

## **Численное решение статических автомодельных уравнений движения струи заряженного газа с помощью вейвлет Хаар метода**

**# 08, август 2013**

**DOI: 10.7463/0813.0583405**

**Кравченко О. В.**

УДК 517.927.4

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[olekravchenko@gmail.com](mailto:olekravchenko@gmail.com)

### **Введение**

Изучение пространственно-локализованных состояний заряженной среды представляет достаточный интерес как с практической, так и с фундаментальной точек зрения. Под пространственной локализацией понимается такое состояние заряженной среды, при котором носители заряда сосредоточены в некоторой ограниченной области, а функции распределения концентраций носителей являются финитными. Отметим наиболее актуальные, на наш взгляд работы, связанные с изучением пространственно-локализованных зарядовых структур, а именно:

- пространственный зарядовый эффект в газе [1];
- фотозарядовый эффект в полупроводниках [5];
- пробой положительного коронного газового разряда в проводнике  $SF_6$  [2];
- пробой в воздухе и проводнике  $SF_6$  [3];
- распространение стримера (электрический разряд в газе) [4];
- зарождение лидера молнии [6, 7].

Проблема возникновения неустойчивости (в широком смысле), приводящая к пространственной неоднородности заряда в движущейся заряженной среде, является одной из ключевых в электрогидродинамике (ЭГД).

Как правило, базовыми уравнениями модели ЭГД являются уравнения неразрывности для каждой из заряженных компонент (частицы различных сортов: электроны, положительные и отрицательные ионы, пылевые и т.д.), а также закон Пуассона, связывающий изменение напряженности порожденного заряженными частицами электрического поля с их концентрацией [1, 2, 3, 4]. Магнитным полем в рамках модели ЭГД пренебрегают.

Ключевое отличие модели ЭГД [5, 6, 7] состоит в том, что в модель помимо уравнений неразрывности и закона Пуассона, входит уравнение движения среды (уравнение Эйлера). Энергия, необходимая для зарождения и развития неустойчивости, черпается из кинетической энергии движущейся среды (например, движущееся грозное облако, в задаче о зарождении лидера молнии).

Однако уравнения модели ЭГД являются достаточно сложными для аналитического нахождения неизвестных величин (концентрации частиц, их скорости, напряженности поля), как функций времени и координат, ввиду того, что уравнения нелинейны, а математические преобразования сложны.

Один из подходов полуаналитического анализа модели состоит в том, что исследуется влияние напряженности электрического поля на поле скоростей. Такой подход изложен в работах [6, 8]. Он позволяет преобразовать систему нелинейных уравнений в частных производных к одному уравнению типа уравнения Бюргерса.

В работе [6] представлено разрывное автомодельное решение для безразмерного уравнения напряженности, обуславливающее появление почтипериодической структуры локальных скоплений заряженной среды (в случае преимущественно отрицательно заряженного газа). Вместе с этим, невыясненным оставался ключевой вопрос о качественной роли начальных условий в развитии неустойчивости.

Ответ на этот вопрос был изложен в [11] с заключением, что характер возможных решений различен в зависимости от начальных условий. Это означает наличие двух вариантов динамики модели: развитие неустойчивости либо периодические движения.

Другим не менее актуальным вопросом, сформулированным в [6] являлся вопрос о количественных значениях напряженности поля вблизи точек разрыва.

Настоящая работа является продолжением исследования модели [6] в рамках автоволнового приближения [7]. Интерес представляет исследование решений, уходящих в бесконечность за конечное время (разрывных решений).

С другой стороны, известно, что метод вейвлетов Хаара успешно применяют для численного решения начальных [9] и краевых задач [10] как для линейных, так и для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Представляется, что аппроксимация кусочно-разрывными функциями (базисом вейвлетов Хаара) будет приближать неизвестное решение точнее, если это решение разрывно (имеет большую скорость роста/убывания).

В настоящей работе будем решать задачу Коши для статического уравнения типа Бюргерса численно. Рассмотрим алгоритм численного решения задачи Коши с помощью метода вейвлетов Хаара (VXM), а также проведем сравнение с известным методом Рунге — Кутты (РК) 4-го порядка (функция ode45 в MATLAB).

## 1. Модель ЭГД-среды

Согласно [6, 8], ЭГД-модель электрон-ионной жидкости имеет вид:

$$en\vec{E} + \nabla p + mn\nu(\vec{v}_e - \vec{v}_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial x}(n\vec{v}_e) = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = -4\pi(n_e - n_i). \quad (3)$$

Здесь  $\vec{v}_e = \vec{v}_e(t, x)$ ,  $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ ,  $n_e = n_e(x, t)$  — неизвестные функции (параметры среды), подлежащие определению. Проектируя систему (1)–(3) на ось  $Ox$ , получим скалярную систему:

$$enE + kT \frac{\partial}{\partial x}n + mn\nu(v_e) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial x}(nv_e) = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}E = -4\pi(n_e - n_i). \quad (6)$$

Основные предположения модели такие:

$$v_e(t, x) \equiv \text{const}, \quad v_i(t, x) \equiv 0. \quad (7)$$

В безразмерных переменных

$$z = \frac{n_e}{n_i}, \quad u = \frac{v_e}{v_*}, \quad l = \frac{2kT}{lE_*}, \quad y = \frac{E}{E_*}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \\ v_* = \frac{eE_*}{m\nu}, \quad \beta^2 = \frac{2P_0}{D_*}, \quad D_* = \frac{E^2}{8\pi}, \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{4\pi e\nu n_i}$$

система (4)–(6) сводится к одному уравнению в частных производных относительно безразмерной напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - y \left( \frac{\beta^2}{2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \right), \quad (8)$$

где  $y(\xi, \tau)$  — безразмерная напряженность электрического поля;  $\xi$  — безразмерная пространственная переменная;  $\tau$  — безразмерная переменная времени, соответственно. Уравнение (8) является уравнением типа уравнения Бюргерса [6, 8] с упругим слагаемым  $-y\beta^2/2$ . В [6] было показано, что уравнение (8) при  $\beta = 0$  имеет разрывное автомodelное решение вида

$$y(\xi - \gamma\tau) = \frac{C_1 \text{Ai}'(\xi - \gamma\tau) + C_2 \text{Bi}'(\xi - \gamma\tau)}{C_1 \text{Ai}(\xi - \gamma\tau) + C_2 \text{Bi}(\xi - \gamma\tau)}. \quad (9)$$

Будем рассматривать общий случай при  $\beta \neq 0$ , тогда автомodelное уравнение для уравнения (8) с учетом замены  $\xi - \gamma\tau$  имеет следующий вид:

$$y'' + 2y'(y - \gamma) - \beta^2 y = 0. \quad (10)$$

Для уравнения (10) явного решения получить не удастся, однако, качественный характер решений исследовался в работе [11] методом фазовой плоскости. Было показано, что автономное уравнение (10) в зависимости от начальных условий имеет решения различного характера. Так, существует фазовая область начальных условий, для которых решение уходит на бесконечность за конечное время.

Целью данной работы является численное решение уравнения (10) с помощью метода вейвлетов Хаара [9, 10]. Будем рассматривать задачу Коши для (10) с начальными условиями

$$y(0) = \alpha_1, \quad y'(0) = \beta_1. \quad (11)$$

## 2. Метод вейвлетов Хаара

Базис вейвлетов Хаара для  $x \in [0, 1)$ , согласно [9], определяется следующим образом

$$\psi_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta), \\ -1, & x \in [\beta, \gamma), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha = k/m$ ,  $\beta = (k + 0,5)/m$ ,  $\gamma = (k + 1)/m$ , целое число  $m = 2^j$ ,  $j = \overline{0, J}$ , определяет порядок вейвлета (уровень разрешения), а целое число  $k = \overline{0, m-1}$  — параметр сдвига. Максимальный уровень разрешения равен  $J$ . Номер базисной функции  $i$  в (12) определяется выражением:  $i = m + k + 1$ . Функция  $\psi_1^0(x)$  — масштабирующая для семейства вейвлетов Хаара, которая определяется так:

$$\psi_1^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\psi_i^1(x) = \int_0^x \psi_i^0(s) ds, \quad \psi_i^{n+1}(x) = \int_0^x \psi_i^n(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$\psi_i^1(x) = \begin{cases} x - \alpha, & x \in [\alpha, \beta), \\ \gamma - x, & x \in [\beta, \gamma), \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (14)$$

$$\psi_i^2(x) = \begin{cases} \frac{(x - \alpha)^2}{2}, & x \in [\alpha, \beta), \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{(\gamma - x)^2}{2}, & x \in [\beta, \gamma), \\ \frac{1}{4m^2}, & x \in [\gamma, 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

Следуя [9], положим

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^0(x). \quad (16)$$

Введем узлы коллокации

$$x_j = \frac{j - 0,5}{2M}, \quad j = \overline{1, 2M}. \quad (17)$$

Подставляя выражения для  $y(x)$ ,  $y'(x)$  и  $y''(x)$  в дифференциальное уравнение (10) в узлах коллокации (17), получим нелинейную систему порядка  $2M \times 2M$  для определения неизвестных коэффициентов  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 2M}$ . С учетом начальных условий (11) аппроксимация функции  $y(x)$  и ее первой производной имеет вид:

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^0(s) ds = \beta_1 + \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^1, \quad (18)$$

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^1(s) ds = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^2. \quad (19)$$

Подставляя эти выражения (16)–(19) при  $\gamma = 0$  в уравнение (10), получим нелинейную алгебраическую систему уравнений

$$\left( \alpha_1 + x_j \beta_1 + \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^2(x_j) \right) \left( 2\beta_1 + 2 \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^1(x_j) - \beta^2 \right) + \sum_{i=1}^{2M} c_i \psi_i^0(x_j) = 0, \quad j = \overline{1, 2M}, \quad (20)$$

которую будем решать итерационным методом Ньютона. Решение системы (20) определит неизвестные коэффициенты разложения  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 2M}$ .

### 3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим две задачи: с известным аналитическим решением и без него. Точность алгоритма будем оценивать в кубической норме

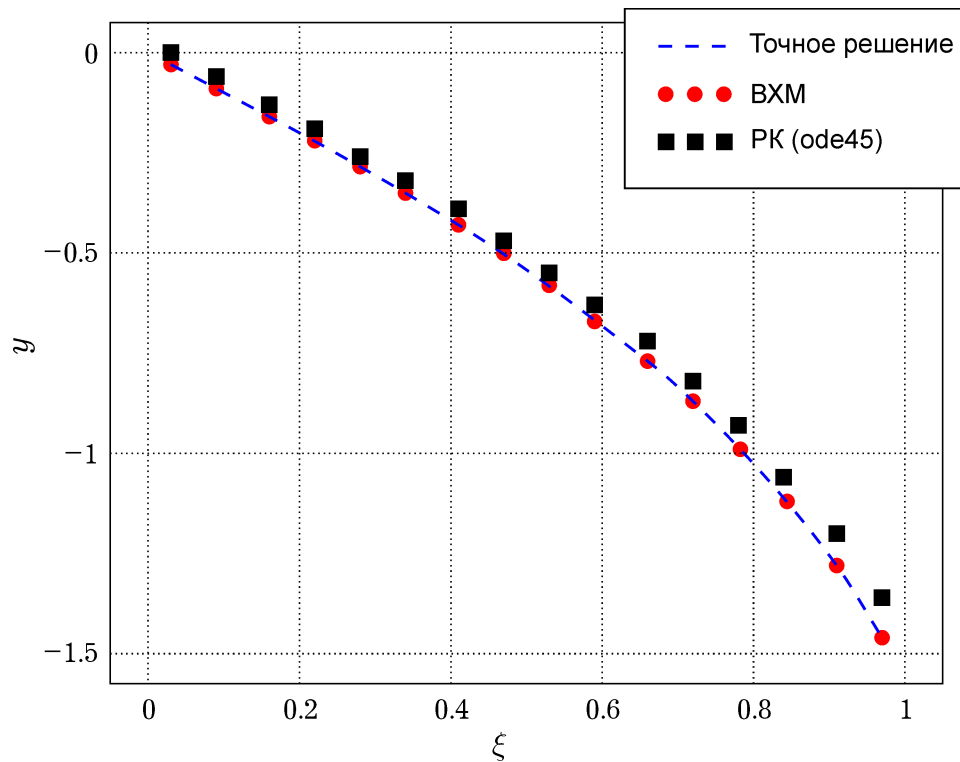
$$\|\varepsilon\| = \frac{\max_j |y_j^e - y_j^a|}{\max_j |y_j^e|},$$

где  $y_j^e$  — точное решение, а  $y_j^a$  — численное.

**Задача 1.** Рассмотрим задачу Коши (10), (11) с параметрами

$$\gamma = 0, \quad \beta^2 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -1.$$

Известно точное решение такой задачи  $y(\xi) = -\operatorname{tg} \xi$ .



**Рис. 1.** Сравнение численных решений по методу BXM и по методу Рунге — Кутты с точным при значениях параметров  $\gamma = 0$ ,  $\beta^2 = 0$

Все вычисления были выполнены в среде MATLAB. Была использована стандартная функция **ode45** решения задачи Коши методом РК. Уровень разрешения принимался равным  $J = 3$ , а число узлов коллокации  $2M = 2^{J+1} = 16$ . Ошибка метода РК составила 0.093225, в то время как ошибка метода BXM — 0.0038597. Ошибка между численным решением по методу РК и BXM 0.097084. Сравнение точного решения и численных по методу BXM и РК показано на рис. 1.

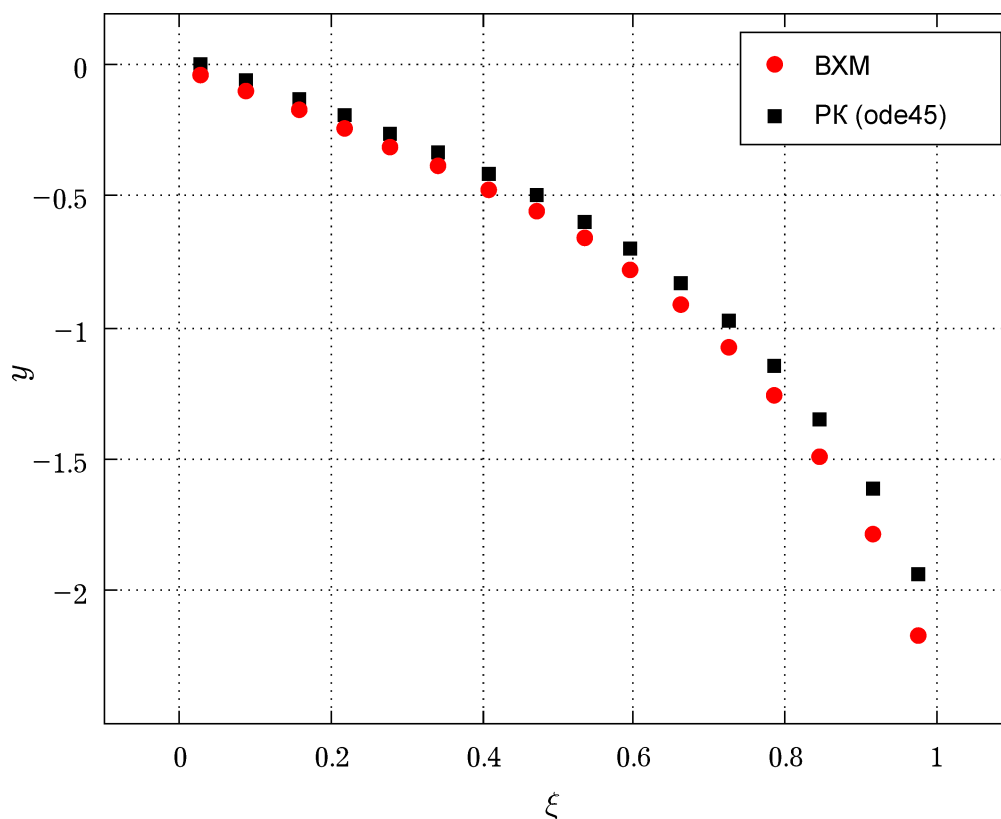
**Задача 2.** Рассмотрим задачу Коши (10), (11) с параметрами

$$\gamma = 0, \quad \beta^2 = 2, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = -1.$$

Для такой задачи явного решения нет, поэтому будем сравнивать численное решение по методу BXM с решением по методу РК.  $L_\infty$ -ошибка между РК и BXM составила 0.21825 для количества точек  $2M = 16$ . Для  $2M = 32$  и  $2M = 64$  ошибка в норме  $L_\infty$  составила 0.1176 и 0.061194 соответственно. Сравнение численных решений по методу BXM и РК представлено на рис. 2.

### Заключение

В настоящей работе рассматривалась задача Коши для автомодельного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, которое возникает в задаче о движении двухжидкостной плазмы. Изложен алгоритм решения задачи Коши с помощью метода вейвлетов Хаара.



**Рис. 2.** Сравнение численных решений по методу ВХМ и методу РК задачи 2 при значениях параметров  $\gamma = 0$ ,  $\beta^2 = 2$

Численный эксперимент показал, что метод вейвлетов Хаара определяет решение точнее, чем метод Рунге — Кутты 4-го порядка, для малого количества узлов коллокации (16 точек) в задаче 1 с известным аналитическим решением. В задаче 2, где точное решение неизвестно, относительная погрешность между численными решениями по вейвлет Хаар методу и методу Рунге — Кутты уменьшается при увеличении количества коллокационных точек.

### Список литературы

1. Morrow R., Lowke J.J. Space-charge effects on drift dominated electron and plasma motion // J. Phys. D. 1981. Vol. 14, no. 11. P. 2027–2034. DOI: 10.1088/0022-3727/14/11/010.
2. Morrow R. Theory of Positive Corona in  $SF_6$  Due to a Voltage Impulse // IEEE Transactions on Plasma Science. 1991. Vol. 19, no. 2. P. 86–94. DOI: 10.1109/27.106801
3. Morrow R., Lowke J.J. Electrical Breakdown in Air and in  $SF_6$  // Aust. J. Phys. 1995. Vol. 48. P. 453–460. DOI: 10.1071/PH950453.
4. Morrow R. Streamer propagation in air // J. Phys. D. 1997. Vol. 3, iss. 4. P. 614–627. Streamer propagation in air // J. Phys. D. 1997. Vol. 30, no. 4. P. 614–627. DOI: 10.1088/0022-3727/30/4/017.

5. Pustovoit V.I., Borisov M., Ivanov O. Photon-charge effect in conductors // *Physics Letters A*. 1989. Vol. 135, no. 1. P. 59–61. DOI: 10.1016/0375-9601(89)90728-7.
6. Пустовойт В.И. О механизме возникновения линейной молнии // *Радиотехника и электроника*. 2006. Т. 51, № 8. С. 996–1002.
7. Пустовойт В.И. Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики заряженной среды и проблема возникновения молнии // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2011. Спец. вып. «Современные проблемы оплотехники». С. 16–30.
8. Moreau E., Vallee O. Connection between the Burgers equation with an elastic forcing term and a stochastic process // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, iss. 1. P. 1–4. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.016112.
9. Lepik Ü. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2005. Vol. 68, no. 2. P. 127–143. DOI: 10.1016/j.matcom.2004.10.005.
10. Siraj-ul-Islam, Imran Aziz, Božidar Šarler. The numerical solution of second-order boundary-value problems by collocation method with the Haar wavelets // *Mathematical and Computer Modelling*. 2012. Vol. 52, iss. 9–10. P. 1588–1590. DOI: 10.1016/j.mcm.2010.06.023.
11. Кравченко О.В. Исследование одномерной модели течения струи заряженного газа // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн*. 2011. № 8. Режим доступа: <http://www.technomag.edu.ru/doc/224791.html> (дата обращения 01.07.2013).



**Numerical solving static equations  
in a charged gas flow model  
with the use of Haar wavelet method**

# 08, August 2013

DOI: 10.7463/0813.0583405

Kravchenko O. V.

Bauman Moscow State Technical University  
105005, Moscow, Russian Federation  
[olekravchenko@gmail.com](mailto:olekravchenko@gmail.com)

This article considers the Cauchy problem for the second order automodeling nonlinear ordinary differential equation in the problem of two-fluid plasma motion. An algorithm for solving this problem with the use of Haar wavelet method was described. A numerical experiment showed that Haar wavelet method is more accurate than the fourth order Runge-Kutta method for few collocation points in problem 1 with a known analytical solution. In problem 2, where the exact solution is unknown, relative error between numerical solutions by Haar wavelet method and Runge-Kutta method tends to decrease with the growth of the number of collocation points.

**References**

1. Morrow R., Lowke J.J. Space-charge effects on drift dominated electron and plasma motion. J. Phys. D, 1981, vol. 14, iss. 11, pp. 2027–2034. DOI: 10.1088/0022-3727/14/11/010.
2. Morrow R. Theory of Positive Corona in  $SF_6$  Due to a Voltage Impulse. IEEE Transactions on Plasma Science, 1991, vol. 19, no. 2, pp. 86–94. DOI: 10.1109/27.106801.
3. Morrow R., Lowke J.J. Electrical Breakdown in Air and in  $SF_6$ . Aust. J. Phys., 1995, vol. 48, pp. 453–460. DOI: 10.1071/PH950453.
4. Morrow R. Streamer propagation in air. J. Phys. D, 1997, vol. 30, iss. 4, pp. 614–627. DOI: 10.1088/0022-3727/30/4/017.
5. Pustovoyt V.I., Borisov M., Ivanov O. Photon-charge effect in conductors. Physics Letters A, 1989, vol. 135, no. 1, pp. 59–61. DOI: 10.1016/0375-9601(89)90728-7.
6. Pustovoyt V.I. O mekhanizme vozniknoveniya lineynoy molnii [Mechanism of lightning discharge]. Radiotekhnika i elektronika, 2006, vol. 51, no. 8, pp. 996–1002. (English Translation:

Journal of Communications Technology and Electronics, 2006, vol. 51, iss. 8, pp. 937–943. DOI: 10.1134/S1064226906080110).

7. Pustovoyt V.I. Ob avtomodel'nykh resheniyakh uravneniy gidrodinamiki zaryazhennoy sredy i problema vozniknoveniya molnii [On automodel solutions to equations of fluid dynamics of charged medium and the problem of lightning occurrence]. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Instrument Engineering], 2011, spec. iss. "Sovremennye problemy optotekhniki" ["Modern problems of optical engineering"], pp. 16–30.
8. Moreau E., Vallee O. Connection between the Burgers equation with an elastic forcing term and a stochastic process. Phys. Rev.E, 2006, vol. 73, iss. 1, pp. 1-4. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.016112.
9. Lepik Ü. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. Mathematics and Computers in Simulation, 2005, vol. 68, iss. 2, pp. 127–143. DOI: 10.1016/j.matcom.2004.10.005.
10. Siraj-ul-Islam, Imran Aziz, Božidar Šarler. The numerical solution of second-order boundary-value problems by collocation method with the Haar wavelets. Mathematical and Computer Modelling, 2012, vol. 52, iss. 9–10, pp. 1588–1590. DOI: 10.1016/j.mcm.2010.06.023.
11. Kravchenko O.V. Issledovanie odnomernoy modeli techeniya strui zaryazhennogo gaza [Investigation of one-dimensional model of a jet of charged gas flow]. Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 8. Available at: <http://www.technomag.edu.ru/doc/224791.html>, accessed 01.07.2013.