

УДК 536.75

**Описание броуновского движения осциллятора в вязкой среде с коэффициентом трения, задаваемым линейным интегральным оператором степенного типа**

*Щегольков А.А., студент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Физика»*

*Научный руководитель: Морозов А.Н., д.ф.м.н., профессор  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*Научный консультант: Скрипкин А.В., к.ф.м.н., доцент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[bauman@bmstu.ru](mailto:bauman@bmstu.ru)*

## 1. Введение

Описание броуновского движения осуществляют, как правило, с использованием уравнения Ланжевена, в котором внешнее случайное воздействие среды учитывается посредством введения стохастической силы, представляющей собой дельта-коррелированный случайный процесс с нулевым средним значением [1]. Уравнение Ланжевена для скорости  $V(t)$  броуновского тела имеет вид:

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F_0(t) + F_r(t) + \xi_V(t), \quad (1)$$

где  $M$  – масса тела,  $F_r(t)$  – сила сопротивления со стороны среды,  $\xi_V(t)$  – случайная сила,  $F_0(t)$  – сумма остальных (детерминированных) сил.

При движении броуновской частицы в вязкой среде традиционно предполагают, что сила  $F_r(t)$  пропорциональна скорости движения

$$F_r(t) = -\gamma V(t), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – коэффициент трения. Такой подход делает уравнение (1) стохастическим дифференциальным уравнением, с помощью которого можно найти любые

статистические характеристики процесса, используя хорошо разработанную теорию стохастических дифференциальных систем [2].

Соотношение (2) не учитывает того факта, что броуновская частица увлекает окружающие ее частицы среды, которые, в свою очередь, начинают оказывать влияние на ее движение. При учете такого увлечения сила сопротивления (2) дополняется слагаемым, пропорциональным производной скорости и соответствующим инертным свойствам среды, а также интегральным слагаемым, ответственным за наследственные свойства броуновского движения. Тогда для описания силы сопротивления используется уравнение Буссинеска [3]:

$$F_c(t) = -2\pi\rho R^3 \left[ \frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (3)$$

Где  $\rho$  – плотность среды,  $R$  – радиус движущейся частицы,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости среды.

## 2. Описание движения осциллятора

В рассматриваемой работе варьировалась степень ядра интегрального оператора, кроме того, в случае движения осциллятора возникает некая детерминированная возвращающая сила:

$$F_0(t) = -kX(t). \quad (4)$$

где  $k$  – кинематический коэффициент трения.

Тогда окончательное уравнение описывающее движение осциллятора примет вид:

$$M \frac{dV(t)}{dt} = -kX(t) - 2\pi\rho R^3 \left[ \frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right]. \quad (5)$$

Вводя замены:

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad (6)$$

$$A = \frac{6\pi\rho\nu R}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad B = R\sqrt{\frac{1}{\pi\nu}}, \quad (7)$$

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{F_0(t)}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad \tilde{\xi}(t) = \frac{\xi_V(t)}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad (8)$$

$$\tilde{f} = \frac{f}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}, \quad (9)$$

Придем к окончательному уравнению, описывающему движение броуновского осциллятора в вязкой среде:

$$Z(t) + A \int_0^t \left( 1 + \frac{BC}{(t-\tau)^\alpha} \right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{f} \quad (10)$$

Интегральное уравнение Вольтерра второго рода (10) не сводится к конечной системе дифференциальных уравнений, поэтому процесс  $Z(t)$  (а вместе с ним и процесс  $V(t)$ ) относятся к классу немарковских случайных процессов и его решение рассматривалось ранее [4, 5, 6].

### 3. Спектральные характеристики движения осциллятора

Найдем в этом случае спектральные плотности процессов  $Z(t)$  и  $V(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Учтя, что преобразование Лапласа функций  $X(t)$  и  $Z(t)$  связаны соотношением  $\hat{X}(p) = \frac{f}{p^2}$ , для уравнения (10) в изображениях имеем [6]:

$$\hat{Z}(p) \left[ 1 + A \left( \frac{f}{p^2} + BC p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \right) \right] = \hat{\xi}(p), \quad (11)$$

где  $\Gamma(1-\alpha)$  – гамма функция, а  $\hat{Z}(p)$  и  $\hat{\xi}(p)$  – изображения функций  $Z(t)$  и  $\xi(t)$  соответственно.

Принимая во внимание, что спектральная плотность  $G_{\tilde{\xi}} = \tilde{\sigma}$  процесса  $\tilde{\xi}(t)$  постоянна и равна:

$$G_{\tilde{\xi}} = \frac{12\pi\nu RkT}{\left( M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \right)^2}, \quad (12)$$

то в соответствии с формулой спектральная плотность процесса  $Z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  принимает вид:

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{i^2 \omega^2}{i^2 \omega^2 + ABC \Gamma(1-\alpha)(i\omega)^{\alpha+1} + Xi\omega + \tilde{i}} \right|^2 \quad (13)$$

Учитывая уравнение (6) можем получить выражения для спектральной плотности флуктуаций координаты частицы в случае осциллятора.

$$G_X(\omega) = \frac{G_Z(\omega)}{\omega^4} \quad (14)$$

получаем:

$$G_X(\omega) = \frac{G'_\xi}{\left| i^2 \omega^2 + ABC \Gamma(1-\alpha)(i\omega)^{\alpha+1} + Xi\omega + \tilde{i} \right|} \quad (15)$$

Проведем сравнение последних выражений со спектральной плотностью классического осциллятора, которая получается из (15) при условии, что  $B=0$  с<sup>1/2</sup>, а в формулах (7) (для коэффициента  $A$ ) и (12) слагаемое  $\frac{2}{3}\pi\rho R^3$ , стоящее в знаменателе, обращается в нуль. В этом случае (15) переходит в выражение:

$$G_X^{клас}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (X'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_\xi \quad (16)$$

где теперь  $X' = \frac{6\pi\rho\nu R}{M}$ ,  $k' = \frac{k}{M}$ ,  $G'_\xi = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{M^2}$ .

На рисунках 1, 2 и 3 изображены спектральные плотности, задаваемые выражениями (15) и (16) при различных значениях степени интегрального оператора, кинетического коэффициента трения и размерах частицы, а также приведено сравнение с классическим случаем движения осциллятора. Плотность частицы при этом принимается равной плотности среды.

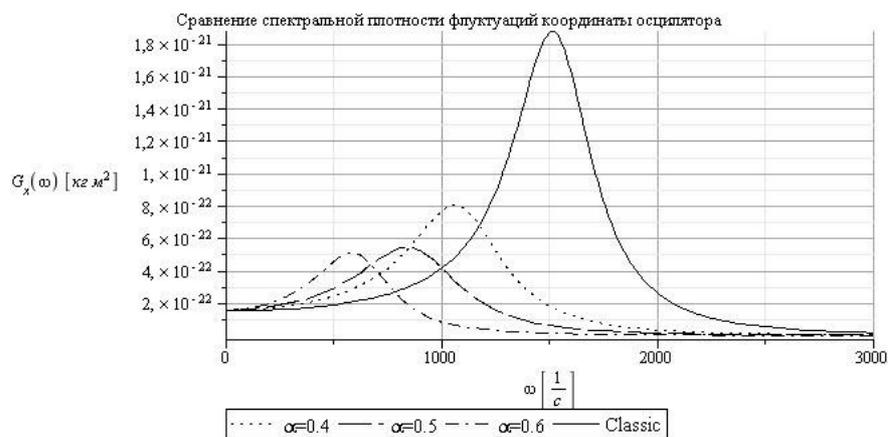


Рис. 1. Графики спектральной плотности флуктуаций координат осциллятора, задаваемые формулами (15) и (16), при  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $R = 100$  мкм,  $k = 10^{-2}$  Н/м,  $T = 300$  К

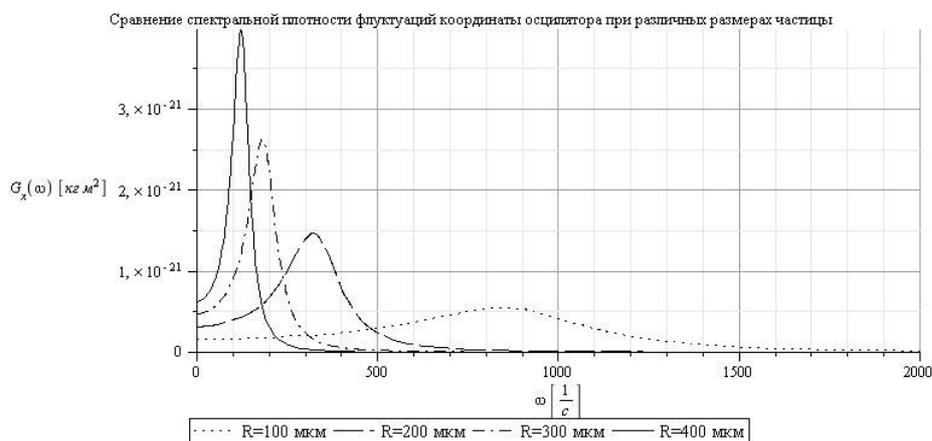


Рис. 2. Графики спектральной плотности флуктуаций координат осциллятора при разных размерах частицы, задаваемые формулой (15) при  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $R = 100, 200, 300, 400$  мкм,  $k = 10^{-2}$  Н/м,  $T = 300$  К,  $\alpha=0.5$

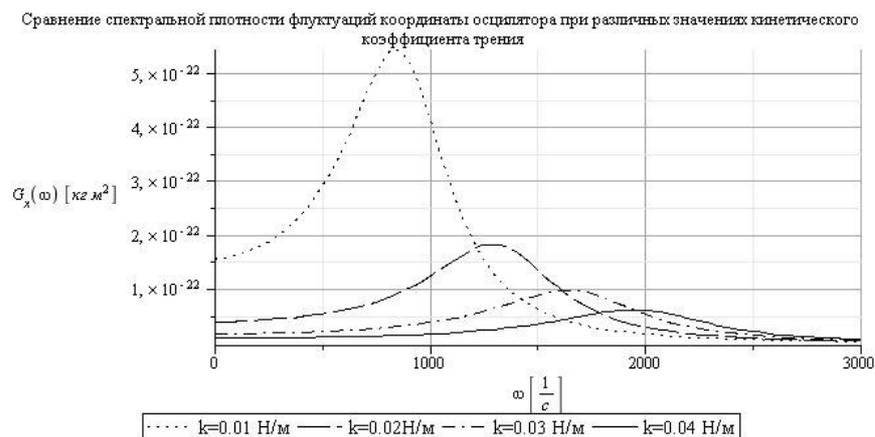


Рис. 3. Графики спектральной плотности флуктуаций координат осциллятора, при различных значениях кинетического коэффициента трения, задаваемые формулой (15) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $R = 100 \text{ мкм}$ ,  $k = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 \text{ Н/м}$ ,  $T = 300 \text{ К}$ ,  $\alpha=0.5$

На рисунках 4-6 изображены зависимости резонансной частоты осциллятора от различных значений размера частицы, показателей степени подынтегрального выражения и кинетического коэффициента трения. Плотность частицы при этом принимается равной плотности среды.

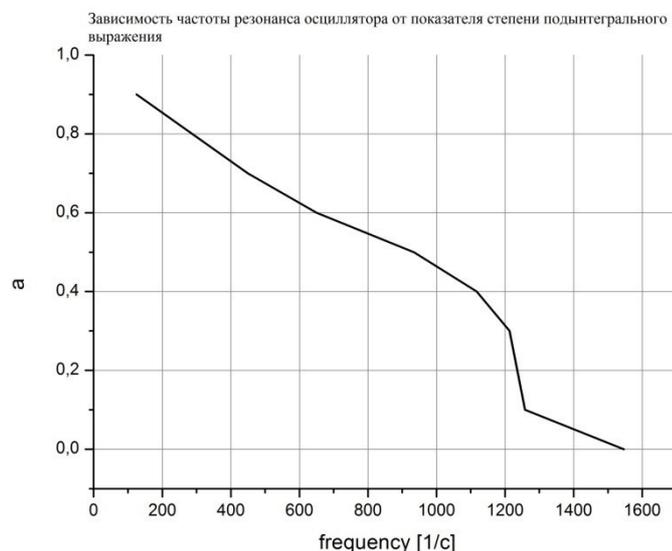


Рис. 4. График зависимости резонансной частоты осциллятора от степени  $\alpha$ , задаваемый формулой (15) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $R = 100 \text{ мкм}$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$ ,  $T = 300 \text{ К}$

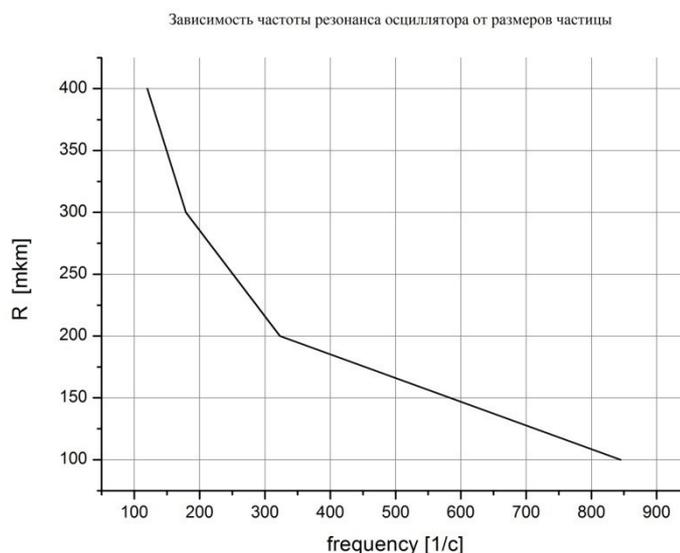


Рис. 5. График зависимости резонансной частоты осциллятора от размера частицы, задаваемый формулой (15) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$ ,  $T = 300 \text{ К}$

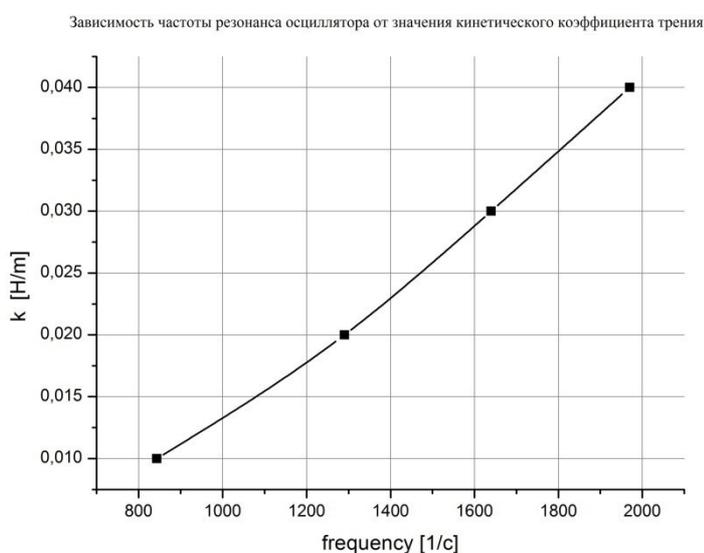


Рис. 6. График зависимости резонансной частоты осциллятора от значения кинетического коэффициента трения, задаваемый формулой (15) при  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $R = 100 \text{ мкм}$ ,  $T = 300 \text{ К}$

Показано, что с увеличением кинетического коэффициента сопротивления среды и увеличением размеров частиц, формы кривых становятся похожими; при этом классическому случаю будет соответствовать большее амплитудное значение спектральной плотности. Этот эффект становится наиболее заметным при больших размерах частиц. Кроме того, максимальное значение спектральной плотности в <http://sntbul.bmstu.ru/doc/606421.html>

классическом случае соответствует более высокой резонансной частоте как следствие того, что при неклассическом описании к массе частицы добавляется некоторая «эффективная» масса.

Так же, заметно что, резонанс, при увеличении размера частицы, наступает в областях низких частот и быстро релаксирует, кроме того при увеличении кинетического коэффициента трения будут увеличиваться и частоты соответствующие максимальному амплитудному значению спектральной плотности флуктуаций координаты осциллятора.

Таким образом, анализ движения броуновской частицы шарообразной формы в неограниченной вязкой среде при наличии возвращающей силы позволяет установить, что флуктуации её скорости и координаты представляют собой немарковский случайный процесс. Полученные резонансные кривые для механического осциллятора, размещенного в вязкой безграничной среде, по своей форме отличается от классического случая. Данный результат может быть существенен, в частности, для устройств демпфирования колебаний.

#### **4. Заключение**

Приведенное в работе описание движения броуновского осциллятора в вязкой безграничной среде показало, что учет увлечения броуновской частицей частиц среды, приводит к значительным различиям в сравнении с классическим описанием не учитывающим данный фактор. Кроме того, показано, что степень ядра интегрального оператора вносит значительные различия, что может быть использовано при описании жидкостей с различными реологическими свойствами.

#### **Список литературы**

1. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
2. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Physics Letters A. 2011. V. 375. P. 4113 – 4115.
5. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 332 с.
6. Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ, Естественные науки. 2004. №3. – С. 47 – 56.