

Управление хаотической динамикой в системе Спротта «А»

05, май 2013

DOI: 10.7463/0513.0555404

Кавинов А. В.

УДК 517.935.4

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kavinov@newmail.ru

Введение

С начала девяностых годов прошлого века внимание исследователей начинает привлекать задача управления хаосом. Суть этой задачи состоит в синтезе такого управления, под воздействием которого динамическая система перестает обладать хаотической динамикой. Обычно замкнутая система имеет при этом один или несколько устойчивых предельных циклов. В качестве примеров способов решения этой задачи можно привести OGY-метод [1, 2, 3], метод обратной связи с запаздыванием [4, 5], управление с помощью искусственных нейронных сетей [6, 7, 8].

В [9, 10] описан алгоритм решения задачи управления хаосом для аффиных стационарных систем

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

эквивалентных на некотором открытом подмножестве пространства состояний Ω регулярной системе канонического вида [11]

$$y^{(n)} = f(\bar{y}) + g(\bar{y})u, \quad \bar{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T. \quad (2)$$

В предположении, что система (1), замкнутая управлением $u \equiv 0$, обладает хаотической динамикой, найдено управление, при котором эта система не имеет хаотической динамики.

Предложенный метод заключался в стабилизации некоторого специально найденного движения системы (2). В результате замкнутая полученным управлением система имела асимптотически устойчивый предельный цикл. Если при этом решения исходной системы обладали следующим свойством: для любой заранее заданной положительной величины ε на любом решении с хаотическим характером движения существуют такие две точки $x(t_1)$ и $x(t_2)$, где $t_2 > t_1$, что $\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$ (при этом $t_2 - t_1 \geq \delta > 0$), то полученное управление могло быть сделано сколь угодно малым по абсолютной величине.

Описанный метод неприменим к системам, эквивалентным системам квазиканонического вида [12, 13]

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= f(\bar{y}) + g(\bar{y})u, \quad \dot{\eta}_1 = h_1(\bar{y}, \bar{\eta}), \quad \dots, \quad \dot{\eta}_{n-k} = h_{n-k}(\bar{y}, \bar{\eta}), \\ \bar{y} &= (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T, \quad \bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n-k})^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Это вызвано тем, что для системы (3) невозможно, вообще говоря, стабилизировать произвольно заданное движение.

В данной статье рассматривается задача подавления хаотической динамики в системе, не эквивалентной регулярной системе канонического вида ни на каком открытом подмножестве пространства состояний.

Постановка задачи

В [15] описано 19 простых систем третьего порядка с квадратичной правой частью, обладающих хаотической динамикой. Первая из этих систем, обозначенная автором буквой «А», имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + yz, \\ \dot{z} = 1 - y^2. \end{cases}$$

Если ввести управление во второе уравнение этой системы, получим систему квазиканонического вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + yz + u, \\ \dot{z} = 1 - y^2, \end{cases} \quad (4)$$

не эквивалентную никакой системе канонического вида ни на каком подмножестве $\mathbb{R}^3$ [14].

Построим такое управление, при котором вместо хаотической динамики замкнутая им система (4) будет иметь устойчивые периодические решения.

Создание периодических решений

Пусть функция $\eta(t) \in C^2$ является периодической с периодом T . Рассмотрим управление

$$u(x, y, z, t) = x - yz + \ddot{\eta}(t). \quad (5)$$

Тогда решение задачи Коши (4)–(5) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 = \eta(t_0), \quad y(t_0) = y_0 = \dot{\eta}(t_0), \quad z(t_0) = z_0 \quad (6)$$

имеет вид

$$x(t) = \eta(t), \quad y(t) = \dot{\eta}(t), \quad z(t) = \xi(t) = z_0 + \int_{t_0}^t (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau. \quad (7)$$

Заметим, что это решение принадлежит цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси z . Параметрические уравнения

$$x = \eta(t), \quad y = \dot{\eta}(t) \quad (8)$$

задают направляющую этой цилиндрической поверхности. Дополнительно потребуем, чтобы для периодической функции $\eta(t)$ для любого t выполнялось условие

$$\int_t^{t+T} (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau = 0. \quad (9)$$

Тогда для любого t

$$\xi(t+T) = z_0 + \int_{t_0}^t (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau + \int_t^{t+T} (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau = z_0 + \int_{t_0}^t (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau = \xi(t).$$

Это означает, что компоненты решения (7) являются функциями периода T , T и kT соответственно, где k — натуральное число. Будем искать функцию $\eta(t)$, удовлетворяющую условию (9), в виде

$$\eta(t) = a \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} + b \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T}, \quad (10)$$

где a и b — некоторые константы. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -a \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T} + b \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T}, \\ \int_t^{t+T} (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau &= T - \frac{2\pi^2(a^2 + b^2)}{T}. \end{aligned}$$

Условие (9) и

$$\eta(t_0) = x_0, \quad \dot{\eta}(t_0) = y_0 \quad (11)$$

будут выполняться в том случае, если

$$a = x_0, \quad b \frac{2\pi}{T} = y_0, \quad T^2 = 2\pi^2(a^2 + b^2). \quad (12)$$

Система (12) при $|y_0| < \sqrt{2}$ имеет решение

$$a = x_0, \quad b = \frac{T y_0}{2\pi}, \quad T = \frac{2\pi x_0}{\sqrt{2 - y_0^2}}. \quad (13)$$

Таким образом, для любой начальной точки (x_0, y_0, z_0) , $|y_0| < \sqrt{2}$, мы построили управление (5),(10),(13), при котором система совершает периодическое движение по замкнутой кривой, лежащей на эллиптическом цилиндре с образующей, параллельной оси z . Для начальных точек (x_0, y_0, z_0) и (x_0, y_0, z_1) , отличающихся только значениями третьих координат,

соответствующие им фазовые кривые будут принадлежать одному и тому же цилиндру, причем вторая кривая может быть получена из первой параллельным сдвигом вдоль оси z на величину $z_1 - z_0$.

В рассматриваемой системе цилиндр состоит из периодических траекторий, три из которых изображены на рис. 1. Изображенные траектории получены интегрированием системы (4), замкнутой полученным управлением (5), для начальных точек $(T\sqrt{2}/\pi, 0, 0)$, $(T\sqrt{2}/\pi, 0, 4)$, $(T\sqrt{2}/\pi, 0, 8)$, при $T = 100$.

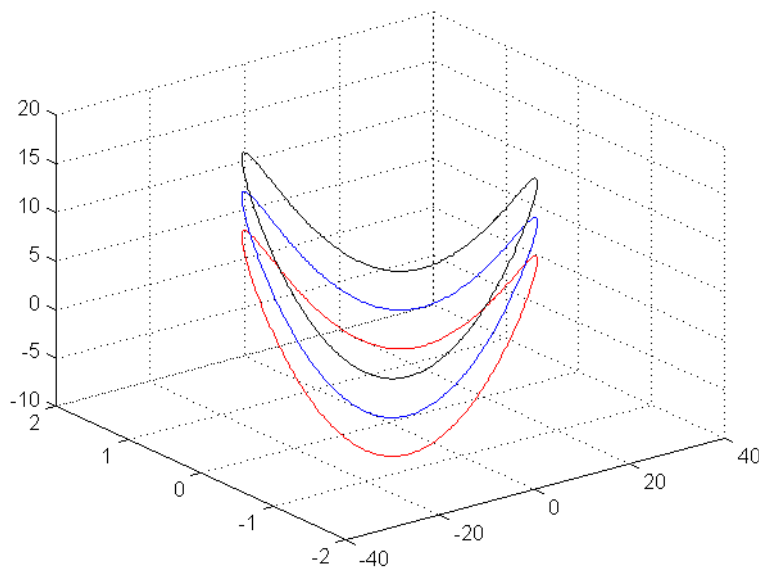


Рис. 1. Фазовые кривые

Стабилизация периодических решений

Рассмотрим теперь задачу Коши с произвольными начальными условиями

$$x(t_0) = x_*, \quad y(t_0) = y_*, \quad z(t_0) = z_* \quad (14)$$

для системы (4), замкнутой управлением

$$u(x, y, z, t) = x - yz + \ddot{\eta}(t) - k_1(y - \dot{\eta}(t)) - k_0(x - \eta(t)), \quad (15)$$

где функция $\eta(t)$ построена для начальной точки (x_0, y_0, z_0) (6); k_1 и k_0 — некоторые константы. В точках траектории $x(t) = \eta(t)$, $y(t) = \dot{\eta}(t)$, $z(t) = \xi(t)$ это управление совпадает с управлением (5). Подставив (15) в исходную систему (4), получим замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \ddot{\eta}(t) - k_1(y - \dot{\eta}(t)) - k_0(x - \eta(t)), \\ \dot{z} = 1 - y^2. \end{cases} \quad (16)$$

Первые два уравнения (16) запишем в переменных $\Delta x = x - \eta(t)$, $\Delta y = y - \dot{\eta}(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x}{dt} = \Delta y, \\ \frac{d\Delta y}{dt} = k_1 \Delta y + k_0 \Delta x. \end{cases} \quad (17)$$

При положительных k_1 и k_0 эта линейная система с постоянными коэффициентами будет иметь асимптотически устойчивое в целом нулевое решение.

Поэтому Δx и Δy стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Это означает, что расхождение между направляющей (8) цилиндрической поверхности и проекцией на плоскость Oxy решения задачи Коши (4), (15), (14) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть далее k_1 и k_0 таковы, что характеристическое уравнение системы (17) имеет вещественные отрицательные корни λ_1 и λ_2 , $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда общее решение (17) будет иметь вид

$$\Delta x = C_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} + C_2 e^{\lambda_2(t-t_0)}, \quad \Delta y = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_0)}.$$

Значения постоянных C_1 и C_2 , соответствующие решению задачи Коши с начальными условиями

$$\Delta x(t_0) = x_* - x_0, \quad \Delta y(t_0) = y_* - y_0, \quad (18)$$

могут быть найдены по формулам

$$C_1 = \frac{-\lambda_2 \Delta x(t_0) + \Delta y(t_0)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 \Delta x(t_0) - \Delta y(t_0)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о поведении $\Delta z = z(t) - \xi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, где $z(t)$ — третья компонента решения задачи Коши (4), (15), (14). Поскольку

$$z(t) = z_* + \int_{t_0}^t (1 - y^2(\tau)) d\tau,$$

то

$$\begin{aligned} \Delta z &= z_* + \int_{t_0}^t (1 - y^2(\tau)) d\tau - z_0 - \int_{t_0}^t (1 - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau = \\ &= z_* - z_0 - \int_{t_0}^t (y^2(\tau) - \dot{\eta}^2(\tau)) d\tau = z_* - z_0 - \int_{t_0}^t (y(\tau) - \dot{\eta}(\tau))(y(\tau) + \dot{\eta}(\tau)) d\tau = \\ &= z_* - z_0 - \int_{t_0}^t \Delta y(\tau) (\Delta y(\tau) + 2\dot{\eta}(\tau)) d\tau; \end{aligned}$$

при этом величина

$$\Delta y(\tau) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-t_0)}$$

бесконечно мала при $t \rightarrow +\infty$, а выражение

$$\begin{aligned}\alpha(\tau) &= \Delta y(\tau) + 2\dot{\eta}(\tau) = \\ &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-t_0)} - \frac{4a\pi}{T} \sin \frac{2\pi(\tau-t_0)}{T} + \frac{4b\pi}{T} \cos \frac{2\pi(\tau-t_0)}{T} = \\ &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-t_0)} - \frac{4x_0\pi}{T} \sin \frac{2\pi(\tau-t_0)}{T} + 2y_0 \cos \frac{2\pi(\tau-t_0)}{T}\end{aligned}$$

ограничено при $t \in [t_0, +\infty)$, как сумма ограниченных функций. Обозначим константу, ограничивающую $\alpha(\tau)$ по абсолютной величине при $t \in [t_0, +\infty)$, через M .

Покажем, что интеграл $\int_{t_0}^{+\infty} \Delta y(\tau) \alpha(\tau) d\tau$ сходится. Действительно,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \Delta y(\tau) \alpha(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{+\infty} C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau.$$

Для первого интеграла в правой части равенства имеем

$$\left| \int_{t_0}^{+\infty} C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau \right| = |C_1 \lambda_1| \left| \int_{t_0}^{+\infty} e^{\lambda_1(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau \right|.$$

Так как

$$|e^{\lambda_1(\tau-t_0)} \alpha(\tau)| < M |e^{\lambda_1(\tau-t_0)}| = M e^{\lambda_1(\tau-t_0)}$$

и

$$\int_{t_0}^{+\infty} M e^{\lambda_1(\tau-t_0)} d\tau = -\frac{M}{\lambda_1} = \frac{M}{|\lambda_1|},$$

то интеграл $\int_{t_0}^{+\infty} C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau$ сходится, причем

$$\left| \int_{t_0}^{+\infty} C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau \right| < |C_1 \lambda_1| \cdot \frac{M}{|\lambda_1|} = |C_1| M.$$

Аналогично

$$\left| \int_{t_0}^{+\infty} C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2(\tau-t_0)} \alpha(\tau) d\tau \right| < |C_2| M.$$

Таким образом, существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta z(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (z(t) - \xi(t)) = C,$$

где величина

$$C = \int_{t_0}^{+\infty} \Delta y(\tau) \alpha(\tau) d\tau$$

зависит лишь от начальных условий (14). Следовательно, ω -предельное множество решения задачи Коши (4), (15), (14) будет замкнутой кривой

$$x(t) = \eta(t), \quad y(t) = \dot{\eta}(t), \quad z(t) = \xi(t) + C,$$

лежащей на цилиндрической поверхности с направляющей (8).

Результаты моделирования процесса управления хаосом при помощи построенного управления приведены на рис. 2. Моделирование производилось для трех начальных точек $S_1(1, 1, 1)$, $S_2(-1, -1, -20)$ и $S_3(10, 3, 0)$ с одинаковым значением $T = 100$; были выбраны значения $k_1 = 0,3$ и $k_0 = 0,02$, $x_0 = T\sqrt{2}/\pi$, $y_0 = 0$. На рисунке синим цветом показана тректория при движении из S_1 , красным — из S_2 , зеленым — из S_3 .

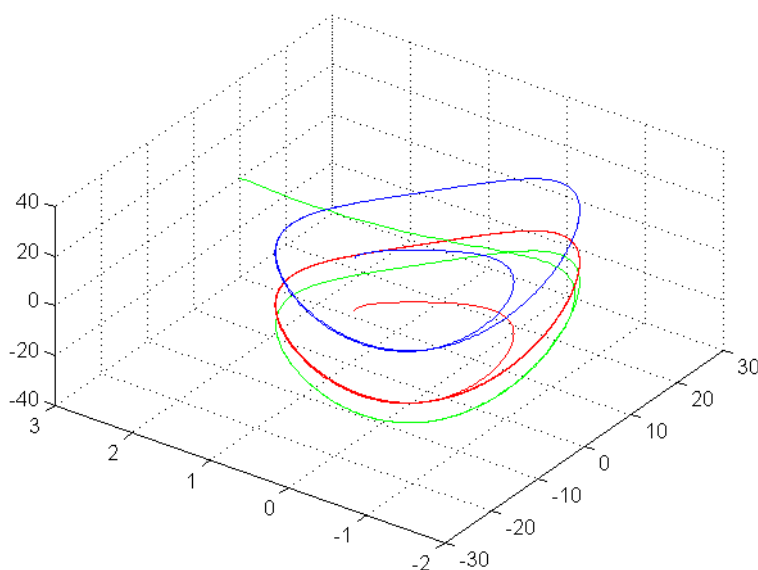


Рис. 2. Моделирование процесса управления хаосом

Заключение

В статье описан способ, позволяющий решить задачу управления хаосом в одной из систем Спротта с управлением. Рассматриваемая система примечательна тем, что она не эквивалентна регулярной системе канонического вида ни на каком подмножестве пространства состояний. Очевидно, что описанный способ допускает обобщение на более широкий класс систем. Так, в последнем уравнении системы правая часть может иметь вид произвольного многочлена от x и y . При этом в процедуре управления изменится лишь вид последнего условия в (12).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-01-00733 и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, no. 11. P. 1196–1199.
2. Grebogi C., Lai Y.C. Controlling chaos in high dimensions // *IEEE Trans. Circ. Syst. I.* 1997. Vol. 44. P. 971–975.
3. Grebogi C., Lai Y.C. Controlling chaotic dynamical systems // *Syst. Contr. Lett.* 1997. Vol. 31, no. 3. P. 307–312.
4. Nitsche G., Dressler U. Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1992. Vol. 58, no. 1–4. P. 153–164. DOI: 10.1016/0167-2789(92)90106-W.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // *Phys. Lett. A.* 1992. Vol. 170, no. 6. P. 421–428. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90745-8.
6. Alsing P.M., Gavrielides A., Kovanis V. Using Neural networks for controlling chaos // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 1225–1231.
7. Weeks E.R., Burgess J.M. Evolving artificial neural networks to control chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, no. 2. P. 1531–1540.
8. Lin C.T., Jou C.P. Controlling chaos by GA-based reinforcement learning neural network // *IEEE Trans. Neural Netw.* 1999. Vol. 10. P. 846–859.
9. Крищенко А.П., Кавинов А.В. Подавление хаотической динамики // *Дифференциальные уравнения.* 2004. Т. 40, № 12. С. 1629–1635.
10. Кавинов А.В. Стабилизация программных движений и подавление хаотической динамики малыми управлениями // *Нелинейная динамика и управление. Вып. 5: Сб. статей / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 175–184.*
11. Краснощёченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
12. Крищенко А.П., Клиновский М.Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // *Дифференциальные уравнения.* 1992. Т. 28, № 1. С. 1945–1952.
13. Фетисов Д.А. Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2006. № 3. С. 12–30.
14. Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Преобразование аффинных систем со скалярным управлением к квазиканоническому виду // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2013. № 1. С. 3–16.
15. Sprott J.C. Some simple chaotic flows // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50, no. 2. P. 647–650.

Control of chaotic dynamics in the Sprott A system

05, May 2013

DOI: 10.7463/0513.0555404

Kavinov A. V.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
kavinov@newmail.ru

Since the early nineties, the problem of controlling chaos attracts researches' attention. The essence of the problem lies in synthesis of control which eliminates chaotic dynamics of a dynamic system. A normally closed system has one or several stable limit cycles. This article deals with the problem of controlling chaos in one of the Sprott systems and also describes the method of elimination of chaotic dynamics by stabilizing a cylindrical invariant sub-manifold in the phase space of the closed system which consists of system's stable periodic solutions. The system under consideration belongs to the class of affine systems which are not equivalent to a regular system of the canonical form on any subset of the state space. The described method is applicable not only to the specific system in question but may be extended.

References

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199.
2. Grebogi C., Lai Y.C. Controlling chaos in high dimensions. *IEEE Trans. Circ. Syst. I.*, 1997, vol. 44, no. 10, pp. 971–975. DOI: 10.1109/81.633886.
3. Grebogi C., Lai Y.C. Controlling chaotic dynamical systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1997, vol. 31, no. 3, pp. 307–312.
4. Nitsche G., Dressler U. Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, vol. 58, pp. 153–164. DOI: 10.1016/0167-2789(92)90106-W.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 170, no. 6, pp. 421–428. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90745-8.
6. Alsing P.M., Gavrielides A., Kovanis V. Using Neural networks for controlling chaos. *Phys. Rev. E*, 1994, vol. 49, pp. 1225–1231.

7. Weeks E.R., Burgess J.M. Evolving artificial neural networks to control chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, pp. 1531–1540.
8. Lin C.T., Jou C.P. Controlling chaos by GA-based reinforcement learning neural network. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 1999, vol. 10, pp. 846–859.
9. Krishchenko A.P., Kavinov A.V. Podavlenie khaoticheskoi dinamiki [Suppression of chaotic dynamics]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1629–1635. (Trans. version: *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 12, pp. 1709–1715. DOI: 10.1007/s10625-005-0102-9.)
10. Kavinov A.V. Stabilizatsiia programmnykh dvizhenii i podavlenie khaoticheskoi dinamiki malymi upravleniiami [Stabilization programmed motion and suppression of chaotic dynamics using small controls]. *Nelineinaia dinamika i upravlenie. Vyp. 5: Sbornik statei* [Nonlinear dynamics and control. Iss. 5: collection of articles]. Moscow, PhysMatLit, 2006, pp. 175–184.
11. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.
12. Krishchenko A.P., Klinkovskii M.G. Preobrazovanie affinnykh sistem s upravleniem i zadacha stabilizatsii [The transformation of affine systems with control and stabilization problem]. *Differentsial'nye uravneniia*, 1992, vol. 28, no. 1, pp. 1945–1952.
13. Fetisov D.A. Issledovanie upravliaemosti reguliarnykh sistem kvazikanonicheskogo vida [Study of controllability of regular systems of quasi-canonical type]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2006, no. 3, pp. 12–30.
14. Tkachev S.B., Shevliakov A.A. Preobrazovanie affinnykh sistem so skaliarnym upravleniem k kvazikanonicheskomu vidu [The transformation of affine systems with scalar control to the quasi-canonical form]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2013, no. 1, pp. 3–16.
15. Sprott J.C. Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 1994, vol. 50, no. 2, pp. 647–650.