

Локализация инвариантных компактов двумерных непрерывных динамических систем

07, июль 2013

DOI: 10.7463/0713.0583104

Канатников А. Н., Федорова Ю. П.

УДК 517.925.5

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

Введение

Один из методов качественного анализа динамической системы состоит в оценке положения ее *инвариантных компактных множеств*. Под инвариантным множеством понимают такое множество в фазовом пространстве системы, для которого любая траектория системы либо целиком принадлежит множеству, либо не пересекается с ним. Инвариантные множества с дополнительным условием компактности тесно связаны с ограниченными траекториями системы (положениями равновесия, предельными циклами, сепаратрисами) и такими их конгломератами как аттракторы и репеллеры.

Для оценки положения инвариантных компактных множеств можно использовать *локализирующие множества*, т.е. такие множества в фазовом пространстве системы, которые содержат все ее инвариантные компакты [1].

Один из методов построения локализирующих множеств основан на использовании функций, определенных на фазовом пространстве системы и называемых *локализирующими* [5]. Очевидно, что, рассматривая различные локализирующие функции, можно получить целое семейство локализирующих множеств, пересечение которых дает в итоге более сильный результат.

Использование локализирующих функций позволило исследовать ряд известных систем с хаотическим поведением [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11], в частности, знаменитую систему Лоренца. Отметим, что все эти системы имели 3-й порядок или выше. Исследование систем 2-го порядка имеет особенности. С одной стороны, качественное поведение систем 2-го порядка заметно проще, чем поведение систем более высокого порядка, в частности, в таких системах явления динамического хаоса не наблюдаются. С другой стороны, попытки решения задач локализации для систем 2-го порядка приводили к практическим трудностям.

В настоящей статье исследуются две непрерывные динамические системы второго порядка, описывающие поведение некоторых биологических систем. Для каждой из рассмотренных систем строится семейство локализирующих множеств и вычисляется пересечение полученного семейства локализирующих множеств. При этом для первой системы решение удалось получить чисто аналитически, а для второй системы предложена численная процедура построения локализирующих множеств. Результаты исследования двух систем показаны на рисунках.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 описан метод построения локализирующих множеств [1]. В разд. 2 рассмотрена динамическая система ICAISC, представляющая собой модель взаимодействия адаптивной иммунной системы с раковой опухолью [2]. В разд. 3 рассмотрена динамическая система VDFM, которая описывает двухкомпонентную экосистему [3]. В заключении подводятся итоги исследования.

1. Функциональный метод локализации

Основная идея функционального метода локализации в применении к автономной непрерывной динамической системе

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

состоит в следующем.

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая (хотя бы класса C^1) функция, определенная на фазовом пространстве системы (эта функция далее называется *локализирующей*). Рассмотрим множество

$$S_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \dot{\varphi}(x) = 0\},$$

где $\dot{\varphi}$ обозначает производную функции φ в силу системы (1). Множество S_φ называется *универсальным сечением* [1]. Все инвариантные компактные множества системы (1), содержащиеся в множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, содержатся в множестве

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\},$$

где

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup} = \sup_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x).$$

В качестве локализирующих можно использовать любые гладкие функции, определенные на фазовом пространстве системы, ограничений здесь нет. Однако неудачный выбор локализирующей функции может привести к тому, что локализирующее множество $\Omega_\varphi = \Omega_\varphi(\mathbb{R}^n)$ совпадет с фазовым пространством, т.е. решение задачи локализации окажется тривиальным. Другая проблема, возникающая при решении задач локализации, — решение двух экстремальных задач, связанных с вычислением значений $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$. В общем случае требуется предварительный анализ экстремальных задач. Решение этих задач упрощается, если

универсальное сечение является замкнутой кривой, тогда для вычисления значений $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ можно использовать метод множителей Лагранжа или численные методы.

Рассматривая несколько локализирующих функций, мы получаем несколько локализирующих множеств. В качестве наилучшей оценки положения инвариантных компактов следует выбрать пересечение найденных локализирующих множеств. Проведенные исследования ряда динамических систем [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11] показали, что эффективным является использование параметрических семейств локализирующих функций с последующим построением пересечения найденного параметрического семейства локализирующих множеств.

2. Локализация инвариантных компактов системы ICAISC

Система

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - cx^2; \\ \dot{y} = dy - exy - fy^2 \end{cases} \quad (2)$$

описывает динамику взаимодействия адаптивной иммунной системы с раковой опухолью [2]. Здесь x — концентрация раковых клеток; y — концентрация клеток иммунной системы; a, b, c, d, e, f — параметры системы, представляющие собой положительные числа.

Содержательный смысл фазовые переменные x и y имеют только в первой четверти фазовой плоскости (включая границу). Поэтому в качестве фазового пространства следует рассматривать множество

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Отметим, что это множество инвариантное, поскольку инвариантными являются прямые $x = 0$ и $y = 0$, ограничивающие первую четверть плоскости. Однако исследование системы (2) удобно проводить на всей фазовой плоскости, сужая затем полученные локализирующие множества на первую четверть.

Система (2) имеет четыре положения равновесия:

$$P_1 = (0, 0); \quad P_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right); \quad P_3 = \left(\frac{a}{c}, 0\right); \quad P_4 = \left(\frac{af - bd}{cf - be}, \frac{cd - ae}{cf - be}\right).$$

При этом [2]:

P_1 — неустойчивый узел;

P_2 — устойчивый узел при $\frac{a}{d} < \frac{b}{f}$ и седло при $\frac{a}{d} > \frac{b}{f}$;

P_3 — устойчивый узел при $\frac{c}{e} < \frac{a}{d}$ и седло при $\frac{c}{e} > \frac{a}{d}$.

Точка P_4 может в зависимости от параметров находиться в любой четверти и иметь различный тип: седло, устойчивый или неустойчивый узел или фокус. Если точка P_4 попадает в первую четверть плоскости, то либо P_2 и P_3 являются седлами, а P_4 устойчивым фокусом, либо, наоборот, точки P_2 и P_3 являются устойчивыми фокусами, а P_4 седлом.

Наличие в системе положений равновесия типа седла предполагает существование сепаратрис. Фазовый портрет системы (2) при значениях параметров системы $a = 1/16, b = 1/8$,

$c = 1/8, d = 1/32, e = 11/128, f = 1/8$ представлен на рис. 1 (красным цветом отмечены положения равновесия, зеленым — сепаратрисы).

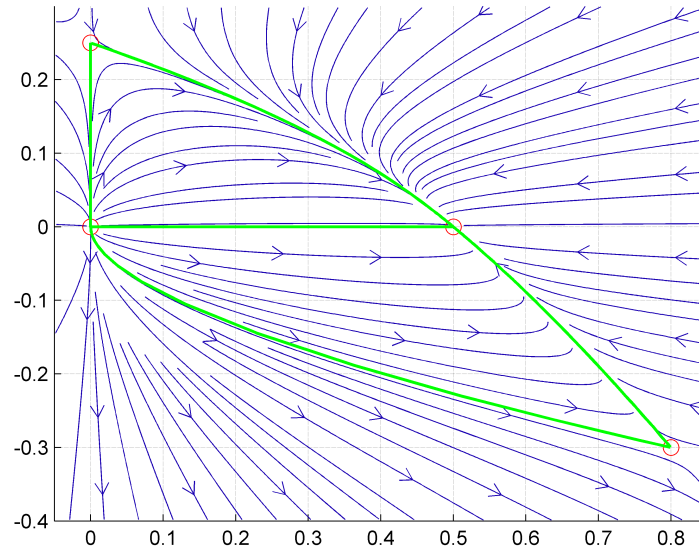


Рис. 1. Фазовый портрет системы *ICAISC* при значениях параметров $a = 1/16, b = 1/8, c = 1/8, d = 1/32, e = 11/128, f = 1/8$

В качестве локализирующей выберем линейную функцию $\varphi = Ax + By$.

Универсальное сечение S_φ для этой функции задается уравнением

$$Acx^2 + (Ab + Be)xy + Bfy^2 - Aax - Bdy = 0$$

и представляет собой кривую 2-го порядка. Линейная функция на кривой 2-го порядка имеет конечные экстремальные значения лишь в случае, когда эта кривая является эллипсом или параболой. Ограничимся первым случаем. Множество S_φ является эллипсом тогда и только тогда, когда дискриминант соответствующей квадратичной формы положителен, т.е. при условии

$$(Ab + Be)^2 - 4ABcf < 0. \quad (3)$$

Очевидно, что это условие не выполняется в случаях $A = 0, B = 0$ и $AB < 0$. Поэтому можно считать, что $AB > 0$. Поскольку умножение локализирующей функции φ на число не изменяет множества Ω_φ , можем считать, что $A = 1$ и $B > 0$. При этом следует ограничиться случаем, когда выполнено условие (3). В случае $A = 1$ это условие сводится к неравенству

$$B^2e^2 - 2(2fc - be)B + b^2 < 0$$

которое имеет решения относительно B , если

$$fc - be > 0.$$

Далее ограничимся этим случаем. Тогда возможные значения параметра B локализирующей функции определяются неравенствами

$$\frac{(\sqrt{fc} - \sqrt{fc - be})^2}{e^2} < B < \frac{(\sqrt{fc} + \sqrt{fc - be})^2}{e^2}. \quad (4)$$

Итак, для функции $\varphi(x, y) = x + By$, где B удовлетворяет (4), получаем следующую задачу на экстремум:

$$\begin{cases} x + By \rightarrow \text{extr}, \\ cx^2 + (b + Be)xy + Bfy^2 - ax - Bdy = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку эллипс — ограниченная гладкая кривая, то значения $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ могут быть найдены методом множителей Лагранжа. Другой вариант — приведение квадратичной функции к каноническому виду методом Лагранжа. Выделим в левой части ограничения полный квадрат по переменной x :

$$c\left(x + \frac{b + Be}{2c}y - \frac{a}{2c}\right)^2 + \frac{\Delta}{4c}y^2 + \frac{k}{2c}y - \frac{a^2}{4c} = 0,$$

где

$$\Delta = 4Bfc - (b + Be)^2, \quad k = (b + Be)a - 2Bcd.$$

Затем выделим полный квадрат по переменной y :

$$c\left(x + \frac{b + Be}{2c}y - \frac{a}{2c}\right)^2 + \frac{\Delta}{4c}\left(y + \frac{k}{\Delta}\right)^2 = \frac{a^2}{4c} + \frac{k^2}{4c\Delta}.$$

Выполнив замену переменных

$$X = x + \frac{b + Be}{2c}y - \frac{a}{2c}, \quad Y = y + \frac{k}{\Delta},$$

сведем задачу (5) к следующей:

$$\begin{cases} \alpha X + \beta Y + \gamma \rightarrow \text{extr}, \\ pX^2 + qY^2 = r^2, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{(2c - e)B - b}{2c}, \quad \gamma = \frac{B(2af - bd - ab) + B^2(2cd - de - ae)}{\Delta},$$

$$p = c, \quad q = \frac{\Delta}{4c}, \quad r^2 = \frac{k^2 + a^2\Delta}{4c\Delta}.$$

Решения задачи (6) легко записываются аналитически:

$$\varphi_{\inf}(B) = \gamma - r\sqrt{\frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q}}, \quad \varphi_{\sup}(B) = \gamma + r\sqrt{\frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q}}.$$

В результате получаем семейство $\Omega_{\varphi}(B)$ локализирующих множеств, описываемых неравенствами

$$\varphi_{\inf}(B) < x + By < \varphi_{\sup}(B). \quad (7)$$

Для построения пересечения $\Omega_{\varphi} = \bigcap_B \Omega_{\varphi}(B)$ перепишем неравенства (7) в виде

$$-By + \varphi_{\inf}(B) < x < -By + \varphi_{\sup}(B).$$

Тогда множество Ω_φ можно представить неравенством

$$\max_B(-By + \varphi_{\inf}(B)) < x < \min_B(-By + \varphi_{\sup}(B)). \quad (8)$$

Из множества Ω_φ следует выделить часть Ω_φ^+ , попадающую в первую четверть. Для этого в (8) достаточно добавить еще два неравенства:

$$\max \left\{ \max_B(-By + \varphi_{\inf}(B)), 0 \right\} < x < \min_B(-By + \varphi_{\sup}(B)), \quad y \geq 0. \quad (9)$$

В качестве примера рассмотрим систему ICAISC с параметрами

$$a = \frac{1}{16}, \quad b = \frac{1}{8}, \quad c = \frac{1}{8}, \quad d = \frac{1}{32}, \quad e = \frac{11}{128}, \quad f = \frac{1}{8}. \quad (10)$$

При этих значениях параметров неравенство (4) принимает вид

$$\frac{336 - 128\sqrt{5}}{121} < B < \frac{336 + 128\sqrt{5}}{121}.$$

Максимум и минимум в неравенствах (9) можно вычислять по конечному набору значений параметра B . Это несколько расширит локализирующее множество, но сохранит главное его свойство — оно будет локализирующим для инвариантных компактов системы ICAISC.

Результаты вычислений приведены на рис. 2.

рис.2

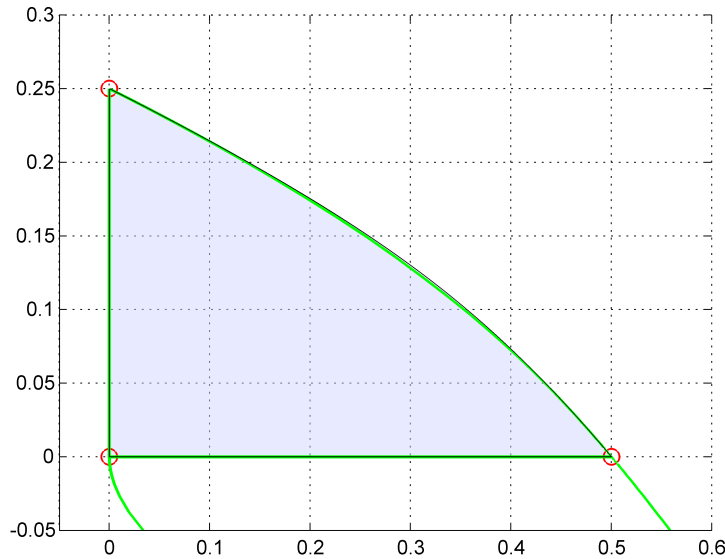


Рис. 2. Локализирующее множество Ω_φ^+ для системы ICAISC при значениях параметров $a = 1/16$, $b = 1/8$, $c = 1/8$, $d = 1/32$, $e = 11/128$, $f = 1/8$

З а м е ч а н и е 1. Локализирующие множества для инвариантных компактов системы ICAISC получены лишь в частном случае $fc - be > 0$. Итоговый результат дает компактное локализирующее множество. Из этого, в частности, следует, что система имеет максимальный инвариантный компакт. Действительно, объединение всех инвариантных компактов системы есть инвариантное множество. Замыкание этого объединения также является инвариантным множеством. Существование компактного локализирующего множества означает,

что указанное замыкание представляет собой инвариантный компакт, который содержит в себе все другие инвариантные компакты.

Для системы с параметрами (10), как следует из анализа фазового портрета, максимальный инвариантный компакт представляет собой замкнутую область, ограниченную сепаратрисным контуром, натянутым на точки покоя P_1, P_2, P_3 .

З а м е ч а н и е 2. Анализ фазового портрета при различных значениях параметров показывает, что максимальный инвариантный компакт (если ограничиться первой четвертью фазовой плоскости) существует и в случае $fc - be < 0$, хотя локализация с помощью линейных функций приводит к тривиальным результатам. Однако, если при вычислении экстремальных значений $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ учесть ограничения $x \geq 0, y \geq 0$, то нетривиальное локализирующее множество дает любая линейная функция $\varphi(x, y) = Ax + By$ с неотрицательными коэффициентами A и B . В частности, при $\varphi(x, y) = x$ получаем множество $\Omega_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq a/c\}$, а при $\varphi(x, y) = y$ — множество $\Omega_2 = \{(x, y): 0 \leq y \leq d/f\}$. Таким образом, все инвариантные компакты первой четверти содержатся в прямоугольнике $0 \leq x \leq a/c, 0 \leq y \leq b/f$. Однако аналитическое решение экстремальных задач при дополнительных ограничениях типа неравенства существенно труднее, чем решение при отсутствии таких ограничений.

3. Локализация инвариантных компактов системы VDFM

Система VDFM

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - sx - axy; \\ \dot{y} = sx - by, \end{cases} \quad (11)$$

описывает процесс взаимодействия зеленой x и мертвой y биомасс внутри экосистемы [3]. В системе s — коэффициент старения зеленой биомассы ($0 < s < 1$); $a > 0$ — коэффициент подавления роста зеленой биомассы, вызванного ростом мертвой биомассы; $b > 0$ — коэффициент разложения мертвой биомассы.

Содержательный смысл система (11) имеет лишь в первой четверти фазовой плоскости. Однако для этой системы, в отличие от системы ICAISC, первая четверть не является инвариантным множеством, поскольку на оси абсцисс векторное поле системы не касается этой оси. Можно лишь утверждать, что первая четверть для системы VDFM является положительно инвариантным множеством: траектории, при $t = 0$ начинающиеся в $\mathbb{R}_+^2$, при $t \geq 0$ остаются в $\mathbb{R}_+^2$.

Система (11) имеет два положения равновесия:

$$P_1 = (0, 0); \quad P_2 = \left(\frac{b(1-s)}{b+as}, \frac{s(1-s)}{b+as} \right).$$

При этом точка P_1 является седлом, а точка P_2 — устойчивым узлом. Фазовый портрет системы представлен на рис. 3 (красным цветом обозначены положения равновесия, зеленым — сепаратриса, идущая из P_1 в P_2).

рис.3

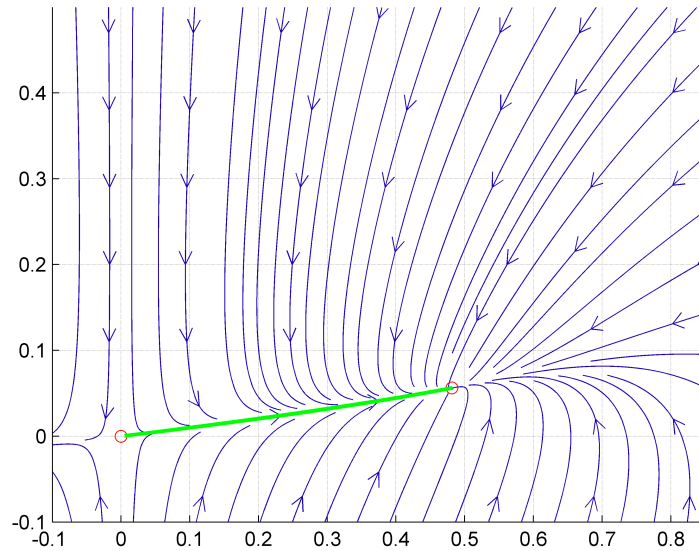


Рис. 3. Фазовый портрет VDFM-системы при значениях параметров $a = 3, b = 3, s = 0,35$

Линейная локализирующая функция. Использование линейных функций на всей фазовой плоскости приводит к тривиальным результатам. Однако ситуация меняется, если ограничиться первой четвертью фазовой плоскости. Действительно, выбрав функцию $\varphi_0(x, y) = x$, получим универсальное сечение

$$S_{\varphi_0}: x(1 - x - s - ay) = 0,$$

состоящее из пары прямых. Множество $S_{\varphi_0} \cap \mathbb{R}_+^2$ ограничено, а функция $\varphi_0(x, y)$ достигает на нем наименьшего и наибольшего значений $\varphi_{0\min}(\mathbb{R}_+^2) = 0, \varphi_{0\max}(\mathbb{R}_+^2) = 1 - s$. Это позволяет в задачах локализации ограничиться множеством

$$Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 - s, y \geq 0\}.$$

В качестве локализирующей рассмотрим функцию вида $\varphi(x, y) = Ax + y$. Тогда универсальное сечение будет описываться уравнением

$$Ax^2 + Aaxy - (A(1 - s) + s)x + by = 0.$$

Возникают экстремальные задачи

$$\begin{cases} Ax + y \rightarrow \inf, \\ Ax^2 + Aaxy - (A(1 - s) + s)x + by = 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} Ax + y \rightarrow \sup, \\ Ax^2 + Aaxy - (A(1 - s) + s)x + by = 0, \end{cases} \quad (13)$$

решение которых будем искать в полосе $0 \leq x \leq 1 - s$.

Для решения экстремальных задач (12), (13) из уравнения связи выразим переменную y через x :

$$y = \frac{(A(1 - s) + s)x - Ax^2}{Aax + b}.$$

С помощью этого соотношения исключим из целевой функции переменную y . В результате получим следующие, эквивалентные (12) и (13), задачи:

$$\begin{aligned} Ax + \frac{(A(1-s) + s)x - Ax^2}{Aax + b} &\rightarrow \inf, \\ Ax + \frac{(A(1-s) + s)x - Ax^2}{Aax + b} &\rightarrow \sup, \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq 1-s. \quad (14)$$

Решения задач (14) $\varphi_{\inf}(A)$ и $\varphi_{\sup}(A)$ зависят от соотношений между параметрами. При $A > 1/a$ целевая функция

$$\psi(x) = Ax + \frac{(A(1-s) + s)x - Ax^2}{Aax + b}$$

возрастает на отрезке $[0, 1-s]$. Значит, в этом случае $\varphi_{\inf}(A) = \psi(0) = 0$, $\varphi_{\sup}(A) = \psi(1-s)$.

При $0 < A < 1/a$ функция $\psi(x)$ выпукла вверх при $x \geq 0$ и достигает максимума в точке

$$x_m = -\frac{b}{Aa} + \frac{1}{Aa} \sqrt{\frac{b(Aa(1-s) + as + b)}{1 - Aa}}.$$

Следовательно, минимальное значение на $[0, 1-s]$ функция достигает в одном из концов отрезка, т.е. $\varphi_{\inf}(A) = \min\{0, \psi(1-s)\}$. Максимальное значение достигается либо в точке x_m , либо в точке $1-s$, а именно в той, что на числовой оси находится левее. Таким образом, $\varphi_{\sup}(A) = \psi(\min\{x_m, 1-s\})$.

При $A = 0$ функция $\psi(x)$ линейная, так что в этом случае $\varphi_{\inf}(A) = 0$, $\varphi_{\sup}(A) = \psi(1-s) = \frac{s(1-s)}{b}$.

При $-\frac{b}{a(1-s)} < A < 0$ функция $\psi(x)$ выпукла вниз. Ее максимальное значение на $[0, 1-s]$ достигается в одном из концов отрезка, т.е. $\varphi_{\sup}(A) = \max\{0, \psi((1-s))\}$. Минимальное значение достигается в точке локального минимума x_m , если эта точка попадает на отрезок $[0, 1-s]$, иначе в одном из концов отрезка. Таким образом, в этом случае

$$\varphi_{\inf}(A) = \begin{cases} \psi(x_m), & 0 \leq x_m \leq 1-s; \\ \min\{0, \psi(1-s)\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если же $A \leq -\frac{b}{a(1-s)}$, то особая точка $-\frac{b}{Aa}$ функции $\psi(x)$ попадает на отрезок $[0, 1-s]$. В результате в этом случае получаем тривиальный результат $\varphi_{\inf}(A) = -\infty$, $\varphi_{\sup}(A) = \infty$.

Итак, для инвариантных компактов множества $\mathbb{R}_+^2$ получено семейство локализирующих множеств

$$\varphi_{\inf}(A) \leq Ax + y \leq \varphi_{\sup}(A), \quad a > -\frac{b}{a(1-s)}.$$

Пересечение этого семейства можно записать в следующем виде:

$$\sup_{A > -\frac{b}{a(1-s)}} (-Ax + \varphi_{\inf}(A)) \leq y \leq \inf_{A > -\frac{b}{a(1-s)}} (-Ax + \varphi_{\sup}(A)). \quad (15)$$

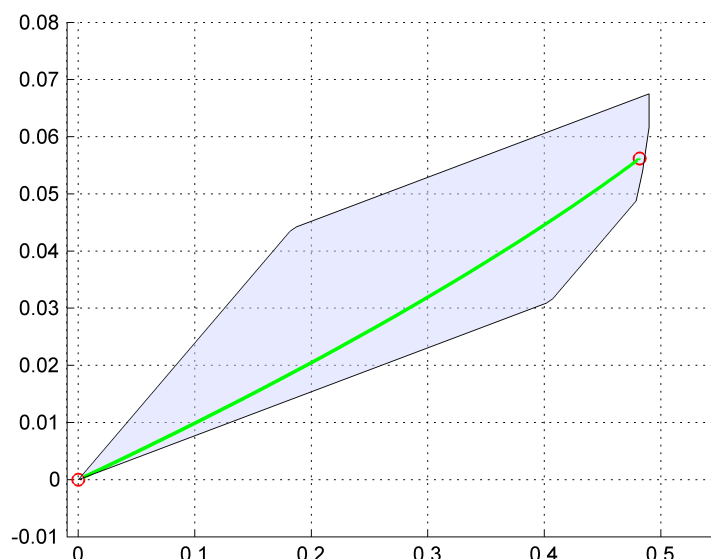


Рис. 4. Локализирующее множество для инвариантных компактов системы VDFM при значениях параметров $a = 3$, $b = 3$, $s = 0,35$, полученное с помощью линейных функций

Неравенства (15) удобны для компьютерного расчета локализирующего множества. Эти расчеты для случая $a = 1$, $b = 1$, $s = 0,35$ представлены на рис. 4.

Квадратичная локализирующая функция. Если локализирующая функция является квадратичной, то универсальное сечение для системы VDFM в общем случае будет кривой 3-го порядка. Выделим случай, когда универсальное сечение есть кривая 2-го порядка, причем это эллипс.

Теорема 1. Для локализирующей функции

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) \quad (16)$$

производная в силу системы VDFM является квадратичной функцией тогда и только тогда, когда

$$A = B = 0, \quad C \neq 0. \quad (17)$$

При выполнении этих условий универсальное сечение является эллипсом тогда и только тогда, когда дискриминант соответствующей квадратичной формы будет положителен, т.е.

$$s^2 C^2 - 2(as + 2b)CD + a^2 D^2 < 0. \quad (18)$$

Доказательство. Найдем производную в силу системы для функции (16):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & -2Ax^3 + (2A - 2As - 2D + 2Bs)x^2 + (2D - 2Ds + 2Es)x - 2Cby^2 - 2Eby + \\ & + (-2Aa - 2B)x^2y - 2Baxy^2 + (2B - 2Bs - 2Da - 2Bb + 2Cs)xy. \end{aligned}$$

Это выражение задает квадратичную функцию, если коэффициенты при степенях выше двух равны нулю. В результате приходим к равенствам $A = B = 0$. При выполнении этих равенств локализирующая функция имеет вид

$$\varphi(x, y) = Cy^2 + 2(Dx + Ey),$$

а соответствующее универсальное сечение S_φ описывается уравнением

$$Dx^2 + (Da - Cs)xy + Cby^2 - (D(1 - s) + Es)x + Eby = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) является кривой 2-го порядка в том случае, если один из коэффициентов C и D отличен от нуля. При этом уравнение (19) задает эллипс тогда и только тогда, когда дискриминант квадратичной формы отрицателен (при этом учитываем, что случаи мнимого и вырожденного эллипса невозможны). Отрицательность дискриминанта эквивалентна неравенству

$$(Da - Cs)^2 - 4CDb < 0, \quad (20)$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству (18). Теорема доказана.

Очевидно, что случаи $C = 0$, $D = 0$, $CD < 0$ не удовлетворяют условию (18). Поэтому будем рассматривать только случай $CD > 0$.

Поскольку эллипс — ограниченная гладкая кривая, то значения $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ могут быть вычислены с помощью метода множителей Лагранжа. Однако уравнение на критические точки функции Лагранжа имеет 4-ю степень, так что его решения, хотя и могут быть представлены в аналитическом виде, оказываются очень громоздки и для анализа малоприспособны. Поэтому для получения результатов остановимся на разработке соответствующей вычислительной процедуры.

Рассмотрим квадратичную функцию, полагая $C = 1$:

$$\varphi = y^2 + 2Dx + 2Ey.$$

При этом универсальное сечение будет эллипсом, если

$$as + 2b - 2\sqrt{b(as + b)} < D < as + 2b + 2\sqrt{b(as + b)},$$

или

$$(\sqrt{b + as} - \sqrt{b})^2 < D < (\sqrt{b + as} + \sqrt{b})^2. \quad (21)$$

Для решения задачи

$$\begin{cases} y^2 + 2Dx + 2Ey \rightarrow \text{extr}, \\ Dx^2 + (Da - s)xy + by^2 - \rho x + Eby = 0, \end{cases}$$

где $\rho = D(1 - s) + Es$, выразим из ограничения переменную x и подставим в целевую функцию. Ограничение представляет собой квадратное относительно x уравнение. Ясно, что

при поиске максимума целевой функции необходимо выбирать больший корень квадратного уравнения, а при поиске минимума — меньший. В результате приходим к задачам

$$y^2 + 2D\xi_1(y) + 2Ey \rightarrow \min, \quad y^2 + 2D\xi_2(y) + 2Ey \rightarrow \max, \quad (22)$$

где

$$\xi_1(y) = \frac{\rho - (Da - s)y - \sqrt{(\rho - (Da - s)y)^2 - 4D(by^2 + Eby)}}{2D},$$

$$\xi_2(y) = \frac{\rho - (Da - s)y + \sqrt{(\rho - (Da - s)y)^2 - 4D(by^2 + Eby)}}{2D}.$$

Область изменения переменной y находим из условия положительности дискриминанта квадратного уравнения:

$$(\rho - (Da - s)y)^2 - 4D(by^2 + Eby) \geq 0,$$

или

$$[4Db - (Da - s)^2]y^2 + 2[(Da - s)\rho + 2DEb]y - \rho^2 \leq 0. \quad (23)$$

Из уравнения (23), полагая

$$\delta = [(Da - s)\rho + 2DEb]^2 + \rho^2[4Db - (Da - s)^2]$$

и учитывая неравенство (20) при $C = 1$, находим

$$\frac{-(Da - s)\rho - 2DEb - \sqrt{\delta}}{4Db - (Da - s)} \leq y \leq \frac{-(Da - s)\rho - 2DEb + \sqrt{\delta}}{4Db - (Da - s)}.$$

На указанном интервале изменения переменного y решения задач (22) можно найти любым стандартным численным методом.

Решив задачи (22), получим двухпараметрическое семейство $\Omega(D, E)$ локализирующих множеств

$$\varphi_{\inf}(D, E) \leq y^2 + 2Dx + 2Ey \leq \varphi_{\sup}(D, E),$$

или

$$-\frac{y^2}{2D} - \frac{Ey}{D} + \frac{\varphi_{\inf}(D, E)}{2D} \leq x \leq -\frac{y^2}{2D} - \frac{Ey}{D} + \frac{\varphi_{\sup}(D, E)}{2D}. \quad (24)$$

Неравенства (24) позволяют записать формулу для пересечения $\bigcap_{D,E} \Omega(D, E)$ локализирующих множеств:

$$\sup_{D,E} \left(-\frac{y^2}{2D} - \frac{Ey}{D} + \frac{\varphi_{\inf}(D, E)}{2D} \right) \leq x \leq \inf_{D,E} \left(-\frac{y^2}{2D} - \frac{Ey}{D} + \frac{\varphi_{\sup}(D, E)}{2D} \right),$$

где диапазон изменения D определяется неравенством (21), а диапазон изменения E — вся числовая ось. Область изменения переменной y включает те ее значения, при которых левая часть двойного неравенства не превышает правой части. Для учета ограничения динамической системы на первую четверть необходимо добавить условие $y \geq 0$ в область

изменения y и ввести в двойное неравенство ограничение $x \geq 0$:

$$\max \left\{ 0, \sup_{D,E} \left(-\frac{y^2}{2D} - \frac{Ey}{D} + \frac{\varphi_{\inf}(D,E)}{2D} \right) \right\} \leq x \leq \inf_{D,E} \left(-\frac{y^2}{2D} - \frac{Ey}{D} + \frac{\varphi_{\sup}(D,E)}{2D} \right), \quad (25)$$

В качестве примера рассмотрим систему VDFM (11) при значениях параметров $a = 3$, $b = 3$, $s = 0,35$ (см. рис. 3). Локализирующее множество для ее инвариантных компактов, построенное в соответствии с неравенством (25), представлено на рис. 5.

рис.5

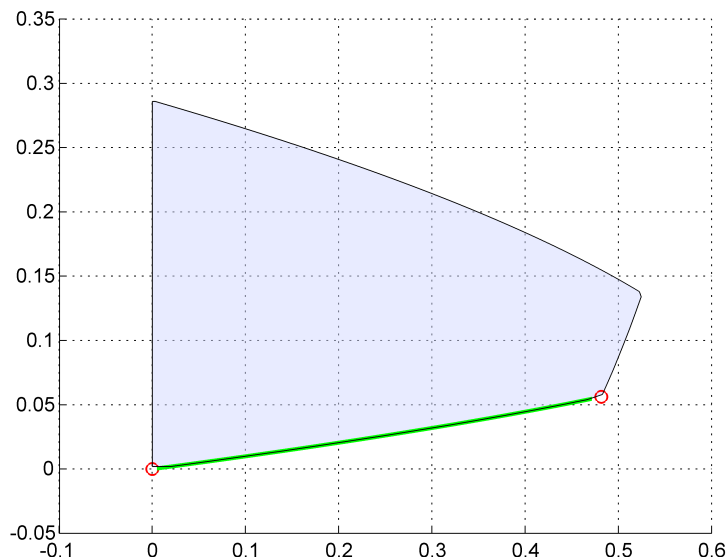


Рис. 5. Локализирующее множество для инвариантных компактов системы VDFM при значениях параметров $a = 3$, $b = 3$, $s = 0,35$

З а м е ч а н и е 3. Получение компактного локализирующего множества для системы VDFM, как и в случае системы ICAISC, указывает на существование у системы максимального инвариантного компакта. Анализ фазового портрета системы VDFM при указанных значениях параметров приводит к выводу, что максимальным инвариантным компактом этой системы является объединение двух положений равновесия и соединяющей их сепаратрисы. Поэтому полученные локализирующие множество (см. рис. 4, 5) не являются точными. Тем не менее отметим, что нижняя граница локализирующего множества, полученного с помощью квадратичных функций, оказывается очень близкой к сепаратрисе.

Заключение

В статье рассмотрена задача локализации инвариантных компактных множеств для непрерывных динамических систем второго порядка. Эти системы отличаются относительно простым поведением, однако решение задач локализации для таких систем наталкивается на определенные трудности.

Исследование проведено для двух динамических систем, представляющих собой простейшие биологические модели. В каждом случае построено параметрическое семейство

локализирующих множеств и найдено пересечение этого семейства. В обоих случаях решение задачи локализации строилось на использовании функционального метода локализации с привлечением как аналитических вычислений, так и численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-01-00733 и 12-07-00267) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.
2. Chrobak J.H., Herrero H. A mathematical model of induced cancer-adaptive immune system competition // *Journal of Biological Systems*. 2011. Vol. 19, no. 3. P. 521–532.
3. Wang K., Zhang N., Niu D. Periodic oscillations in a spatially explicit model with delay effect for vegetation dynamics in freshwater marshes // *Journal of Biological Systems*. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 131–147.
4. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов ПРТ-системы // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2007. № 1. С. 3–18.
5. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // *Дифференциальные уравнения*. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
6. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system // *Phys. Lett. A*. 2006. Vol. 353, no. 5. P. 383–388.
7. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2006. Vol. 16, no. 11. P. 3249–3256.
8. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Estimation of the domain containing all compact invariant sets of a system modeling the amplitude of a plasma instability // *Phys. Lett. A*. 2007. Vol. 367, no. 1. P. 65–72.
9. Starkov K.E. Bounds for the domain containing all compact invariant sets of the system modeling dynamics of acoustic gravity waves // *Int. J. of Bifurcations and Chaos*. 2009. Vol. 19, no. 10. P. 3425–3432.
10. Starkov K.E. Bounding a domain which contains all compact invariant sets of the Bloch system // *Int. J. of Bifurcations and Chaos*. 2009. Vol. 19, no. 3. P. 1037–1042.
11. Coria L.N., Starkov K.E. Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor systems // *Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul.* 2009. Vol. 14. P. 3879–3888.

Localization of invariant compact sets of two-dimensional continuous dynamical systems

07, July 2013

DOI: 10.7463/0713.0583104

Kanatnikov A. N., Phedorova Yu.P.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
mathmod@bmstu.ru

One method of the qualitative analysis of a dynamical system is to estimate the position of its compact invariant sets closely associated with bounded trajectories of the system. As a solution to such a problem, one can use a localizing set, i.e. a set in the phase space containing all invariant compact sets of the system. In this article two continuous two-dimensional dynamical systems describing behavior of some biological systems are explored. For each of these systems a family of localizing sets is constructed, and then the intersection of the family is calculated. For the first system the solution was obtained analytically and for the second one the numerical procedure of constructing localizing sets was proposed. The investigation results are shown in figures.

References

1. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Invariantnye kompakty dinamicheskikh system* [Invariant compact sets of dynamical systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 231 p.
2. Chrobak J.H., Herrero H. A mathematical model of induced cancer-adaptive immune system competition. *Journal of Biological Systems*, 2011, vol. 19, no. 3, pp. 521–532.
3. Wang K., Zhang N., Niu D. Periodic oscillations in a spatially explicit model with delay effect for vegetation dynamics in freshwater marshes. *Journal of Biological Systems*, 2011, vol. 19, no. 2, pp. 131–147.
4. Kanatnikov A.N. Lokalizatsiya invariantnykh kompaktov PRT-sistemy [Localization of the invariant compact sets of the PRT system]. *Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural Sciences], 2007, no. 1, pp. 3–18.
5. Krishchenko A.P. Lokalizatsiya invariantnykh kompaktov dinamicheskikh system [Localization of the invariant compact sets of the dynamical systems]. *Differentsial'nye uravneniya*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1597–1604. (English version: Krishchenko A.P. Localization of In-

- variant Compact Sets of Dynamical Systems. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1669–1676).
6. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system. *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 353, no. 5, pp. 383–388.
 7. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of nonlinear systems with application to the Lanford systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2006, vol. 16, no. 11, pp. 3249–3256.
 8. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Estimation of the domain containing all compact invariant sets of a system modeling the amplitude of a plasma instability. *Phys. Lett. A*, 2007, vol. 367, no. 1, pp. 65–72.
 9. Starkov K.E. Bounds for the domain containing all compact invariant sets of the system modeling dynamics of acoustic gravity waves. *Int. J. of Bifurcations and Chaos*, 2009, vol. 19, no. 10, pp. 3425–3432.
 10. Starkov K.E. Bounding a domain which contains all compact invariant sets of the Bloch system. *Int. J. of Bifurcations and Chaos*, 2009, vol. 19, no. 3, pp. 1037–1042.
 11. Coria L.N., Starkov K.E. Bounding a domain containing all compact invariant sets of the permanent-magnet motor systems. *Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul*, 2009, vol. 14, pp. 3879–3888.