

УДК 004.358, УДК 004.383.4

**Предварительный анализ и выбор алгоритма для аппроксимации
траекторных параметров движения Ракет-носителей и космических
объектов**

Гаврилова М.А., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Компьютерные системы и сети»*

Наумова Е.Е., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Компьютерные системы и сети»*

Научный руководитель: Воронин С.В.,

начальник отдела КВ УВЦ МГТУ им. Н.Э.Баумана

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

bauman@bmstu.ru

Технически развитые страны проводят исследования космического пространства с целью его всестороннего использования при решении экономических и оборонных задач. В современных условиях возрастает важность разработки транспортных космических систем полностью или частично многократного применения, обеспечивающих выполнение целевой задачи полёта с наименьшими затратами.

Рассматриваются три основные технические концепции построения полностью или частично многоразовых транспортных космических систем: ракетно-космические системы для выведения орбитальных космических кораблей; авиационно-космические системы, использующие дозвуковые самолеты-носители; воздушно-космические системы, реализующие гиперзвуковые скорости движения в атмосфере.

Большое значение и наибольшие трудности представляет изучение особенностей и разработка методов формирования управления траекториями аэрокосмических аппаратов на атмосферных участках, то есть при полёте ниже условной границы атмосферы, за которую обычно принимают высоту, равную 100 километрам.

Существующие методы наведения баллистических ракет и ракет-носителей основаны на линеаризации зависимости конечных условий полета от управляющих параметров. Это обстоятельство, в свою очередь, влияет на точность методов наведения и,

в частности, приводит к завышению размеров областей падения, обработавших ступеней, рассматриваемых летательных аппаратов.

Движение аэрокосмических аппаратов в атмосфере характеризуется многорежимностью и наличием разнообразных ограничений, управление траекторией является многоканальным, а требования к точности выполнения заданных конечных условий достаточно высоки. Совершенствование вычислительной техники устраняет препятствия к использованию методов и алгоритмов управления, использующих все имеющиеся у аэрокосмических аппаратов возможности для повышения точности управления и надёжности выполнения манёвров на всех режимах движения в атмосфере и околоземном космическом пространстве, включая нештатные ситуации.

Общая задача управления движением летательного аппарата заключается в определении параметров траектории и характеристик аппарата (задачи навигации и идентификации), формировании управления движением центра масс (задача управления траекторией или задача наведения) и формировании управления движением относительно центра масс (задачи ориентации и стабилизации).

Для написания наиболее качественного и точного алгоритма возникает необходимость пересчета координат из одной системы в другую. Общеземные геоцентрические координаты WGS-84 пересчитывают в геодезические широты B , долготы L и высоты H . Геодезические высоты трансформируют в ортометрические высоты H^g . По геодезическим широтам и долготам вычисляют плоские прямоугольные координаты, например, в проекции UTM. От вычисленных таким образом координат необходимо перейти к соответствующим координатам, применяемым в России. Переход может быть выполнен на любом этапе.

Метод наименьших квадратов

Полное ускорение ЛА на активном участке траектории можно представить в виде векторной суммы кажущегося и гравитационного ускорений:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \vec{\dot{W}}(t) + \vec{g}[\vec{r}(t)]$$

Здесь $\frac{d\vec{W}(t)}{dt}$ – вектор кажущегося ускорения. Скорость полета ракеты на АУТ при этом рассчитывается в форме интеграла:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{\dot{W}}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \vec{g}[\vec{r}(\tau)] d\tau \text{ или } \vec{V}(t) = \vec{W}(t) + \vec{V}_g(t).$$

Традиционно интегралы в вычислялись численными методами, что приводило к упомянутым выше упрощениям (линеаризации) при синтезе алгоритма наведения.

В качестве исходных данных для реализации рассматриваемого полуаналитического метода интегрирования этих зависимостей принимаются табличные функции $W_{x1}(t)$, $\dot{W}_{x1}(t)$ и $\mathcal{A}(t)$ (или $\mathcal{A}(W_{x1})$), полученные по результатам решения краевой баллистической задачи и расчета эталонной опорной траектории.

Использование только продольной составляющей кажущейся скорости ЛА, $W_{x1}(t)$, для вычисления расчетной траектории в процессе наведения основано на многолетней практике использования таких зависимостей в качестве программных функций для регулирования кажущейся скорости в полете как для ракет-носителей, так и для баллистических ракет. Поэтому целесообразно для прогноза движения ЛА на активном участке при разработке математической модели, используемой при прогнозировании движения на активном участке, учитывать только продольные составляющие действующих поверхностных сил, а влияние оставшихся составляющих учитывать соответствующим подбором параметров рассматриваемой модели. Это обеспечивает компенсацию целого ряда формально неучтенных схематизацией предлагаемой выше модели факторов, влияющих на изменение продольного кажущегося ускорения[4].

Представим значение продольной кажущейся скорости в некоторый момент времени t как сумму ее начального значения на момент времени $t_0 \leq t$ и приращения этой функции на интервале времени $\tau = t - t_0$:

$$W_{x1}(t) = W_{x1}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{W}_{x1}(\tau) d\tau \quad \text{или} \quad W_{x1}(t) = W_{x1}(t_0) + \Delta W_{x1}(\tau).$$

Анализ характера поведения функции $\dot{W}_{x1}(t)$ позволяет разбить функцию $W_{x1}(t)$ на n характерных интервалов, получив, таким образом, ряд базовых аппроксимирующих функций $\Delta W_{xi}(\tau)$, $i = 1 \dots n$.

Для аппроксимации приращений продольной кажущейся скорости в качестве базисных целесообразно выбрать две базовых функции: логарифмическую (для моделирования на участках полета, где используется маршевый режим работы двигателей) и параболическую (на участках полета с переходными режимами работы двигательной установки: при ее форсировании либо дросселировании).

Аппроксимация на каждом из интервалов осуществляется на основе метода наименьших квадратов. Минимизация невязок аппроксимации целевых функций осуществляется на основе критерия:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_i(U_i^*, T_i^*)}{\partial U} = 0 \\ \frac{\partial Q_i(U_i^*, T_i^*)}{\partial T} = 0 \end{cases}$$

Таблица 1

Базовые функции

Вид зависимости	Целевая функция	Базисная функция
Логарифмическая	$Q_i = \sum_{k=1}^N [\Delta W_{xk} + U_i \ln(1 - \tau_k / T_i)]^2$	$\Delta W_{xk} = -U_i \ln\left(1 - \frac{\tau}{T_i}\right)$
Параболическая	$Q_i = \sum_{k=1}^N [\Delta W_{xk} - (U_i \tau_k + T_i \tau_k^2)]^2$	$\Delta W_{xk} = U_i \tau + T_i \tau^2$

Это позволяет определить обобщенные параметры аппроксимации (табл.1) U_i и T_i для каждого из выбранных участков. Затем из всех типов возможных для каждого участка аппроксимаций выбирается тот, который обеспечивает наименьшее максимальное отклонение полученной аппроксимирующей функции от номинальных значений кажущейся скорости в узловых точках на всем интервале аппроксимации.

Метод линеаризующих преобразований

Аппроксимация эмпирической выборки осуществляется на основе линейного регрессионного анализа, обеспечивающего при определении параметров линейной зависимости вида $y(x) = b_1 x + b_0$ минимум среднеквадратического отклонения.

Искомые коэффициенты линейной регрессии определяются по формулам:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i - N \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$b_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i - b_1 \sum_{i=1}^N x_i \right).$$

С целью расширения функционального базиса в модели применен метод линеаризующих преобразований нелинейной регрессии к линейной с помощью

соответствующих типу функции подстановок для искомых значений b_0 и b_1 , приведенных в таблице 2.

Таблица 2

Преобразования, сводящие нелинейную регрессию к линейной

№	Функции $y(x)$	x'	y'	b_0	b_1
1	$b_0 + b_1 x$	x	y	b_0	b_1
2	$1/(b_0 + b_1 x)$	x	$1/y$	b_0	b_1
3	$b_0 + b_1/x$	$1/x$	y	b_0	b_1
4	$x/(b_0 + b_1 x)$	x	x/y	b_0	b_1
5	$b_0 b_1^x$	x	$\lg y$	$10 b_0$	$10 b_1$
6	$b_0 \exp(b_1 x)$	x	$\ln y$	$\exp b_0$	b_1
7	$b_0 10^{(b_1 x)}$	x	$\lg y$	10^{b_0}	b_1
8	$1/(b_0 + b_1 e^{-x})$	e^{-x}	$1/y$	b_0	b_1
9	$b_0 x^{b_1}$	$\lg x$	$\lg y$	10^{b_0}	b_1
10	$b_0 + b_1 \lg x$	$\lg x$	y	b_0	b_1
11	$b_0 + b_1 \ln x$	$\ln x$	y	b_0	b_1
12	$b_0/(b_1 + x)$	x	$1/y$	$1/b_0$	b_0/b_1
13	$b_0 x/(b_1 + x)$	$1/x$	$1/y$	$1/b_0$	b_0/b_1
14	$b_0 \exp(b_1/x)$	$1/x$	$\ln y$	$\exp b_0$	b_1
15	$b_0 10^{(b_1/x)}$	$1/x$	$\lg y$	10^{b_0}	b_1
16	$b_0 + b_1 x^n$	x^n	y	b_0	b_1

Реализованный алгоритм позволяет также определять параметры b_0 , b_1 и b_2 параболической регрессии вида $y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ из решения системы уравнений:

$$b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^N x_i + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i,$$

$$b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^3 = \sum_{i=1}^N x_i y_i,$$

$$b_0 \sum_{i=1}^N x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^4 = \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i.$$

Рассмотрим, как будет выглядеть трасса космического аппарата при движении по эллиптическим и гиперболическим орбитам.

При построении трассы КА в общем случае движения по кеплеровской траектории предполагаем, что заданы все шесть элементов орбиты Ω , i , ω , P , e , τ и звездное <http://sntbul.bmstu.ru/doc/620548.html>

время S_K на меридиане Гринвича в момент t_0 окончания активного участка траектории выведения.

Приведем последовательность расчетов при построении трассы. Прежде всего, находим аргумент широты

$$u = \omega + \vartheta,$$

где зависимость угла ϑ от времени t находим решением соответствующих уравнений Кеплера. В результате решения этих уравнений находим зависимость угла u от времени:

$$u = u(t)$$

затем находим геоцентрическую широту ψ подспутниковой точки, пользуясь зависимостью:

$$\sin \psi = \sin i \sin u(t),$$

$$-i \leq \psi = \psi(t) \leq i \quad \text{при } i \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-(\pi - i) \leq \psi = \psi(t) \leq \pi - i \quad \text{при } i \geq \frac{\pi}{2}.$$

где

Имея зависимость $\psi = \psi(t)$, переходим к расчету угла φ между направлениями на восходящий узел и плоскостью меридиана подспутниковой точки. Для этого используем зависимость

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \psi(t)}{\operatorname{tg} i}, \quad 0 \leq \psi = \psi(t) \leq 2\pi,$$

где угол φ надо брать в той же четверти, что и аргумент широты u .

Для определения долготы λ воспользуемся следующей зависимостью

$$\lambda = \Omega + \varphi(t) - S_K - \omega_3(t - t_0).$$

Снова, как и в случае круговых орбит, за начало витка будем брать момент прохождения восходящего узла. Первый виток может быть неполным, ибо время t_0 в общем случае не совпадает с моментом прохождения восходящего узла, тогда время в начале первого полного витка $t_{0в} > t_0$. Найдем время $t_{0в}$. Для этого найдем начальное значение истинной аномалии ϑ_0 . Затем находим истинную аномалию $\vartheta_в$ в восходящем узле $\vartheta_в = 2\pi - \omega$,

Пользуясь уравнением Кеплера, найдем время движения от начального момента t_0 до восходящего узла. Обозначим это время через Δt_v . В результате для эллиптической орбиты находим

$$\Delta t_v = \frac{T}{2\pi} [(E_v - e \sin E_v) - (E_0 - e \sin E_0)],$$

где E_0, E_v - значения эксцентрисической аномалии в начальной точке и в восходящем узле орбиты; Начало первого витка орбиты $t_{ов} = t_0 + \Delta t_v$.

На рис.1 показана трасса КА, попадающего в сферу действия Земли извне и затем уходящего в бесконечность по гиперболе. Трасса КА, выводимого на гиперболическую орбиту с поверхности Земли, будет представлять лишь часть трассы, изображенной на рис.1, то есть часть трассы от точки выхода на орбиту до ухода аппарата в бесконечность.

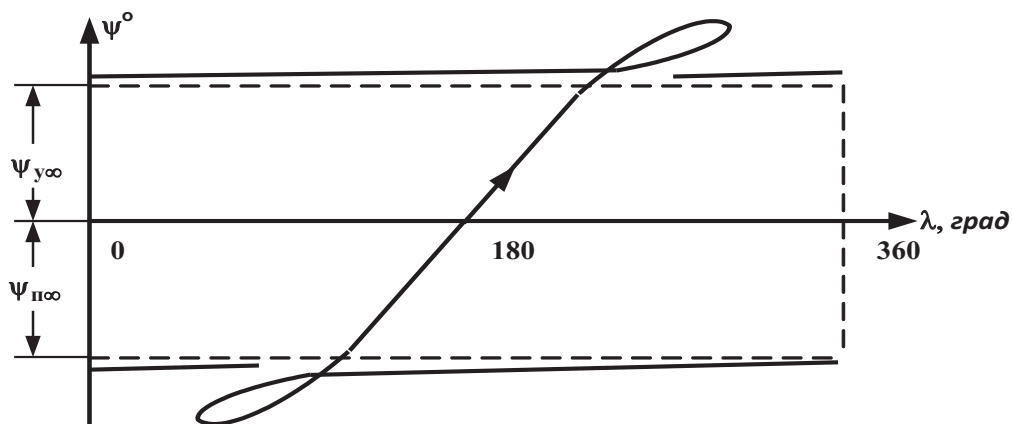


Рис. 1. Трасса КА, попадающего в сферу действия Земли

В случае гиперболических и параболических траекторий широты бесконечно удаленных точек ветвей орбиты приближаются к своим предельным значениям. Получим выражения для расчета численных значений предельных широт. Обратимся к рис.2, где $K'O, A'O$ есть асимптоты "приходящей" и "уходящей" ветвей гиперболы. Из точки F_1 проведем прямую F_1D , параллельную асимптоте $K'O$. Угол γ между прямыми F_1D и $F_1\Pi$ равен $\pi - \vartheta_\infty$. Отрезок F_1D пересекает небесную сферу в точке D' . Через точку D' проведем небесный меридиан, пересекающий небесный экватор в точке C .

Соединим точки D' и B дугой большого круга и применим к сферическому треугольнику $D'BC$ теорему синусов

$$\frac{\sin(\omega + \gamma)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin(-\psi_{\infty})}{\sin i},$$

где ψ_{∞} - широта бесконечно удаленной точки приходящей ветви гиперболы.

Откуда находим

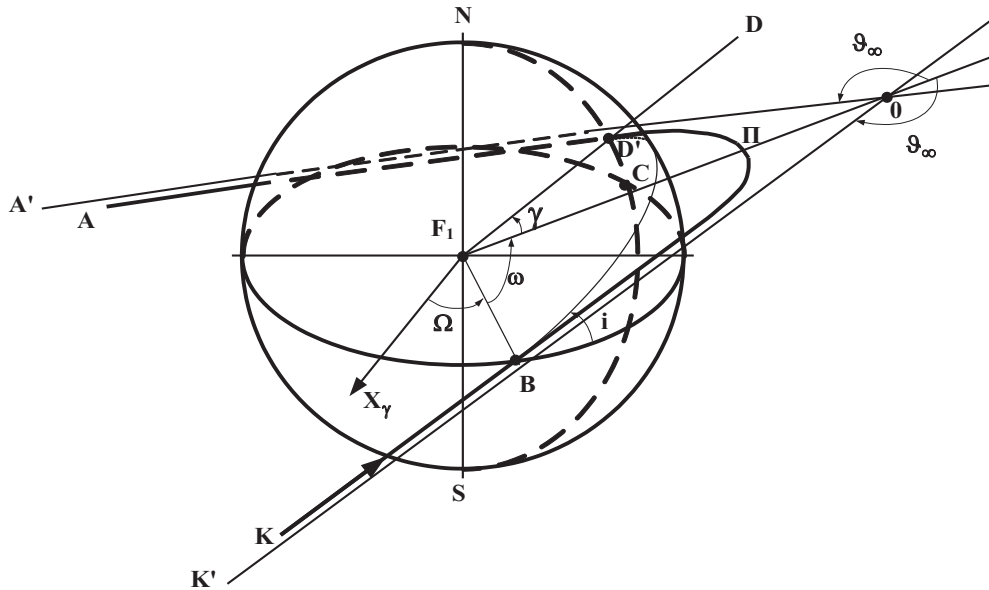


Рис. 2. Трасса движения КА по гиперболическим и параболическим траекториям

$$\sin \psi_{\infty} = \sin i \sin(\omega - \vartheta_{\infty}).$$

Аналогично получаем выражение для широты $\psi_{y\infty}$ уходящей ветви

$$\sin \psi_{y\infty} = \sin i \sin(\omega + \vartheta_{\infty}).$$

В случае параболы $\vartheta_{\infty} = \pi$ и тогда $\sin \psi_{y\infty} = \sin \psi_{\infty} = -\sin i \sin \omega$,

то есть широты точек на бесконечно удаленных ветвях параболы приближаются к своему единственному предельному значению $\psi_{\infty} = \psi_{\infty} = \psi_{y\infty}$.

Функции, которые будут использоваться для решения поставленной задачи, показаны в таблице 3. Алгоритм выполнения программы представлен на рис. 3. Для каждой функции задается набор параметров, как для вычисления функции, так и для вычисления коэффициентов.

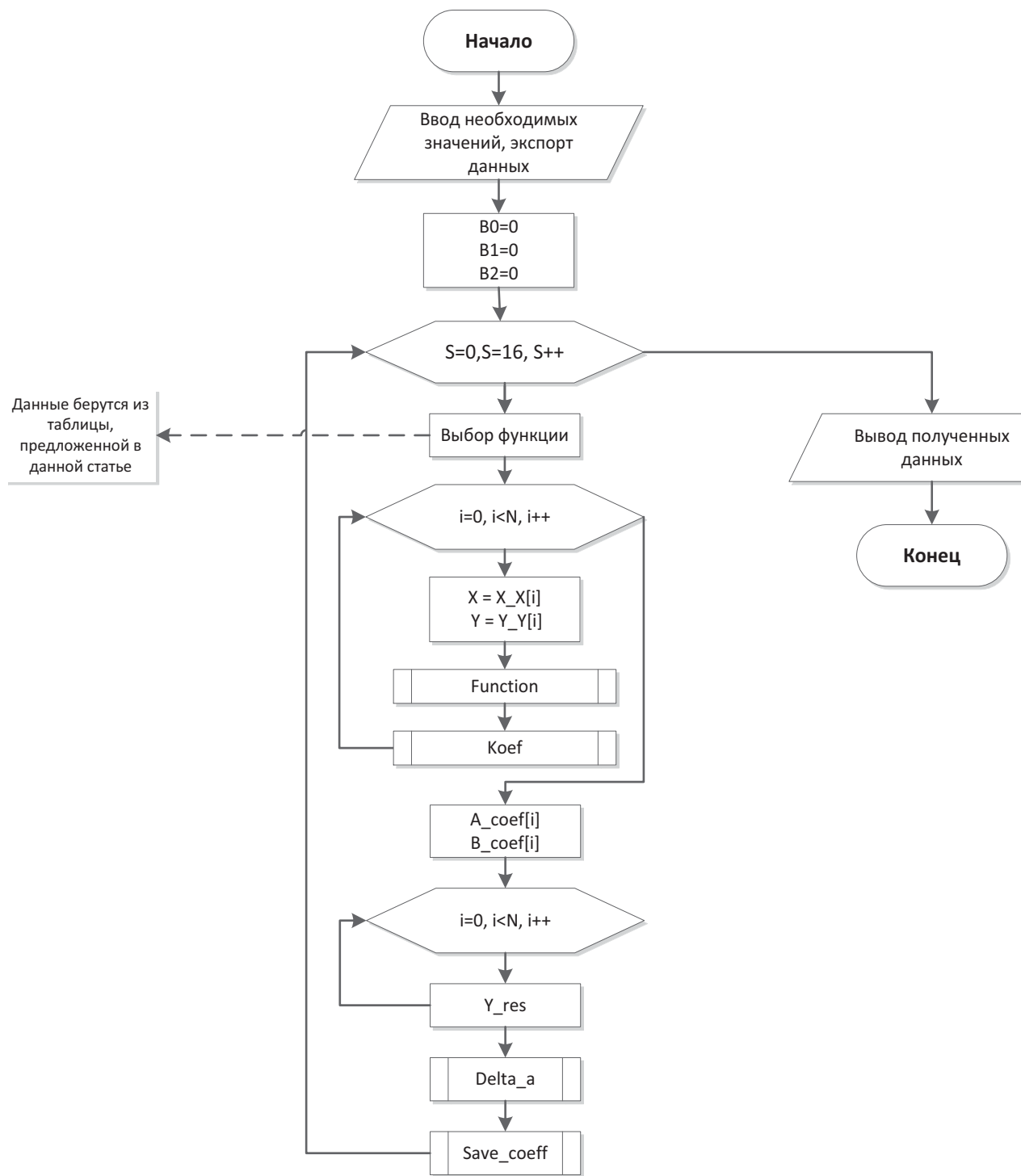


Рис. 3. Алгоритм работы программы

Таблица 3

Значения функциональных параметров

Функция	X	Y	&X1_X	&Y1_Y	&X2_X	&Y2_Y	&P_Cor
F1	-	-	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F2	-	1/Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F3	1/X	-	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F4		X/Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F5	-	Log ₁₀ Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F6	-	Log Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F7	-	Log ₁₀ Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F8	e ^{-x}	1/Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F9	Log ₁₀ X	Log ₁₀ Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F10	Log ₁₀ X	-	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F11	Log X	-	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F12	-	1/Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F13	1/X	1/Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F14	1/X	Log Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y
F15	1/X	Log ₁₀ Y	X	Y	X*X	Y*Y	X*Y

Эти параметры заданы стандартным способом, для функции параболы задаются следующие коэффициенты b_p, c_p, f_p, m_p, p_p, r_p, s_p, dd, ee, kk, ll, qq. Значения коэффициентов в начале программы обнуляется.

Таблица 4

Расчет коэффициентов и результирующей функции

Функция	Коэффициенты		Результирующая функция
	A_coef	B_coef	
F1	W_W	V_V	Y_res[i*16]=A_coef[0]+B_coef[0]*X_X[i]
F2	W_W	V_V	Y_res[i*16+1]=1/(A_coef[1]+B_coef[1]*X_X[i])
F3	W_W	V_V	Y_res[i*16+2]=A_coef[2]+B_coef[2]/X_X[i]
F4	W_W	V_V	Y_res[i*16+3]= X_X[i]/(A_coef[3]+B_coef[3]*X_X[i])
F5	pow(10., W_W)	pow(10., V_V)	Y_res[i*16+4]=A_coef[4]*pow(B_coef[4],X_X[i])

F6	$\exp(W_W)$	V_V	$Y_res[i*16+5]=A_coef[5]*\exp(B_coef[5]*X_X[i])$
F7	$\text{pow}(10., W_W)$	V_V	$Y_res[i*16+6]=A_coef[6]*\text{pow}(10., B_coef[6]*X_X[i])$
F8	W_W	V_V	$Y_res[i*16+7]=1/(A_coef[7]+B_coef[7]*\exp(-X_X[i]))$
F9	$\text{pow}(10., W_W)$	V_V	$Y_res[i*16+8]=A_coef[8]*\text{pow}(X_X[i], B_coef[8])$
F10	W_W	V_V	$Y_res[i*16+9]=A_coef[9]+B_coef[9]*\log_{10}(X_X[i])$
F11	W_W	V_V	$Y_res[i*16+10]=A_coef[10]+B_coef[10]*\log(X_X[i])$
F12	$1/V_V$	W_W/V_V	$Y_res[i*16+11]=A_coef[11]/(B_coef[11]+X_X[i])$
F13	$1/W_W$	V_V/W_W	$Y_res[i*16+12]=A_coef[12]*X_X[i]/(B_coef[12]+X_X[i])$
F14	$\exp(W_W)$	V_V	$Y_res[i*16+13]=A_coef[13]*\exp(B_coef[13]/X_X[i])$
F15	$\text{pow}(10., W_W)$	V_V	$Y_res[i*16+14]=A_coef[14]*\text{pow}(10., B_coef[14]/X_X[i])$
F16	$B0$	$B1$	$Y_res[i*16+15]=A_coef[15]+B_coef[15]*X_X[i]+C_par*X_X[i]*X_X[i]$

Для функции F16 также задается параметр $C_par=B2$

Процесс вычисления представлен ниже.

for(i=0; i<N; i++)

```

{
    b_p += X_X[i];
    c_p += X_X[i]*X_X[i];
    f_p += X_X[i]*X_X[i]*X_X[i];/*pow(X_X[i],3);*/
    m_p += X_X[i]*X_X[i]*X_X[i]*X_X[i];/*pow(X_X[i],4);*/
    p_p += Y_Y[i];
    r_p += X_X[i]*Y_Y[i];
    s_p += Y_Y[i]*X_X[i]*X_X[i];
}

dd = b_p;
```

```

        ee = c_p;
        kk = c_p;
        ll = f_p;
        qq = dd/N;
        ee -= qq*b_p;
        f_p-= qq*c_p;
        r_p-= qq*p_p;
        qq = kk/N;
        ll -= qq*b_p;
        m_p-= qq*c_p;
        s_p-= qq*p_p;
        qq = ll/ee;
        *B2 = (s_p - r_p*qq)/(m_p - f_p*qq);
        *B1 = (r_p - f_p*(*B2))/ee;
        *B0 = (p_p -b_p*(*B1) - c_p*(*B2))/N;
    }

```

После выполнения нами всех необходимых операций, мы можем вычислить коэффициенты B0, B1, B2.

Функция определения Дельты:

```

void Delta_a(int sd, double *delta)
{
    int i;
    double rs;
    for(i=0;i<N;i++)
    {
        rs = 100.*fabs(Y_Y[i] - Y_res[i*16+sd])/Y_Y[i];
        delta[sd] = maxim(delta[sd],rs);
    }
}

```

Функция определения коэффициента:

```

void koef(double *X1_X, double *X2_X,
          double *Y1_Y, double *Y2_Y, double *P_cor,
          double *V_V, double *W_W)

```

```

{
*V_V = ((*X1_X)*(*Y1_Y) - N*(*P_cor))
/ ((*X1_X)*(*X1_X) - N*(*X2_X));
*W_W = (*Y1_Y - (*V_V)*(*X1_X))/N;
*X1_X = 0.0;
*X2_X = 0.0;
*Y1_Y = 0.0;
*Y2_Y = 0.0;
*P_cor= 0.0;
}

```

Заключение

Предложенная в статье методика аппроксимации траекторных параметров ракет-носителей (космических аппаратов) основана на преобразований нелинейной регрессии к линейной. База функций, используемых для подстановки, составляют 16 однопараметрических алгебраических выражений. Выбор конкретной функции для аппроксимации эмпирической выборки осуществляется по критерию минимума среднеквадратического отклонения значений функции-подстановки от исходной зависимости.

Преимуществом подхода является простота практической реализации методики и математического аппарата. Основной недостаток заключается в существенных погрешностях при аппроксимации немонотонных функций. В качестве возможного направления совершенствования методики рассматривается её доработка с целью автоматического подбора нескольких функций-подстановок для аппроксимации немонотонных функций, имеющих один и более экстремумов.

Список литературы

1. Когут А. Т. Формирование алгоритмов управляющих воздействий на основе численных методов / А. Т. Когут, Н. Ю. Панфилова // Вестник Сиб. гос. аэрокосмического ун-та. 2009. Выпуск 1 (22). Ч. 1. С. 27-31.
2. Пересчет координат [Электронный ресурс] // <http://kartaplus.ru/sputpos13> (Дата обращения: 19.03.2013)
3. Козлов П.Г. Разработка алгоритма восстановления траекторий ЛА на основе обобщенных проектных параметров и параметров программы управления//Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов

- общеуниверситетской научно-технической конференции “Студенческая научная весна – 2011”, посвященной 50-летию полета Ю.А. Гагарина в космос. 4 – 30 апреля 2011 г. Том XI, часть 3. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. С. 25-27
4. Беневольский С.В. Математические модели движения для синтеза методов наведения перспективных баллистических ракет// Ежемесячный научно-технический сборник «Оборонная техника», № 3-4, 2007 г.
 5. Болсуновский С., Вермель В. Сплайн-аппроксимация траектории инструмента в современных системах управления [Электронный ресурс] // URL: <http://www.sapr.ru/article.aspx?id=20469&iid=935> (Дата обращения: 20.04.2013)
 6. Белкин В.К., Вермель В.Д., Николаев П.М. Аппроксимация табличной функции на плоскости параметрическим кубическим сплайном с использованием метода наименьших квадратов//Труды ЦАГИ. Вып. 2555. 1995.