigma_1 = \sigma_3 $	30	$\sigma_1 = 146, \sigma_3 = 146$	[3]
6.	Сжатие с кручением	$ \sigma_3 /\sigma_1 = 1,4$	35,5	$ \sigma_3 = 190,4, \sigma_1 = 136$	[3]
7.	Сжатие с кручением	$ \sigma_3 /\sigma_1 = 2$	40,9	$ \sigma_3 = 226, \sigma_1 = 113$	[4]
8.	Сжатие с кручением	$ \sigma_3 /\sigma_1 = 4,9$	50,9	$ \sigma_3 = 433, \sigma_1 = 88,4$	[4]
9.	Сжатие с кручением	$ \sigma_3 /\sigma_1 = 9,8$	55,2	$ \sigma_3 = 493, \sigma_1 = 50,3$	[4]
10.	Простое сжатие	$ \sigma_3 \neq 0$	60	$ \sigma_3 = 512$	[2, 4]

Для оценки тензорной нелинейности для напряженных состояний ③ –го квадранта проведен вычислительный «эксперимент». На рис. 12 б) приведены графики по результатам этого «эксперимента». Расчеты по описанной выше методике приняты данные по трем базовым диаграммам $S_0 \sim e_0$ этого квадранта. Ими явились: диаграмма для сжатия и диаграмма для двухосного сжатия, в качестве которой была принята диаграмма простого растяжения. Значения последней были увеличены в 2,1 раза, так что бы значения для двухосного сжатия превышали значения простого сжатия примерно в 1,1 раза, а данные для напряженного состояния $\theta = \pi/6$ были найдены по алгоритму (29). Обоснованием таких ориентировочных исходных данных явились результаты испытаний, взятых из книги [10] и обозначенных звездочками, по которым можно предположить, что не только прочность, но и диаграммы этих состояний имеют различие в пределах 10%.

Расчеты показали, что поведение характеристик Φ_θ , G_θ , Φ_m и G_m такое же, как для состояний ② –го квадранта, которые изменились пропорционально коэффициенту 1,1, а характеристики тензорной нелинейности снижаются в несколько раз. На рис. 12 б) кривая 1 представляет данные о фазе ω_3 (с множителем 3), кривая 2 о коэффициенте g_{d3} (с множителем 30) и кривая 3 о деформации разрыхления ε_{g3} (с множителем 10^5). Кривые 4, 5 и 6 дают представление во сколько раз снижаются эти величины по сравнению с аналогичными, найденными при анализе напряженных состояний ② - го квадранта. Данные о ω_3 представлены для значений при угле $\theta = \pi/6$. С ними вполне можно согласиться. Но результаты для коэффициентов g_d и деформации ε_g при угле $\theta = \pi/3$, то есть при простом сжатии, которые не должны различаться от соответствующих ② - го квадранта, требуют основательного анализа.

Графики рис. 12 б) и проведенный вычислительный «эксперимент» обозначил проблему согласования исходных данных на границах квадрантов, которую следует рассматривать как важную, но самостоятельную задачу для дальнейших исследований, располагая, естественно, необходимыми и достаточными экспериментальными сведениями.

Автор приносит благодарность авторам экспериментальных работ [2], [3] и [4], как весьма надежным и продуманным. Не имея возможность обратиться лично к каждому, автор выражает признательность всем, кто участвовал в их выполнении, признавая, что без этих исследований настоящая работа имела бы меньшее практическое значение.

Заключение

Основные результаты:

а) Для материалов с весьма большим различием предельных деформаций и, в частности, для серых чугунов, имеющих нелинейные диаграммы, дано изложение методики

восстановления материальных функций, учитывающей их особенности. Проведены расчеты деформационных характеристик в интервале деформаций, включающем предельные деформации всех состояний, используя результаты испытаний [2], [3] и [4] (М. Я. Леонова и его учеников) и других исследователей [7], [8] и [9] и применяя «экстраполяцию» исходных данных до предельной деформации при сжатии. Результаты представлены в виде графиков;

б) дан вывод алгоритмов, показывающих, что коэффициент θ_d , характеризующий степень тензорной нелинейности при состояниях $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ не равен нулю. Этот вывод дает ответ на вопрос о существовании тензорной нелинейности при растяжении и сжатии, поскольку эта нелинейность часто отождествляется с подобием девиаторов напряжений и деформаций, когда фаза ω подобия равна нулю. Найдены алгоритмы, позволяющие производить оценку тензорной нелинейности по одной величине – разномодульности, то есть отношению модуля сдвига при сжатии к модулю сдвига при растяжении;

в) представлено сравнение теории с результатами испытаний [3] по свободному и стесненному кручению. Показано удовлетворительное согласие результатов расчетов и испытаний с использованием уравнений для шаровых частей тензоров напряжений и деформаций, позволяя описывать эффекты, связанные со склонностью среды к дилатансии в обобщенном смысле: разрыхлению, наблюдаемому при свободном деформировании, и дополнительному гидростатическому сжатию при деформации среды в замкнутом объеме. Показана необходимость введения параметра разрыхления, зависящего от вида напряженного состояния;

г) дано сравнение теории с результатами испытаний [3] и [4] при растяжении и сжатии, используя уравнения для главных деформаций. Достигнуто удовлетворительное согласие результатов расчетов и испытаний, как по модулям упругости в разных направлениях, так и по коэффициентам поперечных деформаций, показано, что тензорная нелинейность, как явление объединяет собой многие эффекты, которые отражает разработанная математическая модель для серых чугунов и других разрыхляющихся материалов;

д) дано описание деформации от разрыхления, как функции интенсивности деформации и угла вида напряженного состояния и возможность использования ее предельного значения при простом растяжении в качестве критерия прочности. Показано, что опытные точки, соответствующие предельным напряжениям, ложатся на кривую, описывающую предложенный критерий в координатах $\sigma_1 \sim \sigma_2$ для всех состояний ① и ② квадрантов плоского напряженного состояния.

Список литературы

1. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // Изв. АН СССР ПММ. 1951. Т. 15, вып. 2. С. 183-194.

2. Леонов М.Я., Русинко К.Н., Панаев В.А. О разрушении полухрупких стержней // В кн.: Сложная деформация твердого тела. Фрунзе: Илим, 1969. С. 75-94.
3. Панаев В.А. Экспериментальное исследование деформации серого чугуна // В кн.: Сложная деформация твердого тела. Фрунзе: Илим, 1969. С. 126-135.
4. Русинко К.Н. Особенности неупругой деформации твердых тел. Львов: Изд-во «Выща школа», 1986. 152 с.
5. Комков К.Ф. О тензорной нелинейности структурно-неоднородных материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 8. DOI: [10.7463/0812.0466666](https://doi.org/10.7463/0812.0466666)
6. Комков К.Ф. О тензорной нелинейности пластических материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 4. DOI: [10.7463/0413.0567103](https://doi.org/10.7463/0413.0567103)
7. Ягн Ю.И., Митрохин Н.М. О систематическом отклонении от законов пластичности // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 4. С. 796-799.
8. Цибульский И.П. Экспериментальное исследование коэффициента Пуассона серых чугунов // Исслед. по теории пластин и оболочек. 1964. Вып. 2. С. 140-174.
9. Павлов П.А. Механические состояния и прочность металлов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 175 с.

Tensor non-linearity of media that show significant difference in resistance to tension and compression

10, October 2013

DOI: 10.7463/0513.0571202

Komkov K.F.

Russia, Balashikha, Military-Technical University

06kfk38@mail.ru

Tensor non-linearity as a phenomenon brings together many well-known effects inherent in the specified materials, including grey cast irons study of which can be found in works by M. I. Leonov and his disciples. Processing of test results and description of properties of such media, with a very great difference in limiting deformations, is a complicated problem. In this work it was shown that the best way to solve this problem is to use V.V. Novozhilov's theory about connection of stress and strain deviators with specified experimental results; these results allowed to improve the method of determination of material functions within the range of all ultimate deformations of simple tests. It was possible to achieve the latter with the use of "extrapolation" of initial data up to the ultimate deformation of compression. The model created by this method reflects the effect of dilatancy in a generalized sense more accurately, revealing the essence of tensor nonlinearity. It was also shown that the accumulated deformation of loosening can be chosen as a criterion of strength.

Publications with keywords: [methods](#), [chart](#), [tensor non-linearity](#), [material function](#), [loosening](#)

Publications with words: [methods](#), [chart](#), [tensor non-linearity](#), [material function](#), [loosening](#)

References

1. Novozhilov V.V. O sviazi mezhdru napriazheniiami i deformatsiiami v nelineino-uprugoi srede [On the relation between stresses and deformations in nonlinear-elastic medium]. *Izv. AN SSSR PMM*, 1951, vol. 15, no. 2, pp. 183-194.
2. Leonov M.Ia., Rusinko K.N., Panaev V.A. O razrushenii polukhrupkikh sterzhnei [About the destruction of the semi-fragile rods]. In book: *Slozhnaia deformatsiia tverdogo tela* [Complex deformation of a solid body]. Frunze, Ilim, 1969, pp. 75-94.

3. Panaev V.A. Eksperimental'noe issledovanie deformatsii serogo chuguna [Experimental study of the deformation of grey cast iron]. In book: *Slozhnaia deformatsiia tverdogo tela* [Complex deformation of a solid body]. Frunze, Ilim, 1969, pp. 126-135.
4. Rusinko K.N. *Osobennosti neuprugoi deformatsii tverdyykh tel* [Features of inelastic deformation of solids]. L'vov, Vyscha shkola, 1986. 152 p.
5. Komkov K.F. O tenzornoj nelineinosti strukturno-neodnorodnykh materialov [Tensor nonlinear structurally heterogeneous materials]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 8. DOI: [10.7463/0812.0466666](https://doi.org/10.7463/0812.0466666)
6. Komkov K.F. O tenzornoj nelineinosti plasticheskikh materialov [Tensor nonlinearity of plastic materials]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2013, no. 4. DOI: [10.7463/0413.0567103](https://doi.org/10.7463/0413.0567103)
7. Iagn Iu.I., Mitrokhin N.M. O sistematicheskom otklonenii ot zakonov plastichnosti [The systematic deviation from the laws of plasticity]. *Dokl. AN SSSR*, 1960, vol. 135, no. 4, pp. 796-799.
8. Tsibul'skii I.P. Eksperimental'noe issledovanie koeffitsienta Puassona serykh chugunov [Experimental study of the Poisson's ratio of gray cast irons]. *Issled. po teorii plastin i obolochek* [Research on the theory of plates and shells], 1964, no. 2, pp. 140-174.
9. Pavlov P.A. *Mekhanicheskie sostoianiia i prochnost' metallov* [Mechanical condition and strength of metals]. Leningrad, LSU Publ., 1980. 175 p.