

Идентификация линейных динамических звеньев по частотному годографу

09, сентябрь 2013

DOI: 10.7463/0913.0618917

Боевкин В. И., Недашковский В. М., Павлов Ю. Н.

УДК 01.04.01

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

boevkin@bmstu.ru

vmniu3@bmstu.ru

pavlov@bmstu.ru

Частотные характеристики широко применяются в анализе систем автоматического управления для исследования систем и ее элементов по экспериментальным данным.

Оценка качества работы таких систем определяется в конечном итоге при экспериментальной обработке реальных образцов. При этом может возникнуть задача идентификации системы и отдельных ее звеньев. В данной статье рассматривается метод идентификации динамических звеньев по их реакции на гармонический сигнал.

Частотная передаточная функция линейного динамического звена с постоянными параметрами описывается в частотной области соотношением [1]

$$W(j\omega) = \frac{c_0 + c_1 j\omega + c_2 (j\omega)^2 + \dots + c_m (j\omega)^m}{e_0 + e_1 j\omega + e_2 (j\omega)^2 + \dots + e_n (j\omega)^n} . \quad (1)$$

Неизвестные коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_m, e_0, e_1, \dots, e_n$ частотной передаточной функции (1) надо определить в результате решения задачи идентификации.

Из соотношения (1) можно получить выражение для частотной передаточной функции [1, 2]

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) , \quad (2)$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ - вещественная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно.

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ может быть изображена на комплексной плоскости в виде годографа [1]. Для этого для каждого значения частоты вычисляются модуль вектора $|W(j\omega)|$ и угол поворота $\varphi(\omega)$ вектора. Модуль вектора $|W(j\omega)|$ есть отношение амплитуды выходного гармонического сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала, а угол поворота $\varphi(\omega)$ вектора представляет собой сдвиг фаз

между выходным гармоническим сигналом и входным гармоническим сигналом. На рис. 1 представлен вид годографа, построенного по соотношению (2) для звена второго порядка ($e_0 = 1, e_1 = 1.5, e_2 = 1, c_0 = 1$).

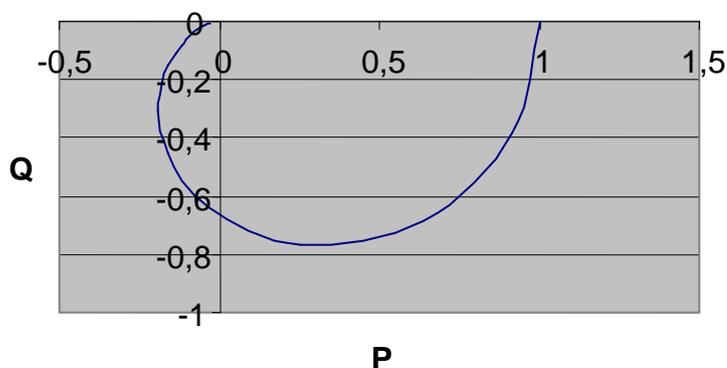


Рис. 1. Годограф динамического звена второго порядка

Амплитуд $A(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$ частотной передаточной функции определяются из соотношений

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

При получении частотных характеристик реальных звеньев в эксперимент вмешиваются помехи, в результате которых точки годографа смещаются случайным образом. Введем обозначения для определенных с погрешностями вещественных и мнимых значений отсчетов экспериментально полученного годографа $W_s(j\omega)$ динамического звена для n_{exp} значений частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_{\text{exp}}}$:

$$P_1 = P(\omega_1), \dots, P_{n_{\text{exp}}} = P(\omega_{n_{\text{exp}}}), \quad Q_1 = Q(\omega_1), \dots, Q_{n_{\text{exp}}} = Q(\omega_{n_{\text{exp}}}). \quad (3)$$

На рис. 2 показан пример искажения экспериментально полученного годографа динамического звена второго порядка относительно годографа, приведенного на рисунке 1 при наличии случайных погрешностей в экспериментальных данных $P_1, \dots, P_{n_{\text{exp}}}, Q_1, \dots, Q_{n_{\text{exp}}}$ для $n_{\text{exp}}=12$.

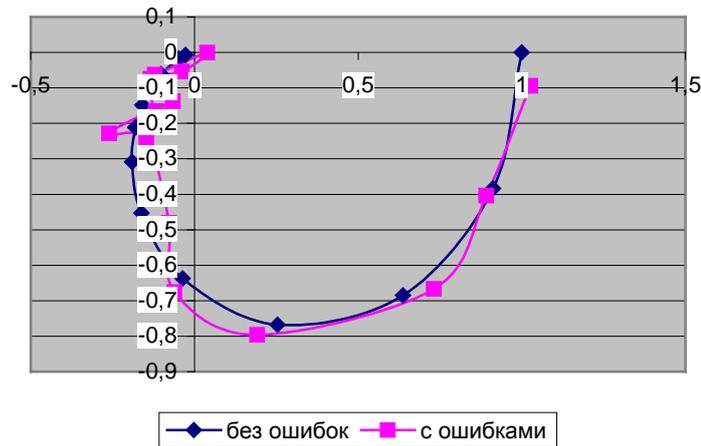


Рис. 2. Пример искажения экспериментально полученного годографа динамического звена второго порядка при наличии случайных погрешностей в экспериментальных данных

Решение задачи идентификации будем искать в классе годографов, задаваемых моделью

$$W_m(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_n (j\omega)^n}, \quad (4)$$

или в виде

$$W_m(j\omega) = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots, \\ \beta &= b_1 - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots, \\ \gamma &= a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots, \\ \delta &= a_1 - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots. \end{aligned} \quad (6)$$

Отклонение ΔW_i i -ого отсчета $W_m(j\omega_i)$ годографа модели на частоте ω_i от определенного экспериментально i -ого отсчета $W_s(j\omega_i)$ экспериментального годографа идентифицируемого звена

$$\Delta W_i = W_s(j\omega_i) - W_m(j\omega_i)$$

с учетом (3) и (5) можно записать в виде

$$\Delta W_i = P_i + jQ_i - \frac{\alpha_i + j\beta_i}{\gamma_i + j\delta_i}, \quad (7)$$

где параметры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ соответствуют частоте ω_i .

Необходимо ввести приемлемый критерий, характеризующий близость двух годографов на всей совокупности экспериментальных точек, и минимизировать его по параметрам модели звена $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$. В качестве критерия (меры) близости можно было бы выбрать сумму квадратов модулей расхождений ΔW_i :

$$I = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta W_i|^2. \quad (8)$$

Минимизация меры I приводит к нелинейной системе уравнений для определения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ модели. В работе [2], где рассмотрен частный случай идентификации по годографу для получения линейной системы уравнений, применен способ, модификация которого состоит в следующем. Соотношение (8) умножим на отличный от нуля комплексный множитель $(\gamma_i + j\delta_i)$:

$$\Delta H_i = \Delta W_i(\gamma_i + j\delta_i). \quad (9)$$

Тогда с учетом (7) для ΔH_i и для $|\Delta H_i|^2$ получим

$$\begin{aligned} \Delta H_i &= P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i + j(P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i), \\ |\Delta H_i|^2 &= (P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве меры близости J годографов примем сумму квадратов модулей $|\Delta H_i|^2$:

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta H_i|^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2]. \quad (11)$$

Следует отметить, что если погрешности определения вещественных и мнимых значений (4) отсчетов экспериментально полученного годографа $W_s(j\omega)$ равны нулю, то обе меры близости I (8) и J (11) обращаются в нуль.

Мера близости J экспериментально полученного годографа звена и годографа модели звена на всей совокупности экспериментальных точек задается формулой (11), которая после некоторого преобразования принимает вид

$$J = \sum_{i=1}^{next} [(P_i^2 + Q_i^2)\gamma_i^2 + (P_i^2 + Q_i^2)\delta_i^2 - 2P_i\gamma_i\alpha_i + 2Q_i\delta_i\alpha_i - 2P_i\delta_i\beta_i - 2Q_i\gamma_i\beta_i + \alpha_i^2 + \beta_i^2]. \quad (12)$$

Мера J (12) является функцией коэффициентов a_r, b_q частотной передаточной функции модели (4). Для минимизации меры J приравняем нулю частные производные от J по этим коэффициентам

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = 0, \quad r=1, \dots, n, \quad \frac{\partial J}{\partial b_q} = 0, \quad q=1, \dots, m. \quad (13)$$

В выражениях (6) параметры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ зависят только от четных или нечетных коэффициентов модели. Поэтому отличные от нуля частные производные, которые потребуются для (13), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial b_{2q}} &= (-1)^q \omega_i^{2q}, \quad q=0, 1, \dots, m/2, & \frac{\partial \beta_i}{\partial b_{2q-1}} &= (-1)^{q+1} \omega_i^{2q-1}, \quad q=1, 2, \dots, m/2+1, \\ \frac{\partial \gamma_i}{\partial a_{2r}} &= (-1)^r \omega_i^{2r}, \quad r=0, 1, \dots, n/2 & \frac{\partial \delta_i}{\partial a_{2r-1}} &= (-1)^{r+1} \omega_i^{2r-1}, \quad r=1, 2, \dots, n/2+1. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (13) с учетом (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b_{2q}} &= 2(-1)^q \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (-P_i \gamma_i + Q_i \delta_i + \alpha_i) \omega_i^{2q} = 0, & q=0, 1, \dots, m/2, \\ \frac{\partial J}{\partial b_{2q-1}} &= 2(-1)^{q+1} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (-P_i \delta_i + Q_i \gamma_i + \beta_i) \omega_i^{2q-1} - 1 = 0, & q=1, 2, \dots, m/2+1, \\ \frac{\partial J}{\partial a_{2r}} &= 2(-1)^r \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2) \gamma_i - P_i \alpha_i - Q_i \beta_i] \omega_i^{2r} = 0, & r=0, 1, \dots, n/2, \\ \frac{\partial J}{\partial a_{2r-1}} &= 2(-1)^{r+1} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2) \delta_i + Q_i \alpha_i - P_i \beta_i] \omega_i^{2r-1} = 0, & r=1, 2, \dots, n/2+1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (-P_i \gamma_i + Q_i \delta_i + \alpha_i) \omega_i^{2q} &= 0, & q=0, 1, \dots, m/2, \\ \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (-P_i \delta_i + Q_i \gamma_i + \beta_i) \omega_i^{2q-1} - 1 &= 0, & q=1, 2, \dots, m/2+1, \\ \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2) \gamma_i - P_i \alpha_i - Q_i \beta_i] \omega_i^{2r} &= 0, & r=0, 1, \dots, n/2, \\ \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2) \delta_i + Q_i \alpha_i - P_i \beta_i] \omega_i^{2r-1} &= 0, & r=1, 2, \dots, n/2+1. \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (15) является линейной относительно параметров a_r, b_q , модели (4). Вычисленные из (15) параметры a_r, b_q являются коэффициентами частотной передаточной функции модели звена. Они минимизируют выбранную меру J (12) близости годографов и, таким образом, идентифицируют испытываемое динамическое

звено, т.е. могут быть использованы в качестве приближенных значений коэффициентов частотной передаточной функции самого звена.

Описание предложенного алгоритма идентификации линейного динамического звена с постоянными параметрами завершим иллюстрацией применения этого алгоритма для линейного звена второго порядка, имеющего передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1}{e_0 + e_1 p + e_2 p^2}$$

с коэффициентами e_0, e_1, e_2 .

Проведя n_{exp} экспериментов, получим экспериментальные значения $P_1, \dots, P_{n_{exp}}, Q_1, \dots, Q_{n_{exp}}$ (см. (3)).

С учетом (8) - (10) частотную передаточную функцию модели звена второго порядка зададим в виде

$$W_M(j\omega) = \frac{1}{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2} = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta},$$

где $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = a_0 - a_2 \omega^2, \delta = a_1 \omega$.

Для рассматриваемого звена второго порядка система уравнений (15) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n_{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) - a_2 \sum_{i=1}^{n_{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n_{exp}} P_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n_{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 &= - \sum_{i=1}^{n_{exp}} Q_i \omega_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n_{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n_{exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4 &= \sum_{i=1}^{n_{exp}} P_i \omega_i^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Систему уравнений (16) приведем к матричному виду

$$\Psi \bar{a} = \bar{u}, \quad (17)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{00} & 0 & \Psi_{02} \\ 0 & \Psi_{11} & 0 \\ \Psi_{20} & 0 & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Ненулевые элементы матрицы Ψ и элементы вектора \bar{u} в (18) имеют значения

$$\begin{aligned} \Psi_{00} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2), & \Psi_{02} &= -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \\ \Psi_{11} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \\ \Psi_{20} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, & \Psi_{22} &= -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4, \\ u_0 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i, & u_1 &= -\sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \omega_i, & u_2 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i \omega_i^2. \end{aligned}$$

Решая матричное уравнение (17), получим

$$a_0 = \frac{\Psi_{22} u_0 - \Psi_{02} u_2}{\Psi_{00} \Psi_{22} - \Psi_{02} \Psi_{20}}, \quad a_1 = \frac{u_1}{\Psi_{11}}, \quad a_2 = \frac{\Psi_{00} u_2 - \Psi_{20} u_0}{\Psi_{00} \Psi_{22} - \Psi_{02} \Psi_{20}}.$$

Были проведены иллюстративные вычислительные эксперименты по оценке погрешности, с которой предложенный алгоритм определяет значения коэффициентов частотной передаточной функции звена второго порядка. В экспериментах заданы конкретные значения коэффициентов $e_0 = 1, e_1 = 1,5, e_2 = 1$ (колебательное звено с собственной частотой 1 1/с и коэффициентом затухания 0,75).

Погрешности измерения значений P_i, Q_i моделировались с помощью датчика случайных чисел с равномерным законом плотности распределения вероятностей в различных диапазонах $[-0,01, 0,01], [-0,05, 0,05], [-0,1, 0,1]$. Количество отсчетов в годографе звена (т.е. количество экспериментов) $n_{\text{exp}} = 6, 12, 24, 48$. Для каждого конкретного количества экспериментов n_{exp} проводилось n_{seriy} серий этих экспериментов $n_{\text{seriy}} = 25.50, 100, 200, 400$.

В сериях экспериментов вычислялись погрешности $err_{a_0} = e_0 - a_0, err_{a_1} = e_1 - a_1, err_{a_2} = e_2 - a_2$ определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 и среднеквадратические отклонения sko для случайных величин $err_{a_0}, err_{a_1}, err_{a_2}$, а также строились гистограммы для этих величин.

Для примера на рис. 3 приведены графики зависимости среднеквадратического отклонения sko для погрешности err_{a_0} определения коэффициента a_0 от количества отсчетов годографа.

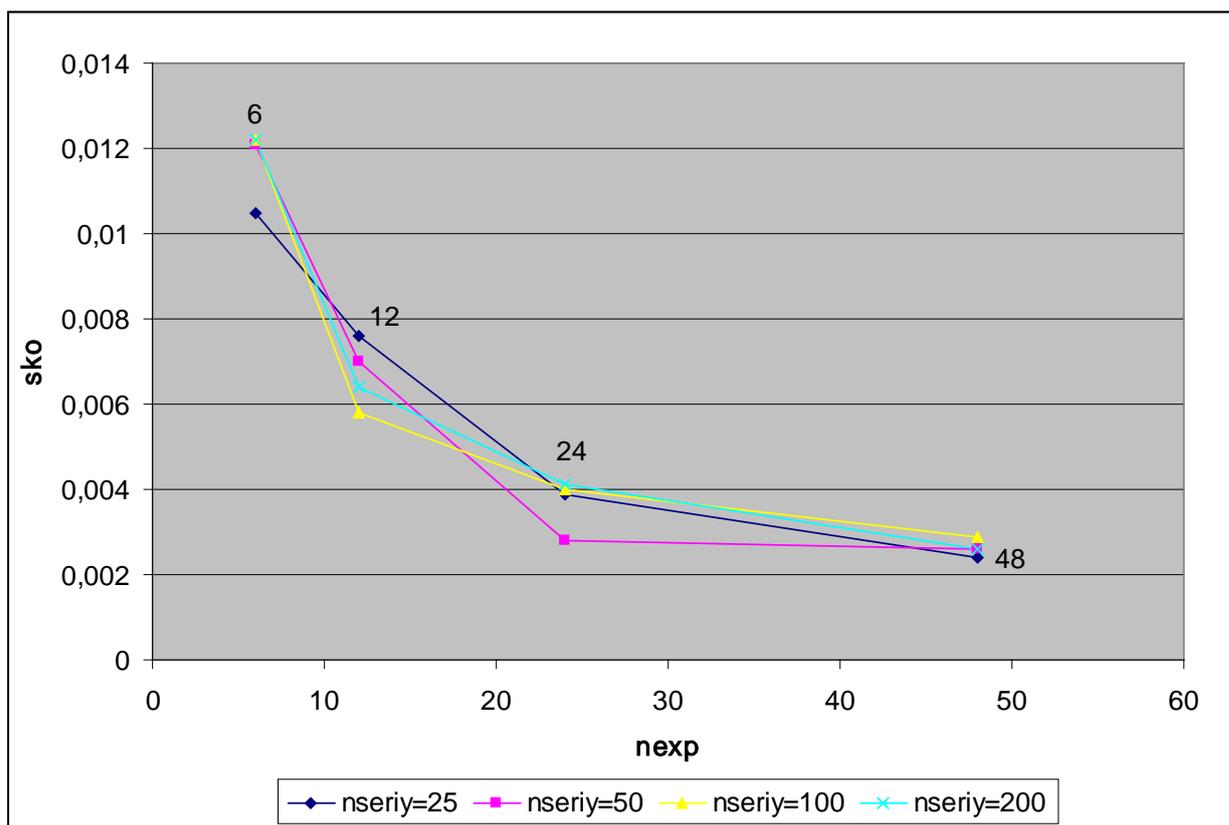


Рис. 3. Зависимость среднеквадратического отклонения sko погрешности err_0 определения коэффициента e_0 от количества отсчетов $nexp$ годографа устройства при погрешности измерений в диапазоне $[-0,01, 0,01]$ и числе серий $nseriy=25, 50, 100, 200$

Из рис. 3 видно, что в рассматриваемом случае можно ограничиться количеством отсчетов годографа от 12 до 24. На рис. 4 в качестве примера показана гистограмма погрешности err_0 определения коэффициента e_0 .

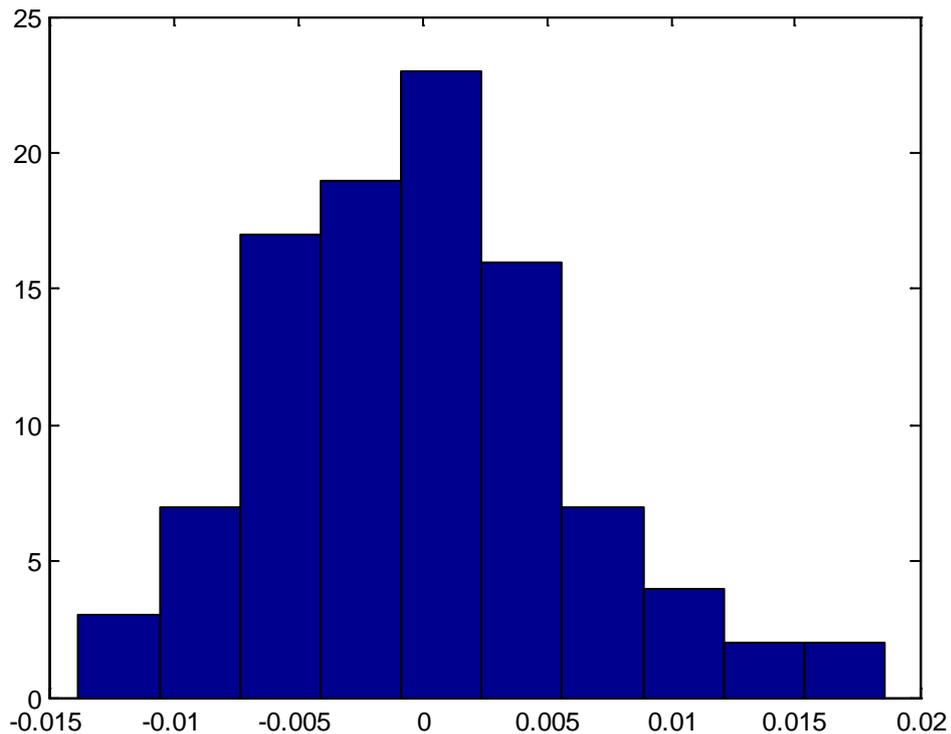


Рис. 4. Гистограмма погрешности err_{a_0} определения коэффициента e_0 ($n_{exp}=12$, диапазон погрешности измерений $[-0,01, 0,01]$, количество серий $n_{seriy}=100$, среднее квадратическое отклонение $sko=0.0058$)

Из рис. 4 видно, что около 95% результатов определения коэффициента частотной передаточной функции модели звена находится в доверительном интервале $\pm 2sko = \pm 0,0116$ относительно фактического значения этого коэффициента $e_0=1$. Таким образом, погрешность определения значения коэффициента $e_0=1$ в иллюстративном вычислительном эксперименте сравнима с диапазоном погрешности измерений отсчетов годографа $[-0,01, 0,01]$.

Аналогичные результаты были получены для погрешностей определения коэффициентов e_1 и e_2 . Например, для погрешности err_{a_1} определения коэффициента e_1 ($n_{exp}=12$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,01, 0,01]$, количество серий $n_{seriy}=100$), среднее квадратическое отклонение $sko=0.0072$. Для погрешности err_{a_2} определения коэффициента e_2 и ($n_{exp}=12$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,01, 0,01]$, количество серий $n_{seriy}=100$), среднее квадратическое отклонение $sko=0,0097$. Для погрешности err_{a_1} определения коэффициента e_1 ($n_{exp}=12$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,05, 0,05]$, количество серий $n_{seriy}=100$), среднее квадратическое отклонение $sko=0,0122$. Для погрешности err_{a_2} определения коэффициента e_2 ($n_{exp}=12$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,1, 0,1]$, количество серий $n_{seriy}=100$), среднее квадратическое отклонение $sko=0,0956$.

На рис. 5 приведены три годографа: годограф звена, когда погрешность измерения отсчетов годографа равна нулю, годограф звена, когда погрешность измерения отсчетов годографа не равна нулю, годограф найденной модели звена

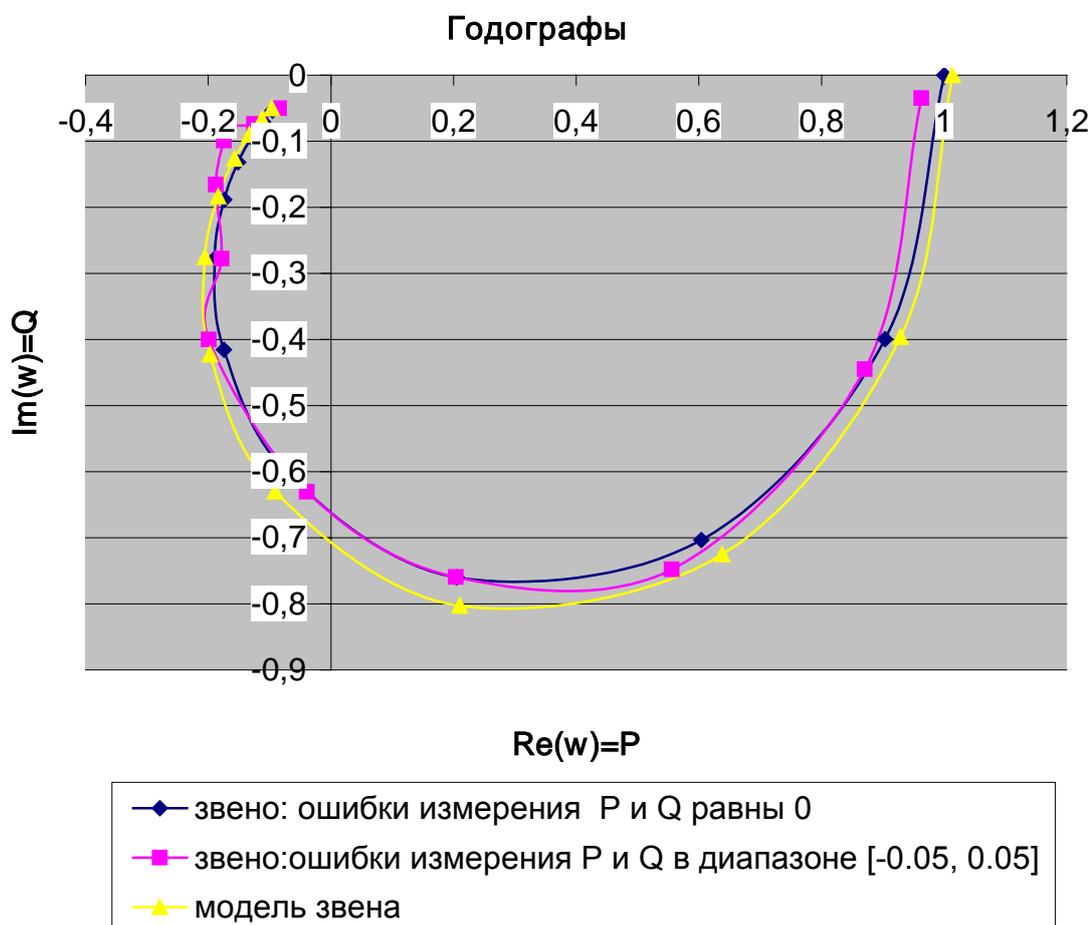


Рис. 5. Годограф звена при нулевой ошибке измерения отсчетов, годограф звена при ненулевых ошибках измерения отсчетов в диапазоне [-0,05, 0,05]; годограф найденной модели звена (количество экспериментов $n_{exp}=12$)

Выводы

В данной статье предложен алгоритм идентификации динамического звена по экспериментально полученным отсчетам частотного годографа звена. В качестве меры близости годографов звена и модели звена выбрана сумма квадратов модулей предложенной авторами модификации отклонений отсчетов годографа модели звена от соответствующих экспериментально полученных отсчетов звена.

В иллюстративном вычислительном эксперименте показано, что для звена второго порядка можно ограничиться количеством отсчетов годографа от 12 до 24.

Иллюстративный вычислительный эксперимент показал, что при использовании предложенного алгоритма идентификации динамического звена по частотному годографу погрешность определения значений коэффициентов частотной передаточной функции

звена второго порядка сравнима с диапазоном погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этого звена.

Список литературы

1. Основы автоматического управления / Под ред. В.С. Пугачева. М.: Наука, 1968. 680 с.
2. Боевкин В.И., Павлов Ю.Н. Регрессионный анализ в прикладной задаче идентификации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. (Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана; № 546).

Identification of linear dynamic elements using a frequency locus

09, September 2013

DOI: **10.7463/0913.0618917**

Boevkin V.I., Nedashkovskii V.M., Pavlov Y.N.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

boevkin@bmstu.ruvmniu3@bmstu.rupavlov@bmstu.ru

This article deals with the identification method for a linear dynamic element with known transfer function using an experimental frequency locus with random measurement errors. A transfer function of an element was selected as a model. It was proposed to search for the solution to the identification problem in the class of hodographs, defined by the element's model. Search for unknown coefficients of a transfer function of the element's model was carried out by minimizing the proposed proximity measure of the experimental element's locus and the model's locus. As a result, the specified problem was reduced to a system of linear equations. An illustrative computing experiment for a second-order element showed that an error of the transfer function's coefficients was comparable with the range of measurement errors of experimental samples of this element's locus.

Publications with keywords: [identification](#), [linear dynamic element](#), [frequency locus](#)**Publications with words:** [identification](#), [linear dynamic element](#), [frequency locus](#)

References

1. Pugachev V.S., ed. *Osnovy avtomaticheskogo upravleniya* [Basics of automatic control]. Moscow, Nauka, 1968. 680 p.
2. Boevkin V.I., Pavlov Yu.N. *Regressionnyy analiz v prikladnoy zadache identifikatsii* [Regression analysis in applied problem of identification]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1990. (*Trudy MGTU im. N. E. Baumana* № 546 [Proceedings of the Bauman MSTU; no. 546]).